# Fase aragonesa de la
# LXI Olimpiada Matemática Española

Primera etapa (10 de enero de 2025)

**1.** Diremos que un número natural de 6 cifras (esto es, entre 100.000 y 999.999) es *majico* si el número formado por sus tres últimas cifras es uno más que el número formado por sus tres primeras cifras. Por ejemplo, 102.103 es majico.

Halla un número majico que sea también un cuadrado perfecto (esto es, que sea el cuadrado de algún número natural). Explica el proceso que sigues para hallarlo.

**Solución:** Sea $a$ el número formado por las tres primeras cifras de un número majico. El número majico es entonces $n = 1000a + (a+1) = 1001a + 1$. Deseamos encontrar $a$ de modo que se verifique $n = 1001a + 1 = b^2$ para algún número natural $b$ (menor que 1000). Esto es,

$$1001a = b^2 - 1 = (b-1)(b+1).$$

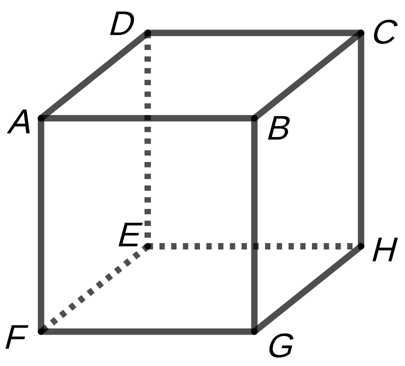
Como $1001 = 7 \times 11 \times 13$, los primos 7, 11 y 13 tienen que dividir a $b-1$ o a $b+1$.

Si, por ejemplo, 11 y 13 dividen a $b+1$ y 7 divide a $b-1$, se tiene $b = 143 \times m - 1$ para algún $m$ y 7 divide a $b - 1 = 143 \times m - 2$. Como 140 es múltiplo de 7, esto significa que 7 divide a $3 \times m - 2$.

Podemos tomar $m = 3$, pues $3 \times 3 - 2 = 7$, obteniendo $b = 143 \times 3 - 1 = 428$ y $n = 428^2 = 183.184$, que es un número majico. $\square$

**2.** En el cubo de lado 1 metro de la derecha, con vértices $A, B, C, D, E, F, G, H$, considera los siguientes puntos:

- $M$ el punto medio del segmento $BC$,
- $N$ el punto medio del segmento $EF$,
- $P$ el punto medio del segmento $AB$,
- $Q$ el punto medio del segmento $EH$,
- $X$ el punto de corte de los segmentos $AM$ y $CP$,
- $Y$ el punto de corte de los segmentos $HN$ y $FQ$.

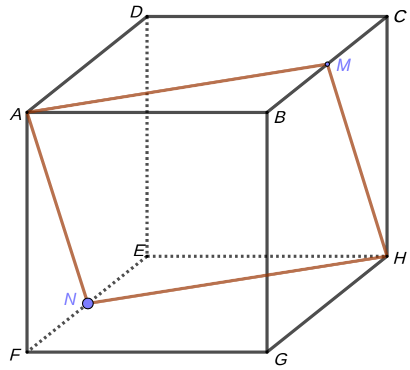



(a) Calcula el área del cuadrilátero $AMHN$.
(b) Calcula la longitud del segmento $XY$.

**Solución:**
**(a)** El cuadrilátero $AMHN$ tiene todos sus lados iguales, luego es un rombo.

Su diagonal mayor es el segmento $AH$ que tiene longitud (Teorema de Pitágoras) $\sqrt{3}$ metros. Su diagonal menor es el segmento $MN$ que tiene longitud $\sqrt{2}$ metros. Por tanto, el área es

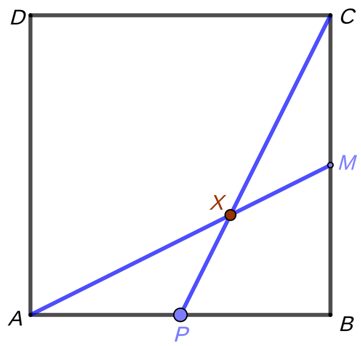
$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ metros cuadrados.}$$




**(b)** Fijémonos en la cara de arriba del cubo y denotemos por $\mathrm{d}(U, s)$ la distancia entre un punto $U$ y un segmento $s$.

