XLV Olimpiada Matemática Española

Fase aragonesa

23 de enero de 2009

Problema 1

Calcular la suma

$$2\left[h\left(\frac{1}{2009}\right)+h\left(\frac{2}{2009}\right)+\cdots+h\left(\frac{2008}{2009}\right)\right],$$

siendo $h(t)=\dfrac{5}{5+25^t}$, $t\in\mathbb{R}$.

Solución: Notemos en primer lugar que

$$h(1-t)=\frac{5}{5+25^{1-t}}=\frac{5\cdot 25^t}{5\cdot 25^t+25}=\frac{25^t}{25^t+5},$$

de donde se obtiene $h(t)+h(1-t)=1$. Así,

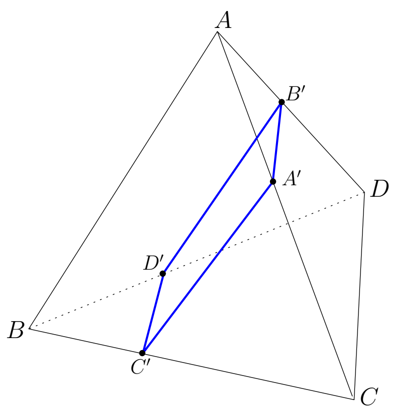
$$\begin{aligned} h\left(\frac{1}{2009}\right)+h\left(\frac{2008}{2009}\right)&=h\left(\frac{2}{2009}\right)+h\left(\frac{2007}{2009}\right)\\ &=\cdots\cdots=h\left(\frac{1004}{2009}\right)+h\left(\frac{1005}{2009}\right)=1. \end{aligned}$$

Por tanto, la suma indicada vale $2\cdot 1004=2008$.

Problema 2

Si la sección producida por un plano al cortar un tetraedro (regular) es un rombo, probar que necesariamente el rombo es un cuadrado.

Solución: Dados tres planos en el espacio, dos a dos no paralelos, o bien se cortan los tres en un único punto, o bien se cortan dos a dos en rectas paralelas.

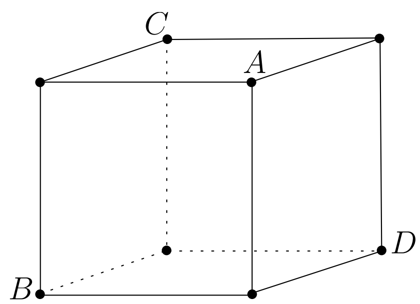


Los lados opuestos de un rombo son paralelos. Las caras del tetraedro que contienen a dos de estos lados ($A'B'$ y $C'D'$ en la figura) se cortan en una arista (CD) que, por el párrafo anterior, es paralela a los lados del rombo. Análogamente, los otros dos lados opuestos del rombo ($A'C'$ y $B'D'$ en la figura) son paralelos a la arista AB. Como las aristas AB y CD son perpendiculares, estamos ante un rombo con lados perpendiculares: un cuadrado.

Problema 3

Se consideran un cubo de 1 cm de arista y dos vértices A y B diagonalmente opuestos de una cara del cubo. Se denomina camino de longitud n a una sucesión de $n+1$ vértices de forma que dos consecutivos están a 1 cm de distancia. Entonces, ¿cuál de los siguientes números es mayor: el número de caminos de longitud 1000 cm que empiezan y acaban en A, o el número de caminos de longitud 1000 cm que empiezan en A y acaban en B? Justifica la respuesta.

Solución: Todo camino de longitud $n+2$ cm que empieza y acaba en A se compone de un camino de longitud n que empieza en A y acaba en uno de los vértices A, B, C o D de la figura, más un camino de longitud 2 que empieza en uno de estos vértices y acaba en A.



