XLIII Olimpiada Matemática Española

Fase aragonesa

19 de enero de 2007

Problema 1

Un poliedro convexo tiene por caras 12 cuadrados, 8 hexágonos regulares y 6 octógonos regulares. En cada vértice del poliedro concurren exactamente un cuadrado, un hexágono y un octógono. ¿Cuántos segmentos que unen pares de vértices del poliedro son interiores al mismo, es decir, no son aristas ni están contenidos en una cara?

Solución: Sea V el número de vértices, A el número de aristas, D el número de diagonales sobre las caras, e I el número de diagonales interiores, que es el número a determinar.

Puesto que cada vértice del poliedro está exactamente en una cara cuadrada, el número de vértices es

$$V = 4 \times 12 = 48 \text{ vértices.}$$

Puesto que de cada vértice salen exactamente 3 aristas, y cada arista une dos vértices, el número de aristas es

$$A = \frac{3V}{2} = 72.$$

Como cada cuadrado tiene dos diagonales, cada hexágono tiene 9 y cada octógono tiene 20, hay

$$D = 12 \times 2 + 8 \times 9 + 6 \times 20 = 216 \text{ diagonales sobre las caras.}$$

Así pues, el número pedido I es igual al total de segmentos que se pueden formar uniendo pares de vértices de todas las formas posibles, menos el número de aristas y el número de diagonales sobre las caras:

$$I = \binom{48}{2} - A - D = 24 \times 47 - 72 - 216 = 24 \times (47 - 3 - 9) = 840.$$

Problema 2

Resolver, en el conjunto de los números reales, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \end{cases}$$

Solución: La primera ecuación se puede escribir como $y^3 = 6(x-1)^2 + 2$, luego ha de ser $y > 0$, y análogamente $x, z > 0$.

Sumando las tres ecuaciones, y teniendo en cuenta que $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3$, se obtiene:

$$(x-2)^3 + (y-2)^3 + (z-2)^3 = 0, \qquad (*)$$

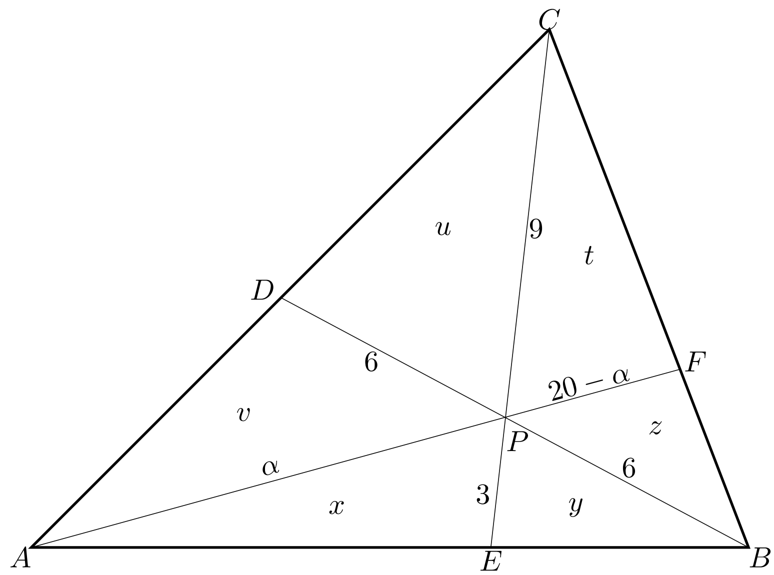
luego, o bien $x = y = z = 2$ (que se comprueba inmediatamente que es una solución), o bien al menos una de las variables toma un valor < 2. Podemos suponer que $x < 2$. Entonces $y^3 = 6x(x-2) + 8 < 8$, luego $y < 2$, y también $z^3 = 6y(y-2) + 8 < 8$ y $z < 2$. Esto contradice (*).

Se concluye que la única solución es $x = y = z = 2$.

Problema 3

Sea ABC un triángulo y D, E, F puntos situados en los segmentos AC, BA y CB respectivamente, de forma que los segmentos AF, BD, CE concurren en un punto P interior al triángulo. Sabemos que $BP = 6$, $PD = 6$, $PC = 9$, $PE = 3$ y $AF = 20$. Hallar el área del triángulo ABC.

