XLII Olimpiada Matemática Española

Fase aragonesa

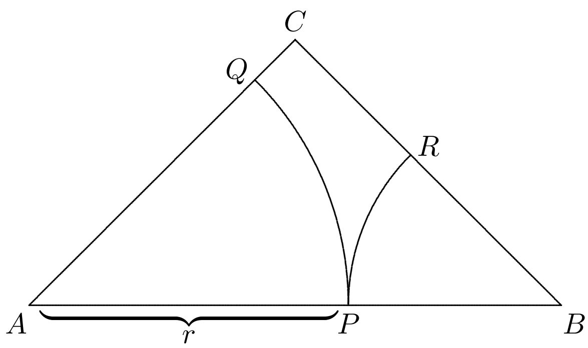
20 de enero de 2006

Problema 1

Se da un triángulo rectángulo isósceles ABC, con el ángulo recto en C, y los catetos de longitud 2. Un arco de círculo l con centro A divide al triángulo en dos partes de la misma área, mientras que el arco de círculo m con centro en B es tangente al arco l en un punto de la hipotenusa AB.

Hallar el área de la porción del triángulo no cubierta por los sectores circulares correspondientes a los dos arcos.

Solución: Sea r el radio del arco l y P su punto de corte con la hipotenusa, como en la figura.



Puesto que el área del sector circular APQ es $\frac{1}{8}\pi r^2$ y el área del triángulo es $\frac{1}{2}2 \times 2 = 2$, por hipótesis,

$$\frac{1}{8}\pi r^2 = 1, \quad \text{luego} \quad r = \sqrt{\frac{8}{\pi}}.$$

La diagonal AB mide $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$, luego el segmento PB mide $\sqrt{8}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big)$. Así, el área del sector circular BPR es

$$\frac{1}{8}\pi \left(\sqrt{8}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big)\right)^2 = \big(\sqrt{\pi} - 1\big)^2.$$

Así, la solución es

$$S = 2 - 1 - \big(\sqrt{\pi} - 1\big)^2 = 2\sqrt{\pi} - \pi.$$

Problema 2

Se suponen conocidas las raíces reales de las n ecuaciones de segundo grado que se indican en el siguiente cuadro:

Ecuación	*raíces*
$x^2 + a_1x + b_1 = 0$	x_0, x_1
$x^2 + a_2x + b_2 = 0$	x_0, x_2
$\vdots$	$\vdots$
$x^2 + a_nx + b_n = 0$	x_0, x_n

Encontrar, razonadamente, las raíces de la ecuación

$$x^2 + \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} x + \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} = 0.$$

Solución: Puesto que x_0 y x_i son las raíces de la ecuación $x^2+a_ix+b_i = 0$, se tiene $x^2 + a_ix + b_i = (x - x_0)(x - x_i)$, de donde

$$x_0 + x_i = -a_i, \quad x_0x_i = b_i \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Sumando para $i = 1, \ldots, n$ se obtiene

$$\begin{aligned} nx_0 + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) &= -(a_1 + a_2 + \cdots + a_n), \\ x_0(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} x_0 + \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} &= -\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \\ x_0\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} &= \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}. \end{aligned}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación dada son

$$x_0 \quad \text{y} \quad \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Problema 3

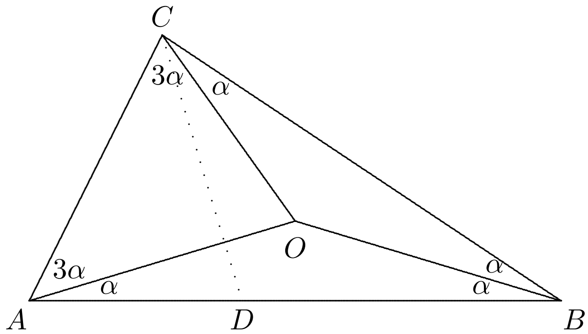
En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior CD. Se sabe que el centro del círculo inscrito en el triángulo BCD coincide con el centro del círculo circunscrito del triángulo ABC.

Calcular los ángulos del triángulo ABC.

Solución: Sea O el centro común del enunciado, y sea α el ángulo $\widehat{ABO}$ (vértice en B). Por ser O el centro del círculo inscrito en el triángulo BCD, OB es la bisectriz del ángulo $\widehat{ABC}$, luego $\widehat{CBO} = \alpha$.

Las longitudes de los segmentos OA, OB y OC coinciden, por ser O el centro del ángulo circunscrito, luego los triángulos OBC, OCA y OAB son isósceles. En particular, $\widehat{OCB} = \alpha = \widehat{OAB}$ y $\widehat{OCA} = \widehat{OAC}$.

Ahora, OC es la bisectriz de $\widehat{BCD}$, luego $\widehat{OCD} = \alpha = \widehat{OCB}$; mientras que CD es la bisectriz de $\widehat{BCA}$, luego $\widehat{ACD} = \widehat{DCB} = \widehat{OCD} + \widehat{OCB} = 2\alpha$. Así, $\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = 3\alpha$.



Como la suma de los ángulos del triángulo ABC resulta ser 10α, se tiene $\alpha = 18°$. Por tanto,

$$\widehat{ABC} = 2\alpha = 36° \quad \text{y} \quad \widehat{ACB} = \widehat{BAC} = 4\alpha = 72°.$$

Problema 4

Encontrar, razonadamente, dos números enteros positivos a y b, tales que

b^2 sea múltiplo de a,
a^3 sea múltiplo de b^2,
b^4 sea múltiplo de a^3,
a^5 sea múltiplo de b^4,
pero b^6 no sea múltiplo de a^5.