Notemos que hay dos caminos de longitud 2 que empiezan en B, C o D y acaban en A, pero hay tres caminos de longitud 2 que empiezan y acaban en A. Denotemos pues por a_n el número de caminos de longitud n que empiezan y acaban en A, y por b_n, c_n, d_n el número de caminos de longitud n que empiezan en A y acaban, respectivamente, en B, C o D. El razonamiento anterior prueba la siguiente igualdad:

$$a_{n+2} = 3a_n + 2b_n + 2c_n + 2d_n.$$

Con el mismo razonamiento se obtiene:

$$b_{n+2} = 2a_n + 3b_n + 2c_n + 2d_n.$$

Restando ambas igualdades se tiene $a_{n+2} - b_{n+2} = a_n - b_n$. Así pues,

$$a_{1000} - b_{1000} = a_{998} - b_{998} = \cdots\cdots = a_2 - b_2 = 3 - 2 = 1.$$

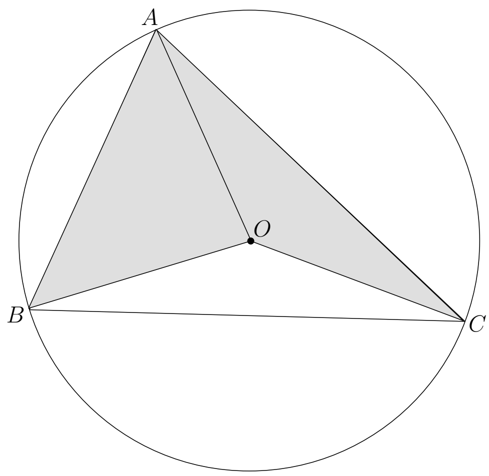
Por tanto, el número de caminos de longitud 1000 cm que empiezan y acaban en A es mayor en una unidad que el número de caminos de longitud 1000 cm que empiezan en A y acaban en B.

Problema 4

Dado un triángulo acutángulo ABC, determinar para qué puntos P de su interior se verifican las siguientes desigualdades:

$$1 \leq \frac{\angle APB}{\angle ACB} \leq 2, \qquad 1 \leq \frac{\angle BPC}{\angle BAC} \leq 2, \qquad 1 \leq \frac{\angle CPA}{\angle CBA} \leq 2.$$

Solución: Sea O el circuncentro del triángulo ABC. El valor del ángulo $\angle BAC$, por estar inscrito en la circunferencia, es la mitad del ángulo $\angle BOC$, y cualquier punto P interior al triángulo BOC verifica que $\angle BPC \geq \angle BOC = 2\angle BAC$. Por tanto, los puntos solicitados están contenido en el cuadrilátero $ABOC$ (región sombreada en el dibujo).



Análogamente, estos puntos están contenidos en los cuadriláteros $BCOA$ y $CAOB$. Pero la intersección de estos tres cuadriláteros contiene solamente al punto O, luego O es el único punto interior al triángulo ABC que verifica las desigualdades.

Problema 5

La igualdad $2008 = 1111 + 444 + 222 + 99 + 77 + 55$ es un ejemplo de descomposición del número 2008 como suma de números distintos de más de una cifra, cuya representación (en el sistema decimal) utiliza un solo dígito.

i) Encontrar una descomposición de este tipo para el número 2009.

ii) Determinar para el número 2009 todas las posibles descomposiciones de este tipo que utilizan el menor número posible de sumandos (el orden de los sumandos no se tiene en cuenta).

Solución: Si agrupamos los números con igual cantidad de cifras en la descomposición $2008 = 1111 + 444 + 222 + 99 + 77 + 55$, obtenemos $2008 = 1111 \cdot 1 + 111 \cdot (4 + 2) + 11 \cdot (9 + 7 + 5)$. Dada una descomposición del tipo indicado de 2009, agrupando del mismo modo obtendremos

$$2009 = 1111 \cdot a + 111 \cdot b + 11 \cdot c,$$

donde a, b y c son números enteros menores o iguales que $9+8+\cdots+2+1 = 45$, puesto que los sumandos de la descomposición han de ser diferentes.