Solución: En el siguiente dibujo, las letras x, y, z, t, u y v denotan las áreas de los seis triángulos pequeños en que queda dividido el triángulo ABC:



Ahora se tiene:

- área(PDC) = área(PBC), por tener igual base y altura,
- área(PDA) = área(PBA), análogamente,
- área$(PAC) = 3\,$área(PEA), por tener misma altura y triple base en PAC,
- área$(PCB) = 3\,$área(PEB), análogamente,
- área$(PAC) = \frac{\alpha}{20-\alpha}$ área(PEC), por tener misma altura y bases en proporción $\frac{\alpha}{20-\alpha}$,
- área$(PBA) = \frac{\alpha}{20-\alpha}$ área(PFB), por la misma razón.

Esto es,

$$u = t + z, \tag{1}$$

$$v = x + y, \tag{2}$$

$$u + v = 3x, \tag{3}$$

$$t + z = 3y, \tag{4}$$

$$u + v = \frac{\alpha}{20-\alpha} t, \tag{5}$$

$$x + y = \frac{\alpha}{20-\alpha} z. \tag{6}$$

Si S denota el área del triángulo ABC, entonces:

$$S = (x+y)+(z+t)+(u+v) = 2(u+v) \quad \text{por (1) y (2),}$$
$$S = (x+y)+(z+t)+(u+v) = 4(x+y) \quad \text{por (3) y (4),}$$
$$S = (x+y)+(z+t)+(u+v) = \left(\frac{\alpha}{20-\alpha}+1\right)(t+z)$$
$$= \frac{20}{20-\alpha}(t+z) \quad \text{por (5) y (6).}$$

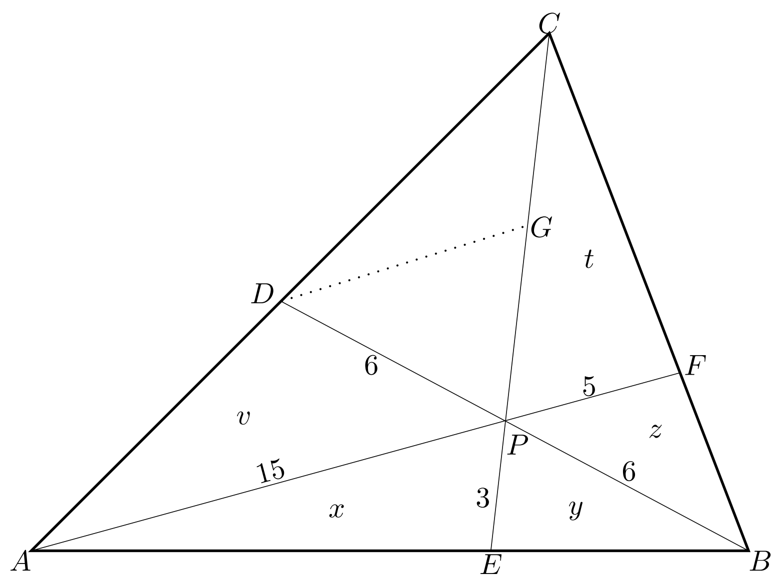
De (1) y (2) se obtiene que $u+v = (x+y)+(z+t)$, luego

$$\frac{S}{2} = \frac{S}{4} + \frac{(20-\alpha)S}{20}.$$

Multiplicando por $\frac{20}{S}$ obtenemos $10 = 5 + (20-\alpha)$, de donde $\alpha = 15$. Así, $S = \frac{20}{20-15}(t+z) = 4(t+z)$, luego $x+y = \frac{S}{4} = t+z$. Las ecuaciones (1) y (2) nos dan $u = v$.

Tenemos entonces que los triángulos PDC y PDQ tienen la misma área y altura desde AC, luego los segmentos AD y DC son iguales.

Trazando ahora una paralela DG a AP:



se obtiene

$$DC = \frac{1}{2}AD \quad \text{luego} \quad GC = \frac{1}{2}PC = \frac{9}{2} \quad \text{y} \quad DG = \frac{1}{2}AP = \frac{15}{2}.$$

Así, el triángulo DGP tiene lados 6, $\frac{9}{2}$ y $\frac{15}{2}$, luego es rectángulo, ya que $6^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2$, con ángulo recto en P.

Por tanto el área del triángulo PGD es $\frac{1}{2}\cdot 6 \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$. Además, como la longitud del segmento PC es doble de la de PG, $u = \text{área}(PCD) = 2\,\text{área}(PGD) = 27$, y $S = 2(u+v) = 4u = 108$.

