OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Local

Mañana del Viernes

1 *Hallar todas las soluciones enteras (x, y) de la ecuación*

$$y^k = x^2 + x$$

donde k es un número entero dado mayor que 1.

Solución. Puesto que $y^k = x^2 + x = x(x+1)$ y $mcd(x, x+1) = 1$ resulta que tanto $x+1$ como x deben ser potencias k-ésimas de un entero. Pero los dos únicos números enteros consecutivos que son potencias k-ésimas, con $k > 1$ son 0 y 1 o bien -1 y 0 (*). Las dos únicas soluciones son, pues, $x = 0, y = 0$ y $x = -1, y = 0$.

(*) La justificación de esta afirmación sale de

$$|(x+1)^k - x^k| = |x|\,|x^{k-1} + \cdots| > 1 \text{ si } |x| > 1 \text{ y } k > 1.$$

2 *Busca un polinomio de grado tres cuyas raíces sean, precisamente, el cuadrado de las raíces del polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$.*

Solución. Sean r, s y t las raíces, reales o complejas, del polinomio $p(x)$. Por tanto, $p(x) = (x-r)(x-s)(x-t)$. El polinomio que buscamos, salvo que multipliquemos por una constante, será de la forma $q(x) = (x - r^2)(x - s^2)(x - t^2)$. De aquí resulta

$$q(x^2) = (x^2-r^2)(x^2-s^2)(x^2-t^2) = (x-r)(x+r)(x-s)(x+s)(x-t)(x+t)$$

Y notando que

$$p(-x) = (-x-r)(-x-s)(-x-t) = -(x+r)(x+s)(x+t),$$

entonces

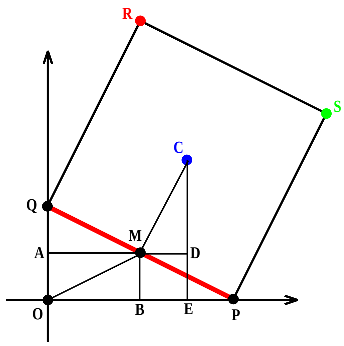
$$\begin{aligned} q(x^2) &= (x-r)(x+r)(x-s)(x+s)(x-t)(x+t) = p(x)[-p(-x)] \\ &= (x^3+2x^2+3x+4)(x^3-2x^2+3x-4) = x^6+2x^4-7x^2-16 \end{aligned}$$

Luego, $q(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 16$ es solución (y, también, este mismo polinomio multiplicado por una constante cualquiera).

3 *Deslizamos un cuadrado de* 10 *cm de lado por el plano* OXY *de forma que los vértices de uno de sus lados estén siempre en contacto con los ejes de coordenadas, uno con el eje* OX *y otro con el eje* OY*. Determina el lugar geométrico que en ese movimiento describen:*

1. *El punto medio del lado de contacto con los ejes.*
2. *El centro del cuadrado.*
3. *Los vértices del lado de contacto y del opuesto en el primer cuadrante.*

Solución. Sean $PQRS$ el cuadrado de lado 10 cm, PQ el lado de apoyo, $M(m_1, m_2)$ el punto medio de dicho lado y $C(c_1, c_2)$ el centro del cuadrado tal y como muestra la figura donde, además, señalamos los puntos A, B, D y E.



a) *Caso del punto medio* M*.*

$$OM = PM = \frac{1}{2}PQ = 5,$$

luego $m_1^2 + m_2^2 = 25$.

b) *Caso del centro del cuadrado* C*.*

Los triángulos AQM, AOM, BMO y DMC son claramente congruentes

$$AM = OB = DC, AQ = OA = MD = BM, \text{ y } OM = MQ = MC = 5.$$

Así, resulta que las coordenadas del centro del cuadrado, en su deslizamiento, son iguales

$$c_1 = OE = OB + BE = m_1 + MD = m_1 + m_2,$$

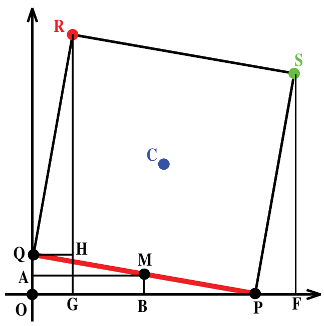
$$c_2 = EC = ED + DC = OA + AM = m_2 + m_1$$

Luego, el centro del cuadrado se mueve, en este primer cuadrante, sobre un segmento de la línea. Las posiciones extremas se dan cuando el lado PQ se apoya sobre alguno de los ejes, $C(5,5)$, y cuando forma una escuadra, esto es, un triángulo rectángulo isósceles, con ellos, $C(5\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$. Trabajando análogamente en los demás cuadrantes podemos afirmar que el centro del cuadrado recorre el segmento de sus bisectrices que viene dado por la expresión

$$C(c_1, c_2) = (\pm 5\lambda, \pm 5\lambda) \text{ con } \lambda \in [1, \sqrt{2}].$$

c) *Caso de los vértices del cuadrado en el lado de contacto: P y Q.*

Los vértices P y Q se mueven sobre segmentos de los ejes coordenados, esto es, de las líneas $x = 0$ y $y = 0$.