Pero $1111 = 11 \cdot 101$ y $111 = 11 \cdot 10 + 1$, luego $2009 = 11 \cdot (101 \cdot a + 10 \cdot b + c) + b$. Pero dividiendo 2009 por 11 obtenemos $2009 = 11 \cdot 182 + 7$. Por tanto
$$182 = 101 \cdot a + 10 \cdot b + c + \frac{b-7}{11}.$$
Deducimos de aquí que $b - 7$ es un múltiplo de 11; esto es, $b = 11 \cdot k + 7$ para algún $k \geq 0$. La ecuación anterior nos queda entonces
$$182 = 101 \cdot a + 110 \cdot k + 70 + c + k,$$
es decir,
$$112 = 101 \cdot a + 111 \cdot k + c.$$
Las posibles soluciones son:

(i) $a = 1$, $k = 0$ y $c = 11$, es decir $a = 1$, $b = 7$ y $c = 11$;

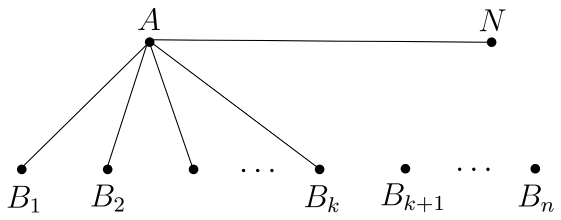
(ii) $a = 0$, $k = 1$ y $c = 1$, es decir $a = 0$, $b = 18$ y $c = 1$.

Ahora se trata de estudiar las posibles maneras de descomponer 7 y 11 en el primer caso, y 18 en el segundo caso, como suma de números distintos de una cifra. Vemos pues que no es posible obtener una descomposición para 2009 con menos de 4 sumandos, y las posibles descomposiciones con 4 sumandos son las siguientes:
$$\begin{array}{ll}
2009 = 1111 + 777 + 99 + 22 & (a = 1,\ b = 7,\ c = 11 = 9 + 2), \\
2009 = 1111 + 777 + 88 + 33 & (a = 1,\ b = 7,\ c = 11 = 8 + 3), \\
2009 = 1111 + 777 + 77 + 44 & (a = 1,\ b = 7,\ c = 11 = 7 + 4), \\
2009 = 1111 + 777 + 66 + 55 & (a = 1,\ b = 7,\ c = 11 = 6 + 5), \\
2009 = 999 + 888 + 111 + 11 & (a = 0,\ b = 18 = 9 + 8 + 1,\ c = 1), \\
2009 = 999 + 777 + 222 + 11 & (a = 0,\ b = 18 = 9 + 7 + 2,\ c = 1), \\
2009 = 999 + 666 + 333 + 11 & (a = 0,\ b = 18 = 9 + 6 + 3,\ c = 1), \\
2009 = 999 + 555 + 444 + 11 & (a = 0,\ b = 18 = 9 + 5 + 4,\ c = 1), \\
2009 = 888 + 777 + 333 + 11 & (a = 0,\ b = 18 = 8 + 7 + 3,\ c = 1), \\
2009 = 888 + 666 + 444 + 11 & (a = 0,\ b = 18 = 8 + 6 + 4,\ c = 1), \\
2009 = 777 + 666 + 555 + 11 & (a = 0,\ b = 18 = 7 + 6 + 5,\ c = 1).
\end{array}$$
En total, 11 posibles soluciones.

Problema 6

Se tienen en el plano $3n$ puntos: n de color blanco, n de color azul y n de color negro. Cada uno de los puntos está unido con puntos de color distinto al suyo mediante $n + 1$ segmentos exactamente. Probar que hay, al menos, un triángulo formado por vértices de distinto color.

Solución: Sea k ($k \leq n$) el mayor número de puntos de un mismo color que están conectados a un mismo punto. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que hay un punto azul A conectado a k puntos blancos $B_1, B_2, \ldots, B_k$. Además, como A está conectado a $n+1$ puntos, y $n+1 > k$, A está conectado a algún punto negro N.



Si N no estuviera conectado a ninguno de los puntos $B_1, \ldots, B_k$, entonces N sólo estaría conectado a un número de vértices blancos $\leq n-k$, luego estaría conectado a un número de vértices azules $\geq (n+1)-(n-k) = k+1$, lo que es imposible por la maximalidad de k. Por tanto, N está conectado a alguno de los puntos B_i $(1 \leq i \leq k)$, y ANB_i es un triángulo formado por vértices de distinto color.