XLVI Olimpiada Matemática Española

Fase aragonesa

15 de enero de 2010

Problema 1

Sea I_n el conjunto de los n primeros números naturales impares. Por ejemplo: $I_3 = \{1, 3, 5\}$, $I_6 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, etc.

¿Para qué números n el conjunto I_n se puede descomponer en dos partes (disjuntas) de forma que coincidan las sumas de los números en cada una de ellas?

Solución: Denotemos por ΣI_n la suma de los números en I_n. Puesto que los elementos de $I_n = \{1, 3, \ldots, 2n-1\}$ forman una progresión aritmética se tiene

$$\Sigma I_n = \frac{1 + (2n-1)}{2} n = n^2,$$

que es par o impar según n sea par o impar. Por tanto para que I_n se pueda descomponer en dos partes con la misma suma, *n tiene que ser par.*

Obviamente $I_2 = \{1, 3\}$ no puede descomponerse en la manera requerida. Ahora bien, $I_4 = \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 7\} \cup \{3, 5\}$ e $I_6 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} = \{1, 3, 5, 9\} \cup \{7, 11\}$ sí pueden hacerlo.

Por último, notemos que si I_n se puede descomponer del modo requerido: $I_n = A \cup B$, entonces

$$\begin{aligned} I_{n+4} &= I_n \cup \{2n+1, 2n+3, 2n+5, 2n+7\} \\ &= \Big(A \cup \{2n+1, 2n+7\}\Big) \bigcup \Big(\{B \cup \{2n+3, 2n+5\}\Big) \end{aligned}$$

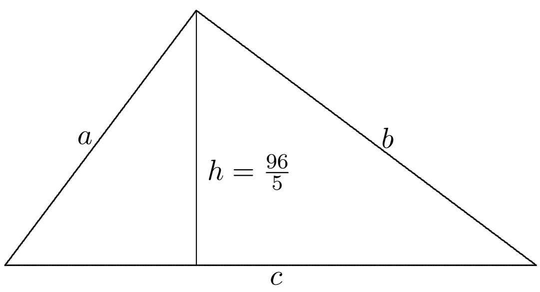
también puede hacerlo.

Por tanto, la solución consiste en *los números pares a partir de* 4.

Problema 2

Determina los lados del triángulo rectángulo del que se conocen el perímetro, $p = 96$, y la altura sobre la hipotenusa, $h = \frac{96}{5}$.

Solución: Dado el triángulo rectángulo de la figura:



tenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} a + b + c = 96 & \text{(perímetro)} \\ ab = \frac{96}{5} c & \text{(pues el área es } \frac{1}{2}ab \text{ y también } \frac{1}{2}ch) \\ a^2 + b^2 = c^2 & \text{(Teorema de Pitágoras)} \end{cases}$$

Así pues

$$(96-c)^2 = (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = c^2 + \frac{192}{5}c,$$

luego $96^2 - 192c = \frac{192}{5}c$, y obtenemos $c = 40$.

Ahora $a+b=56$ y $ab=768$, luego a y b son las raíces de la ecuación $x^2 - 768x + 768 = 0$, que son 24 y 32. (Un modo sencillo consiste en considerar $t = 28-a$, luego $a = 28-t$, $b = 28+t$ y $768 = (28-t)(28+t) = 28^2 - t^2$, de donde obtenemos $t^2 = 16$, $t = \pm 4$ y a y b toman los valores 24 y 32.)

Por tanto, *los lados del triángulo miden* 24*,* 32 *y* 40.

Problema 3

Halla todos los números naturales n que verifican la condición:

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{3}\right] = n + 335$$

donde $[x]$ es la parte entera de x. (Esto es, $[1{,}32] = 1$, $[2] = 2$, $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$, $[\pi] = 3$, etc.)

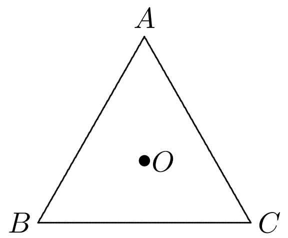
Solución: Distinguimos casos según n sea un número natural de la forma $6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$ o $6k+5$, con $k \geq 0$. (Todo número natural es de esta forma, basta dividirlo para 6 y considerar el resto.)

n	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\left[\frac{2n}{3}\right]$	ecuación	solución
$6k$	$3k$	$4k$	$7k = 6k + 335$	$k = 335$, $n = 2010$
$6k+1$	$3k$	$4k$	$7k = 6k + 336$	$k = 336$, $n = 2017$
$6k+2$	$3k+1$	$4k+1$	$7k+2 = 6k+337$	$k = 335$, $n = 2012$
$6k+3$	$3k+1$	$4k+2$	$7k+3 = 6k+338$	$k = 335$, $n = 2013$
$6k+4$	$3k+2$	$4k+2$	$7k+4 = 6k+339$	$k = 335$, $n = 2014$
$6k+5$	$3k+2$	$4k+3$	$7k+5 = 6k+340$	$k = 335$, $n = 2015$

Así pues, *las soluciones son* 2010*,* 2012*,* 2013*,* 2014*,* 2015 *y* 2017.