Los casos extremos se dan cuando el lado de contacto descansa sobre los ejes. Así: si las coordenadas de uno son $(0, \lambda)$, las del otro $(\pm\sqrt{100-\lambda^2}, 0)$ y si las coordenadas de uno son $(\lambda, 0)$, las del otro son $(0, \pm\sqrt{100-\lambda^2})$, con $\lambda \in [-10, 10]$.

d) *Caso de los vértices del cuadrado en el lado opuesto al de contacto: R y S.*

De nuevo, apoyándonos en la figura, por ser congruentes los triángulos OQP, QHR y PFS y, a la vez, semejantes a AQM:

$$R(r_1, r_2) r_1 = 2m_2 r_2 = 2m_1 + m_2$$

de donde $m_1 = \frac{r_2 - r_1}{2}$, $m_2 = r_1/2$. Como sabemos que $m_1^2 + m_2^2 = 25$, tenemos para R

$$(\frac{r_2 - r_1}{2})^2 + (\frac{r_1}{2})^2 = 25$$

o bien $(r_2 - r_1)^2 + r_1^2 = 100$. El lugar geométrico está, pues, en la elipse de ecuación $(y - x)^2 + x^2 = 100$ y es un arco de elipse que se puede parametrizar como

$$y = x + \sqrt{100 - x^2}$$

con $x \in [0, 10]$ e $y \in [10, 10\sqrt{2}]$. Análogamente, para S sale el arco de elipse $y^2 + (x - y)^2 = 100$ con

$$x = y + \sqrt{100 - y^2}$$

con $y \in [0, 10]$ y $x \in [10, 10\sqrt{2}]$.

En los demás cuadrantes sale de forma parecida:

Segundo cuadrante:

$$y = -x + \sqrt{100 - x^2}$$

con $x \in [-10, 0]$ e $y \in [10, 10\sqrt{2}]$.

$$x = -y - \sqrt{100 - y^2}$$

con $y \in [0, 10]$ y $x \in [-10\sqrt{2}, -10]$.

Tercer cuadrante:

$$y = x - \sqrt{100 - x^2}$$

con $x \in [-10, 0]$ e $y \in [-10, -10\sqrt{2}]$.

$$x = y - \sqrt{100 - y^2}$$

con $x \in [-10, 0]$ e $y \in [-10\sqrt{2}, -10]$.

Cuarto cuadrante:

$$y = -x - \sqrt{100 - x^2}$$

con $x \in [0, 10]$ e $y \in [-10, -10\sqrt{2}]$.

$$x = -y + \sqrt{100 - y^2}$$

con $y \in [-10, 0]$ y $x \in [10, 10\sqrt{2}]$.

4 *Calcula la suma de los inversos de los dos mil trece primeros términos de la sucesión de término general*

$$a_n = 1 - \frac{1}{4n^2}$$

Solución. El término general se puede escribir como

$$a_n = \frac{4n^2 - 1}{4n^2} = \frac{(2n-1)(2n+1)}{4n^2}$$

y su inverso es

$$\frac{1}{a_n} = \frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n-1} + \frac{n}{2n+1}$$

Hemos de calcular

$$S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{2012}} + \frac{1}{a_{2013}}$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{2012}{4023} + \frac{2012}{4025}\right) + \left(\frac{2013}{4025} + \frac{2013}{4027}\right)$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{2012}{4025} + \frac{2013}{4025}\right) + \frac{2013}{4027}$$

$$= 2013 + \frac{2013}{4027} = 2013\left(1 + \frac{1}{4027}\right) = \frac{8108364}{4027} \simeq 2013.5$$

5 *Obtén los dos valores enteros de x más próximos a $2013°$, tanto por defecto como por exceso, que cumplen esta ecuación trigonométrica*

$$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 2\sqrt{2}$$

Solución. Aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica resulta

$$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} \geq 2\sqrt{2^{\sin^2 x} \cdot 2^{\cos^2 x}} = 2\sqrt{2^{\sin^2 x + \cos^2 x}} = 2\sqrt{2}$$