Problema 4

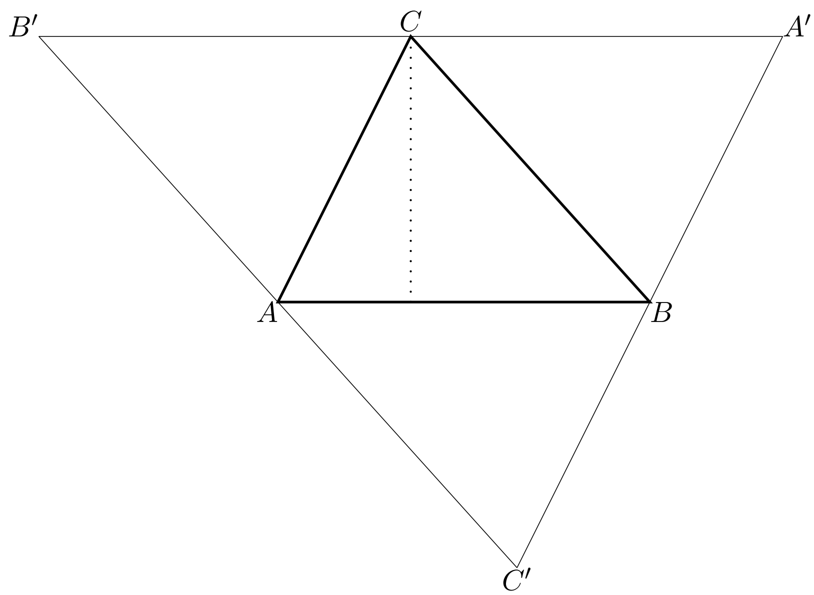
Demostrar que es imposible obtener un cubo yuxtaponiendo tetraedros regulares, todos del mismo tamaño.

Solución: Si fuera posible, la cara superior del cubo (un cuadrado) se obtendría yuxtaponiendo triángulo equiláteros, todos del mismo tamaño. Pero un ángulo recto (la esquina del cuadrado) no se puede obtener sumando ángulos de 60 grados (los ángulos de un triángulo equilátero).

Problema 5

Demostrar que, en un triángulo, la distancia de un vértice cualquiera al ortocentro es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto a ese vértice.

Solución: Dado un triángulo ABC, dibujamos triángulos auxiliares girando ABC 180 grados alrededor del centro de cada uno de sus lados:



La altura por C del triángulo ABC es la mediatriz del triángulo $A'B'C'$ correspondiente al lado $A'B'$. Así, el ortocentro de ABC es el circumcentro de $A'B'C'$.

Como $A'B'C'$ es semejante a ABC, donde todas las longitudes se han multiplicado por 2, la distancia del circumcentro de $A'B'C'$ al lado $A'B'$ (esto es, la distancia del ortocentro de ABC a C) es el doble de la distancia del circumcentro de ABC al lado AB.

Problema 6

Hallar todas las soluciones reales de la ecuación

$$3^{x^2-x-y} + 3^{y^2-y-z} + 3^{z^2-z-x} = 1.$$

Solución: Veamos primero que si a, b y c son números reales positivos tales que $a+b+c=1$, entonces $abc \leq \frac{1}{27}$*. En efecto, notemos primero que si u y v son números reales positivos, entonces $4uv = (u+v)^2 - (u-v)^2 \leq (u+v)^2$. Si $a=b=c$, la desigualdad es obvia. En otro caso se puede suponer que $a = \frac{1}{3} - \alpha$ y $b = \frac{1}{3} + \beta$, con $\alpha, \beta > 0$. Por lo anterior,

$$4\left(\frac{1}{3} - \alpha + \beta\right) c \leq \left(\frac{1}{3} - \alpha + \beta + c\right)^2 = \left(a + b + c - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

Así,

$$\begin{aligned} abc &= \frac{1}{3}(1-3\alpha)\Big(\frac{1}{3}+\beta\Big)c = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{3} - \alpha + \beta - 3\alpha\beta\Big)c \\ &\leq \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{3} - \alpha + \beta\Big)c \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27}. \end{aligned}$$

Por tanto, si $3^{x^2-x-y} + 3^{y^2-y-z} + 3^{z^2-z-x} = 1$, se tiene

$$3^{x^2-x-y+y^2-y-z+z^2-z-x} \leq \frac{1}{27} = 3^{-3},$$

que equivale a

$$3^{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2} \leq 1.$$

La única posibilidad es que se tenga $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 0$, luego necesariamente $x=y=z=1$. Es claro que esto es una solución de la ecuación dada y, por tanto, es la única solución posible.

*Esto es también consecuencia inmediata de la desigualdad entre las medias aritméticas y geométricas de números positivos.