Problema 4

Se considera un triángulo equilátero de lado 1 y centro O, como el de la figura:

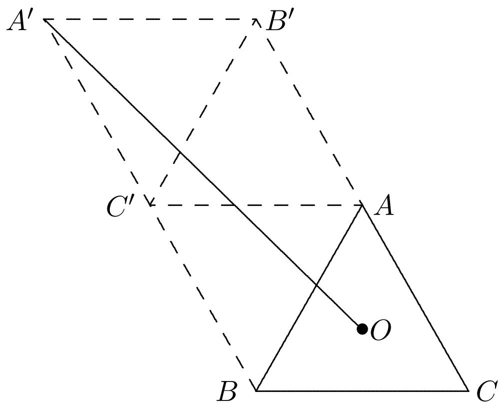


Un rayo parte de O y se refleja en los tres lados, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, (en el orden dado), hasta alcanzar el vértice A.

Determina la longitud mínima del recorrido del rayo.

Nota: Cuando el rayo se refleja en un lado, los ángulos de entrada (incidencia) y salida (reflexión) coinciden.

Solución: Cada vez que el rayo se refleja en un lado, podemos seguir su camino en el triángulo reflejado en el mismo lado. Así podemos desdoblar el camino seguido por el rayo como en la figura:



La figura nos indica que existe un único camino para ir del punto O al punto A siguiendo las instrucciones, y este único camino corresponde al segmento que une los puntos O y A' en la figura.

Como el triángulo $OA'B$ es rectángulo y el segmento OB mide $\frac{1}{\sqrt{3}}$, la longitud del segmento OA' es

$$\sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{3}} = \frac{\sqrt{39}}{3}.$$

Problema 5

Calcula las soluciones reales de la ecuación:

$$\sqrt[4]{97-X}+\sqrt[4]{X}=5.$$

Solución: Hacemos $u=\sqrt[4]{97-X}$ y $v=\sqrt[4]{X}$, que verifican:

$$\begin{gathered} u+v=5 \\ u^4+v^4=97. \end{gathered}$$

Para aprovechar la simetría de u y v, hacemos $t=u-\frac{5}{2}$, luego $u=\frac{5}{2}+t$, $v=\frac{5}{2}-t$, y se tiene

$$\left(\frac{5}{2}+t\right)^4+\left(\frac{5}{2}-t\right)^4=97.$$

Desarrollando esta expresión nos queda

$$2\left(\left(\frac{5}{2}\right)^4+6\times\left(\frac{5}{2}\right)^2t^2+t^4\right)=97,$$

que simplificando nos queda $16t^4+600t^2-151=0$, o

$$(2t)^4+150(2t)^2-151=0.$$

Como las soluciones de la ecuación $x^2+150x-151=0$ son 1 y -151, se tiene que $(2t)^2=1$, luego $t=\pm\frac{1}{2}$, así pues $v=2$ o 3, y las soluciones que nos piden son $x=2^4=16$ y $x=3^4=81$.

Problema 6

Dado el polinomio $P(X)=X^4+\square\,X^3+\square\,X^2+\square\,X+\square$, en el que cada cuadrado representa un hueco donde se colocará un coeficiente, se plantea el siguiente juego entre dos jugadores: Alternativamente, el primer y el segundo jugador eligen un hueco vacío y colocan en él un entero no nulo hasta rellenar todos los cuatro huecos. Si el polinomio resultante tiene al menos dos raíces enteras gana el segundo jugador, en otro caso el ganador es el primero.

Prueba que, eligiendo la estrategia adecuada, el primer jugador siempre puede ganar.

Solución: Los *polinomios ganadores* para el segundo jugador son los que tienen al menos dos raíces enteras, esto es, los polinomios de la forma

$$\begin{aligned} &P(X)=(X+a)(X+b)(X^2+cX+d)\\ &=X^4+\big(a+b+c\big)X^3+\big(ab+(a+b)c+d\big)X^2+\big(abc+(a+b)d\big)X+abd, \end{aligned}$$

con a,b,c,d enteros de modo que ningún coeficiente sea nulo.

Escribamos nuestros polinomios en la forma $P(X)=X^4+\alpha_3X^3+\alpha_2X^2+\alpha_1X+\alpha_0$. El juego consiste en ir eligiendo los valores de los coeficientes α_i. Una estrategia ganadora para el primer jugador es la siguiente:

- El primer jugador elige $\alpha_0=-1$.

Esto fuerza $abd=-1$ para obtener un polinomio ganador para el segundo jugador, luego a, b y d deben de valer 1 o -1. Pero si $d=1$, entonces $ab=-1$,

$a+b=0$ y se obtiene $\alpha_2=0$, que no está permitido. Por tanto, esta primera jugada fuerza $d=-1$, $ab=1$ y, por tanto, $a=b=\pm 1$ y $a+b=\pm 2$. Así pues, $\alpha_3=c\pm 2$, $\alpha_1=c\mp 2$ y $\alpha_2=\pm 2c$. En consecuencia, los posibles polinomios ganadores para el segundo jugador verifican que su coeficiente α_2 es par, y que α_1, α_3 y $\frac{\alpha_2}{2}$ tienen la misma paridad.

- Si el segundo jugador elige ahora un valor para α_1 o para α_3, entonces el primer jugador elige $\alpha_2=1$ (impar) y gana el juego. Si el segundo jugador elige un valor impar para α_2, el primer jugador puede elegir cualquier valor para α_1 para ganar el juego. Por último, si el segundo jugador elige un valor par para α_2, entonces el primer jugador puede elegir un valor de α_1 de distinta paridad que $\frac{\alpha_2}{2}$.