Solución: Si a y b son una solución y $p_1, \ldots, p_r$ son los primos que aparecen en las factorizaciones de a y b, entonces

$$a = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}, \quad b = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r} \quad (n_i, m_i \geq 0 \ \forall i).$$

Las condiciones del enunciado se traducen en

$$\begin{array}{l} n_i \leq 2m_i \leq 3n_i \leq 4m_i \leq 5n_i \quad \forall i = 1, \ldots, r, \text{ y} \\ \text{existe } j \text{ entre } 1 \text{ y } r \text{ tal que } 6m_j < 5n_j. \end{array}$$

En esta situación, los números $a' = p_j^{n_j}$ y $b' = p_j^{m_j}$ también verifican las hipótesis. Así pues, basta buscar soluciones que sean potencias de un mismo número primo: $a = p^n$, $b = p^m$; que deben de satisfacer

$$n \leq 2m \leq 3n \leq 4m \leq 5n, \quad 6m < 5n$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{m}{n} \geq \frac{1}{2}, \ \frac{m}{n} \leq \frac{3}{2}, \ \frac{m}{n} \geq \frac{3}{4}, \ \frac{m}{n} \leq \frac{5}{4}, \text{ y } \frac{m}{n} < \frac{5}{6}.$$

Como $\frac{5}{6} \leq \frac{5}{4} \leq \frac{3}{2}$ y $\frac{3}{4} \geq \frac{1}{2}$, estas condiciones se resumen en

$$\frac{3}{4} \leq \frac{m}{n} < \frac{5}{6}.$$

Los valores más pequeños de m y n que verifican esto son $m = 3$ y $n = 4$, luego la solución más pequeña es

$$a = 2^4 = 16 \quad \text{y} \quad b = 2^3 = 8.$$

Problema 5

Un número positivo x verifica la relación

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7.$$

Demostrar que

$$x^5 + \frac{1}{x^5}$$

es entero y calcular su valor.

Solución: Puesto que

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 7 + 2 = 9,$$

y $x > 0$, concluimos que $x + \frac{1}{x} = 3$. Entonces,

$$21 = 3 \times 7 = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^3 + \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x^3} = 3 + x^3 + \frac{1}{x^3},$$

luego $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$. Además,

$$126 = 7 \times 18 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = x^5 + \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x^5} = 3 + x^5 + \frac{1}{x^5}.$$

Por tanto,

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = 123.$$

Problema 6

Se considera la inecuación

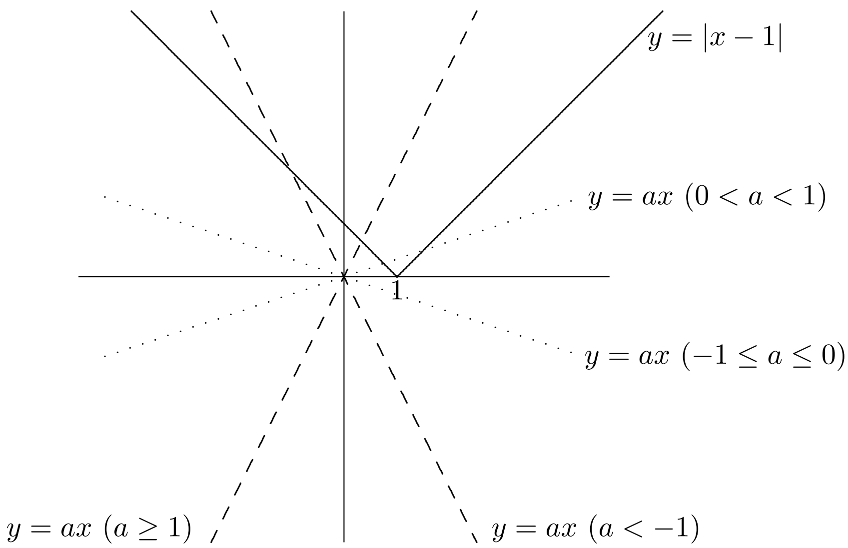
$$|x-1| < ax,$$

donde a es un parámetro real.

a) Discutir la inecuación según los valores de a.

b) Caracterizar los valores de a para los cuales la inecuación tiene exactamente DOS soluciones enteras.

Solución: Buscamos, para cada valor de a, los valores de x tales que la gráfica de $y = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1-x & \text{si } x < 1 \end{cases}$ está por debajo de la gráfica de $y = ax$.



Tenemos entonces la siguiente tabla, que resuelve el apartado a):

a	puntos de corte	soluciones de $\|x-1\| < ax$
$a \geq 1$	$1-x = ax \ \Rightarrow\ x = \frac{1}{1+a}$	$x > \frac{1}{1+a}$
$0 < a < 1$	$\begin{cases} 1-x = ax & x = \frac{1}{1+a} \\ x-1 = ax & x = \frac{1}{1-a} \end{cases}$	$\frac{1}{1+a} < x < \frac{1}{1-a}$
$-1 \leq a \leq 0$	no hay (salvo $(1,0)$ para $a=0$)	no hay
$a < -1$	$1-x = ax \ \Rightarrow\ x = \frac{1}{1+a}$	$x < \frac{1}{1+a}$

Por tanto, para que haya un número finito de soluciones enteras ha de ser $0 < a < 1$. Las soluciones enteras están estrictamente entre $\frac{1}{1+a}$ (que está entre 0 y 1) y $\frac{1}{1-a}$ (que es > 1). Así 1 siempre es solución entera. Para que haya sólo otra solución entera ha de ser $2 < \frac{1}{1-a} \leq 3$. Esto es,

$$\frac{1}{2} < a \leq \frac{2}{3}.$$