XLIV Olimpiada Matemática Española

Fase aragonesa

18 de enero de 2008

Problema 1

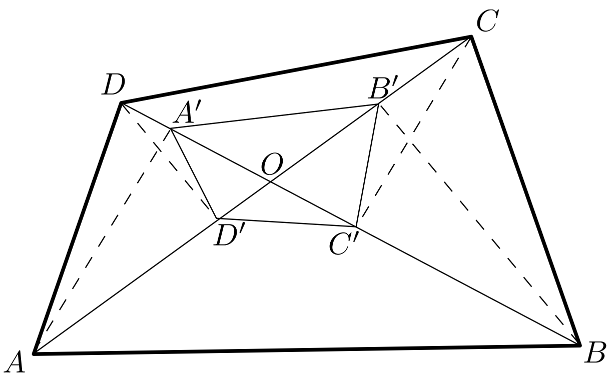
Sea $\mathcal{P}$ una familia de puntos en el plano tales que por cada cuatro puntos de $\mathcal{P}$ pasa una circunferencia. ¿Se puede afirmar que necesariamente todos los puntos de $\mathcal{P}$ están en la misma circunferencia? Justifica la respuesta.

Solución: Fijamos tres puntos cualesquiera p_1, p_2, p_3 de $\mathcal{P}$. Existe una única circunferencia $\mathcal{C}$ que pasa por ellos: la circunferencia circunscrita al triángulo que forman. Dado cualquier otro punto p de $\mathcal{P}$, hay una circunferencia que pasa por los puntos p_1, p_2, p_3, p, y ésta ha de ser necesariamente $\mathcal{C}$. Por tanto, todo los puntos de $\mathcal{P}$ están en $\mathcal{C}$.

Problema 2

En un cuadrilátero convexo se trazan las perpendiculares desde cada vértice a la diagonal que no pasa por él. Demuestra que los cuatro puntos de intersección de cada perpendicular con su correspondiente diagonal forman un cuadrilátero semejante al dado.

Solución: Dado un cuadrilátero $ABCD$ como en la figura, sea O el punto de corte de las diagonales y denotemos por A', B', C' y D' los puntos de corte de las perpendiculares desde A, B, C y D, respectivamente, a la diagonal correspondiente. Basta ver que, por ejemplo, los triángulos OCD y $OC'D'$ son semejantes.



Los ángulos $\widehat{COC'}$ y $\widehat{DOD'}$ son iguales, y los ángulos $\widehat{CC'O}$ y $\widehat{DD'O}$ son rectos, luego los triángulos $OC'C$ y $OD'D$ son semejantes y, por tanto, se tiene la relación:

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD},$$

que muestra que los triángulos $OC'D'$ y OCD son semejantes, como deseábamos.

Problema 3

Halla las soluciones reales de la ecuación $x\left(\dfrac{6-x}{x+1}\right)\left(\dfrac{6-x}{x+1}+x\right)=8$.

Solución: Sea $y=\dfrac{6-x}{x+1}$, lo que equivale a $xy=6-(x+y)$. La ecuación del enunciado se convierte en

$$xy(x+y)=8,$$

y sustituyendo xy por $6-(x+y)$ queda

$$\big(6-(x+y)\big)(x+y)=8,$$

que es una ecuación de grado 2 en $x+y$ con soluciones $x+y=4$ y $x+y=2$.

- Si $x+y=4$, entonces $xy=2$, esto es, $x(6-x)=2(x+1)$, o bien $x^2-4x+2=0$, que tiene como raíces $2\pm\sqrt{2}$.
- Si $x+y=4$, entonces $xy=4$, esto es, $x(6-x)=4(x+1)$, o bien $x^2-2x+4=0$, que no tiene raíces reales.

Así pues, las soluciones reales son $2+\sqrt{2}$ y $2-\sqrt{2}$.

Problema 4

Demuestra que $2222^{5555}+5555^{2222}$ es múltiplo de 7.

Solución: Dividiendo 2222 por 7 obtenemos $2222=7\times317+3$, luego $2222=3+\dot{7}$ (3 más un múltiplo de 7). Por tanto

$$2222^{5555}=(3+\dot{7})^{5555}=3^{5555}+\dot{7}.$$

Análogamente, $5555=7\times794-3=-3+\dot{7}$, luego

$$5555^{2222}=3^{2222}+\dot{7}.$$

Ahora, $3^1=3$, $3^2=9=2+\dot{7}$, $3^3=3\times(2+\dot{7})=6+\dot{7}$, $3^4=4+\dot{7}$, $3^5=5+\dot{7}$, $3^6=1+\dot{7}$. Así:

$$\begin{aligned}3^{5555}&=3^{6\times925+5}=\left(3^6\right)^{925}\times3^5=(1+\dot{7})\times(5+\dot{7})=5+\dot{7},\\3^{2222}&=3^{6\times370+2}=\left(3^6\right)^{370}\times3^2=(1+\dot{7})\times(2+\dot{7})=2+\dot{7}.\end{aligned}$$