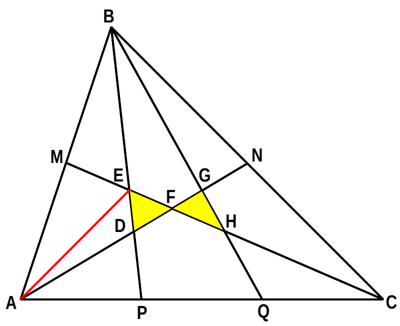
La igualdad se alcanza cuando $2^{\sin^2 x} = 2^{\cos^2 x}$. Es decir, cuando $\sin^2 x = \cos^2 x$ o $\sin x = \pm \cos x$. Los valores de x que satisfacen la igualdad anterior son $x = 45^\circ + 90^\circ k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Los valores pedidos se obtienen para

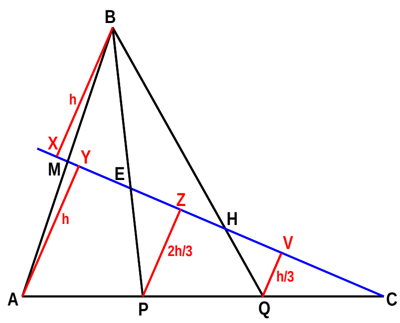
$$k_1 = \left[\frac{2013^\circ - 45^\circ}{90}\right] = 21 \quad \text{y} \quad k_1 = \left[\frac{2013^\circ + 45^\circ}{90}\right] = 22$$

y son $x_1 = 1935^\circ$ y $x_2 = 2025^\circ$.

6 *Por los puntos medios de dos lados de un triángulo ABC trazamos las medianas y unimos los puntos que trisecan el tercer lado con el vértice opuesto. Así, en el interior, se obtiene una pajarita (dos triángulos unidos por un vértice). Se pide calcular la fracción de superficie total del triángulo que representa la pajarita.*

Solución. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el área del triángulo ABC es uno. Es decir, $[ABC] = 1$. Tenemos





Las medianas dividen al triángulo en seis partes de igual área, luego: $[AMF] = [FNC] = \frac{1}{6}$ y $[AFC] = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Trazamos, desde B, A, P y Q, perpendiculares sobre la mediana CM y sean X, Y, Z y V sus respectivos pies tal y como muestra la figura de la derecha. En esta figura se tiene trabajando con la mediana CM :

- $AMY \equiv BMX$. Como $AM = MB$ entonces $AY = XB = h$.
- $AYC \cong PZC \cong QVC$. Como $AP = PQ = QC$, entonces $PZ = \frac{2}{3}h$ y $QV = \frac{1}{3}h$.

- $PEZ \cong XBE$. Como $PZ = \frac{2}{3}XB \to PE = \frac{2}{3}EB \to PE = \frac{2}{5}PB$ y $EB = \frac{3}{5}PB$.
- $QHV \cong XBH$. Como $QV = \frac{1}{3}QB \to QH = \frac{1}{3}HB \to QH = \frac{1}{4}QB$

Y trabajando, análogamente[1], sobre la otra mediana AN, se obtiene

$$QG = \frac{2}{5}QB \quad GB = \frac{3}{5}QB \quad \text{y} \quad PD = \frac{1}{4}PB$$

Nos fijamos, por ejemplo, en la ceviana PB y ya podemos conocer la proporción en que los puntos D y E la dividen. Falta

$$DE = PE - PD = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right) PB = \frac{3}{20}PB$$

Por tanto,

$$PD = \frac{5}{20}PB \quad DE = \frac{3}{20}PB \quad \text{y} \quad EB = \frac{12}{20}PB$$

Ahora dibujamos la línea auxiliar AE. Sobre la ceviana PB, ABP de área conocida queda dividido en tres triángulos, ABE, AED y ADP, de idéntica altura. Por tanto,

$$\frac{[ADP]}{[ABP]} = \frac{PD}{PB} = \frac{5}{20}, \quad \frac{[AED]}{[ABP]} = \frac{DE}{PB} = \frac{3}{20}, \quad \frac{[ABE]}{[ABP]} = \frac{EB}{PB} = \frac{12}{20}$$

De

$$[ABP] = \frac{1}{3} \to [ADP] = \frac{5}{60}, \quad [AED] = \frac{3}{60} \quad \text{y} \quad [ABE] = \frac{12}{60}$$

Por otro lado, como EM es mediana del triángulo ABE, se tiene $[AME] = \frac{1}{2}[ABE] = \frac{6}{60}$. Finalmente,

$$\frac{1}{6} = [AMF] = [AME] + [AED] + [DEF] = \frac{6}{60} + \frac{3}{60} + [DEF]$$

de donde resulta el área de media pajarita. Es decir, $[DEF] = \frac{1}{60}$. Análogamente, $[FGH] = \frac{1}{60}$, y el área pedida es

$$[DEF] + [FGH] = \frac{1}{30} = \frac{1}{30}[ABC]$$

[1]Todo esto es equivalente a aplicar el Teorema de Menelao sobre las transversales de un triángulo