A1.-
Dado un entero positivo n, hallar la suma de todos los enteros positivos inferiores a $10n$ que no son múltiplos de 2 ni de 5.

Solución.
Sean los conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, \dots, 10n\}, \\ B &= \{2, 4, \dots, 2(5n)\}, \\ C &= \{5, 10, \dots, 5(2n)\}, \\ B \cap C &= \{10, 20, \dots, 10n\}. \end{aligned}$$

Nos piden la suma de los elementos de A que no son de B ni de C. Las sumas de los elementos de cada uno de los conjuntos es

$$\Sigma A = \frac{10n(10n+1)}{2}, \quad \Sigma B = 2\frac{5n(5n+1)}{2}, \quad \Sigma C = 5\frac{2n(2n+1)}{2}, \quad \text{y}$$

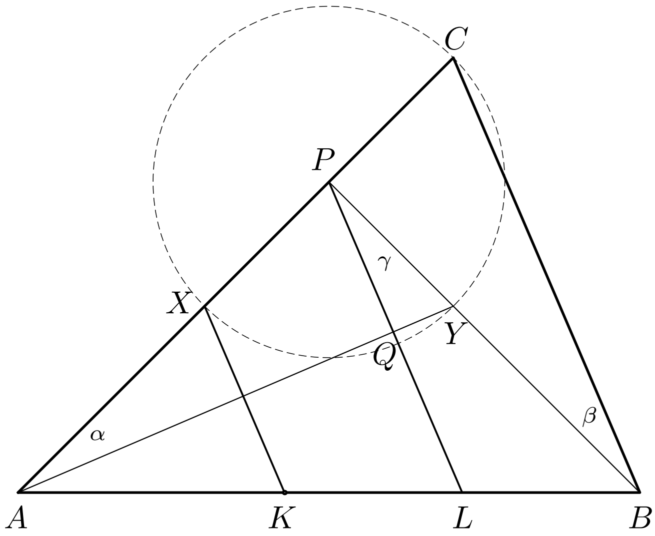
$$\Sigma(B \cap C) = \frac{10n(10n+1)}{2}.$$

La suma pedida es

$$\Sigma A - \Sigma B - \Sigma C + \Sigma(B \cap C) = 20n^2.$$

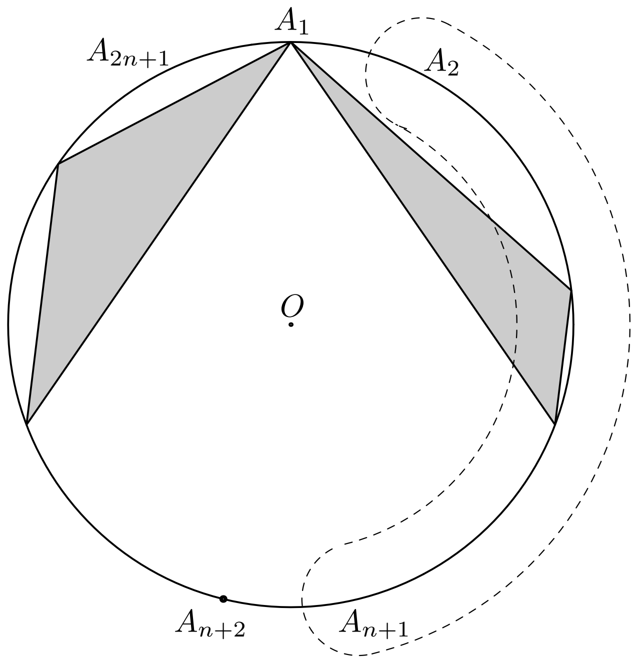
A2.-
Sea ABC un triángulo acutángulo con $\hat{A} = 45°$, y sea P el pie de la altura por B. Trazamos la circunferencia de centro P que pasa por C y que vuelve a cortar a AC en el punto X y a la altura PB en el punto Y. Sean r y s las rectas perpendiculares a la recta AY por P y X, respectivamente, y L, K las intersecciones de r, s con AB. Demostrar que L es el punto medio de KB.