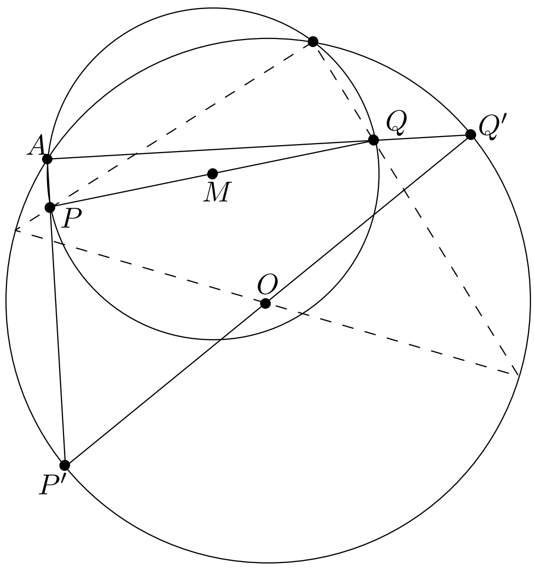
Por tanto,

$$2222^{5555}+5555^{2222}=3^{5555}+3^{2222}+\dot{7}=(5+\dot{7})+(2+\dot{7})+\dot{7}=\dot{7}.$$

Problema 5

Dada una circunferencia y dos puntos P y Q en su interior, inscribir un triángulo rectángulo cuyos catetos pasen por P y Q. ¿Para qué posiciones de P y Q el problema no tiene solución?

Solución: Sea O el centro de la circunferencia dada $\mathcal{C}$ y sea M el punto medio de P y Q. Tracemos la circunferencia $\mathcal{D}$ de centro M pasando por P y Q.



Los puntos R para los que el ángulo $\widehat{PRQ}$ es recto son los puntos de esta circunferencia $\mathcal{D}$, por tanto si A es un punto de intersección de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, prolongando los segmentos AP y AQ hasta cortar con $\mathcal{C}$ en P' y Q' se obtiene el triángulo rectángulo $AP'Q'$.

No existe solución si ambas circunferencias no se cortan, esto es si $OM + \frac{1}{2}PQ$ es menor que el radio de $\mathcal{C}$.

Problema 6

Sean a, b, c tres números positivos de suma uno. Demuestra que

$$a^{a^2+2ca} b^{b^2+2ab} c^{c^2+2bc} \geq \frac{1}{3}.$$

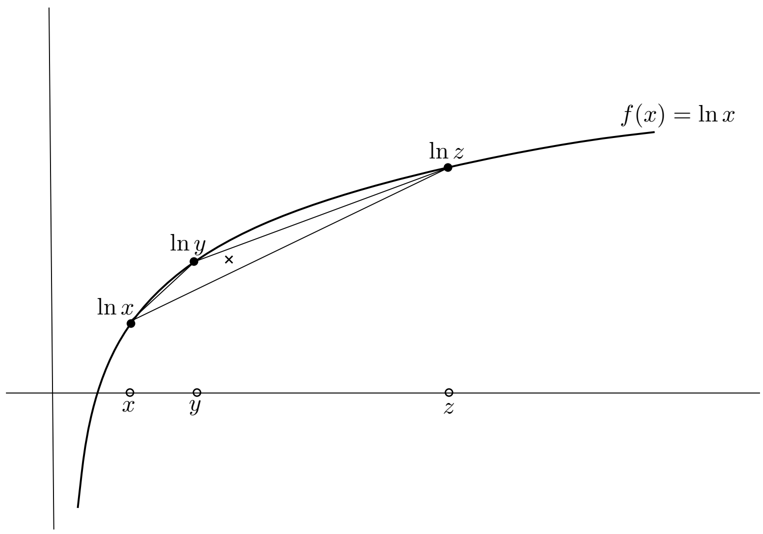
Solución: La desigualdad que debemos probar equivale a:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{a^2+2ca} \left(\frac{1}{b}\right)^{b^2+2ab} \left(\frac{1}{c}\right)^{c^2+2bc} \leq 3,$$

o bien, tomando logaritmos neperianos, a:

$$(a^2+2ca)\ln\left(\frac{1}{a}\right) + (b^2+2ab)\ln\left(\frac{1}{b}\right) + (c^2+2bc)\ln\left(\frac{1}{c}\right) \leq \ln(3).$$

Ahora bien, como la función logaritmo neperiano es cóncava, si x, y, z, α, β, γ son números positivos con $\alpha+\beta+\gamma = 1$, el punto del plano de coordenadas $\alpha(x, \ln(x)) + \beta(y, \ln(y)) + \gamma(z, \ln(z))$ está en el interior del triángulo de vértices $(x, \ln(x)), (y, \ln(y)), (z, \ln(z))$, y este triángulo está por debajo de la gráfica de la función.



Por tanto $\alpha\ln(x) + \beta\ln(y) + \gamma\ln(z) \leq \ln(\alpha x + \beta y + \gamma z)$.
Como $(a^2+2ca) + (b^2+2ab) + (c^2+2bc) = (a+b+c)^2 = 1$, se tiene:

$$\begin{aligned}
(a^2+2ca)\ln\left(\frac{1}{a}\right) &+ (b^2+2ab)\ln\left(\frac{1}{b}\right) + (c^2+2bc)\ln\left(\frac{1}{c}\right) \\
&\leq \ln\Big((a^2+2ca)\frac{1}{a} + (b^2+2ab)\frac{1}{b} + (c^2+2bc)\frac{1}{c}\Big) \\
&= \ln\big((a+2c) + (b+2a) + (c+2b)\big) \\
&= \ln\big(3(a+b+c)\big) = \ln(3),
\end{aligned}$$

como deseábamos.