Solución.
Por construcción es $PX = PY = PC$. Los triángulos PAY y PCB, rectángulos en P, son iguales ya que $AP = PB$ (el triángulo rectángulo APB es isósceles) y $PY = PC$. Por tanto los ángulos α y β son iguales.
El triángulo rectángulo PYQ es semejante a los anteriores, de manera que el ángulo $\gamma = \widehat{LPB}$ es igual a α. Resulta que los segmentos PL y CB son paralelos, y por el teorema de Thales queda KL=LB ya que PX=PC.



A3.-
Los puntos A_1, A_2, ... , A_{2n+1} son los vértices de un polígono regular de $2n+1$ lados. Hallar el número de ternas A_i, A_j, A_k tales que el triángulo $A_iA_jA_k$ es obtusángulo.

Solución.



Al ser $2n+1$ impar, no es posible construir triángulos rectángulos. Observemos que cualquier triángulo obtusángulo dejará el centro O (su circuncentro) fuera de él. Si lo giramos en sentido directo o inverso alrededor de O podemos conseguir que uno de sus vértices agudos esté en A_1. Los otros dos están, bien en el conjunto $\{A_2, \ldots, A_{n+1}\}$, bien en $\{A_{n+2}, \ldots, A_{2n+1}\}$. El número buscado será $2\binom{n}{2}$. Como esto lo podemos hacer con cada uno de los $2n+1$ vértices, quedarán $2(2n+1)\binom{n}{2}$ triángulos. Pero cada triángulo lo hemos contado dos veces, una para cada vértice agudo. Luego la solución buscada es $(2n+1)\binom{n}{2}$.

Solución alternativa.
Fijemos el vértice obtuso en un vértice, por ejemplo, el A_1. Los tres lados del triángulo abarcarán respectivamente x, y y z lados del polígono de $2n+1$ lados. Será $x+y+z = 2n+1$. El lado opuesto al ángulo obtuso, digamos z, deberá cumplir $z \geq n+1$. Calculemos el número de soluciones enteras positivas de la ecuación $x+y+z = 2n+1$ con la condición fijada para la z.
Si $z = n+1$, queda $x+y = n$ que tiene $n-1$ soluciones. Si $z = n+2$, queda $x+y = n-1$ que tiene $n-2$ soluciones. ... Si $z = 2n-1$, queda $x+y = 1$ que tiene 1 solución.
En total hay

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

soluciones con el ángulo obtuso en A_1. Si consideramos las otras posibles posiciones para dicho ángulo queda en total

$$(2n+1)\binom{n}{2}.$$

B1.-

Sean a, b, c tres números reales positivos cuyo producto es 1. Demostrar que si la suma de estos números es mayor que la suma de sus recíprocos, entonces exactamente uno de ellos es mayor que 1.

Solución.

Dado que $abc = 1$ y $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, debe ser

$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)(c-1) &= abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1 \\ &= a + b + c - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) > 0\end{aligned}$$

La desigualdad anterior se cumple cuando uno de los factores del número

$$(a-1)(b-1)(c-1)$$

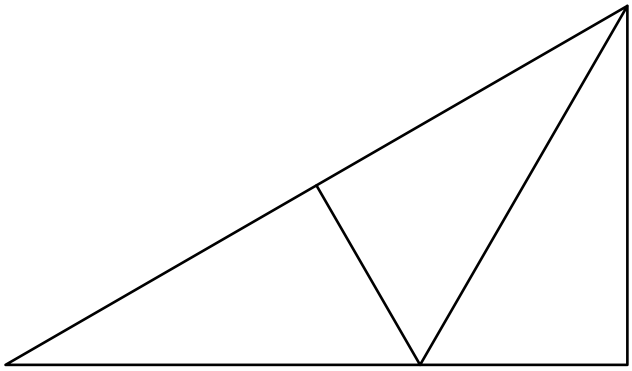
es positivo o los tres factores son positivos. Si fuesen los tres positivos, entonces tendríamos $a > 1, b > 1$ y $c > 1$ lo cual no es posible porque $abc = 1$. Por tanto, solo uno de ellos es positivo y esto completa la demostración.

B2.-

En un triángulo rectángulo de hipotenusa unidad y ángulos respectivos de $30°$, $60°$ y $90°$, se eligen 25 puntos cualesquiera. Demostrar que siempre habrá 9 entre ellos que podrán cubrirse con un semicírculo de radio $3/10$.

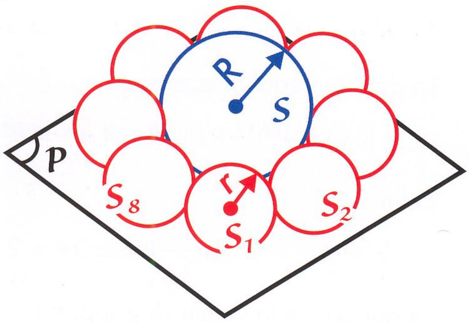
Solución.

Este triángulo tiene la propiedad que puede descomponerse en tres triángulos congruentes entre si y semejantes al triángulo inicial.



Como tenemos tres triágulos y 25 puntos, en alguno de ellos habrá al menos 9 puntos. La hipotenusa de cada uno de estos triángulos semejantes al inicial mide $\sqrt{3}/3$, y como son rectángulos, éstos están cubiertos por la mitad de su círculo circunscrito. Ahora el enunciado queda demostrado porque $r = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{3}{10}$.

B3.- Sea $\mathcal{S}$ una esfera tangente a un plano $\mathcal{P}$. Alrededor de $\mathcal{S}$ colocamos ocho esferas iguales $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, …, $\mathcal{S}_8$, tangentes entre sí, tangentes a $\mathcal{S}$ y tangentes a $\mathcal{P}$. Llamamos R al radio de $\mathcal{S}$ y r al radio común de las ocho esferas. Calcular el valor de la razón $\frac{r}{R}$.



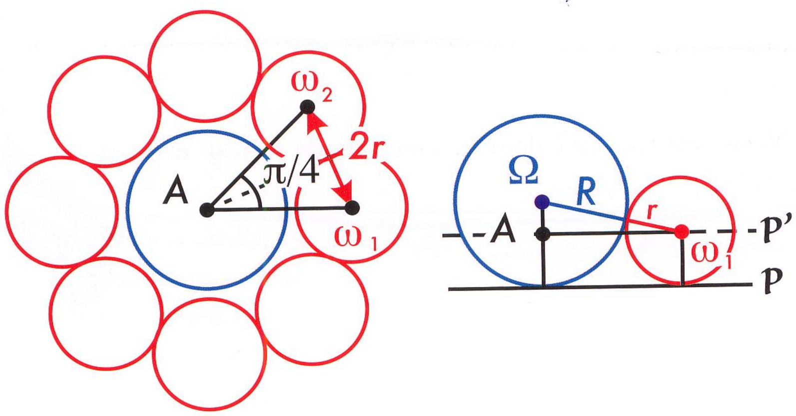
Solución.-

Llamemos $\mathcal{P}$' al plano paralelo a $\mathcal{P}$ que pasa por el centro de las ocho esferas idénticas.

Llamemos Ω al centro de la esfera $\mathcal{S}$. Llamemos ω_1 al centro de la esfera $\mathcal{S}_1$, ω_2 al de $\mathcal{S}_2$, … y ω_8 al de $\mathcal{S}_8$.

Si nos fijamos en la traza (intersección) de las nueve esferas del enunciado, obtenemos un collar de ocho circunferencias iguales tangentes dos a dos entre sí, rodeando sin contacto a una circunferencia central.

Si cortamos mediante un plano perpendicular a $\mathcal{P}$ que pase por Ω y ω_1, obtenemos dos circunferencias tangentes entre sí que son a su vez tangentes a una misma recta.



Como el triángulo de vértices Ω, A y ω_1 es rectángulo en A, es fácil ver que la distancia entre A y ω_1 es $2\sqrt{Rr}$.

En el triángulo isósceles de vértices A, ω_1 y ω_2, tenemos que $r = A\omega_1 sen\frac{\pi}{8} = 2\sqrt{Rr}sen\frac{\pi}{8}$ que elevando al cuadrado nos da $\frac{r}{R} = 4sen^2\frac{\pi}{8} = 2\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)$ Por lo tanto $\frac{r}{R} = 2-\sqrt{2}$