Como $X$ está en el segmento $AM$, se tiene $\mathrm{d}(X, AD) = 2\,\mathrm{d}(X, AB)$. Además, por simetría, $\mathrm{d}(X, AB) = \mathrm{d}(X, BC)$, luego se tiene $\mathrm{d}(X, AD) = 2\,\mathrm{d}(X, BC)$ y, por tanto, $\mathrm{d}(X, BC) = \frac{1}{3}$.
Análogamente se tiene $\mathrm{d}(Y, EF) = \mathrm{d}(Y, EH) = \frac{1}{3}$. Así pues, tenemos

$$\mathrm{d}(X, Y) = \sqrt{\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{11}}{3} \text{ metros.} \qquad \square$$



## Segunda etapa: viernes 17 de enero de 2025.

**Problema 1.** Determina el menor entero positivo $n$ que tiene al menos 4 divisores diferentes $a, b, c, d$, con $1 < a, b, c, d < n$, de forma que

$$a + b + c + d = 1001.$$

**Solución.** Supongamos que $1 < a < b < c < d < n$, de forma que existen enteros positivos $d_1, d_2, d_3, d_4$ de forma que

$$d_1 a = d_2 b = d_3 c = d_4 d = n,$$

con $1 < d_4 < d_3 < d_2 < d_1 < n$. En particular,

$$1001 = a + b + c + d = n\Big(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} + \frac{1}{d_4}\Big) \leq n\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\Big) = \frac{77n}{60}.$$

Aislando $n$, se tiene que $n \geq 780$. Para $n = 780$, lo dicho en el enunciado es posible, ya que sus divisores 390, 260, 195 y 156 cumplen que

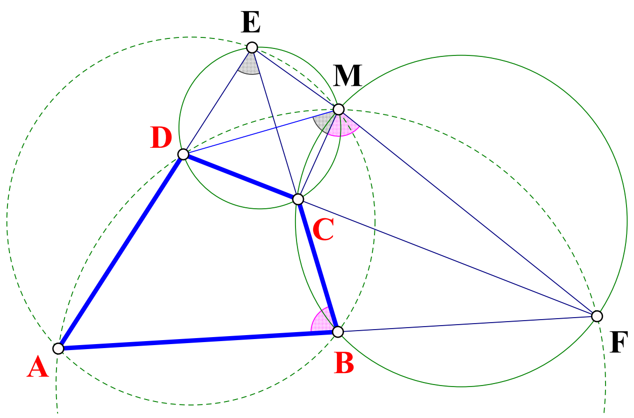
$$390 + 260 + 195 + 156 = 1001.$$

**Problema 2.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo de forma que $AB \cap CD = F$ y $AD \cap BC = E$. Demuestra que los circuncírculos de los triángulos $BFC$, $AFD$, $DCE$ y $ABE$ tienen un punto en común.

**Solución.** Sean $C$ y $M$ los puntos de intersección de los circuncírculos de $BFC$ y $CDE$. Como los cuadriláteros $BFMC$ y $CDEM$ son cíclicos, se cumple que

$$\angle DMF = \angle DMC + \angle CMF = \angle DEC + \angle CBA = 180^\circ - \angle BAE.$$

Por lo tanto, el cuadrilátero $AFMD$ es cíclico y, análogamente, el cuadrilátero $ABME$ también lo es. Por lo tanto, se concluye que el punto $M$ es común a los cuatro circuncírculos.




**Problema 3.** Encuentra todas las funciones $f\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ que cumplen, para $x, y > 0$ cualesquiera, que

$$f(xf(y)) = f(xy) + x.$$

**Solución.** Sustituyendo $x$ por $f(x)$, tenemos la ecuación

$$f(f(x)f(y)) = f(f(x)y) + f(x),$$

de donde se obtiene que

$$f(f(x)y) = f(f(x)f(y)) - f(x).$$

Cambiando los valores de $x$ e $y$ en la ecuación inicial, obtenemos que

$$f(yf(x)) = f(yx) + y.$$

Comparando ambas expresiones, tenemos la ecuación

$$f(f(x)f(y)) = f(yx) + y + f(x),$$

cuyo lado izquierdo es invariante al intercambiar los papeles de $x$ e $y$. Por lo tanto,

$$f(xy) + y + f(x) = f(xy) + x + f(y),$$

de donde se tiene que

$$f(x) - x = f(y) - y.$$

En otras palabras, se cumple que $f(x)-x = c \in (0, +\infty)$. Por lo tanto, cualquier función que pueda satisfacer la ecuación inicial es de la forma $f(x) = x + c$, con $c \in (0, +\infty)$. Para que esa función sea solución, ambos lados de la igualdad tienen que coincidir para cualquier para $(x, y)$, esto es, las dos expresiones siguientes tienen que ser iguales:

$$\begin{aligned} f(xf(y)) &= xf(y) + c = x(y + c) = xy + cx + c, \\ f(xy) + x &= xy + c + x = xy + x + c. \end{aligned}$$

Eso ocurre si, y solamente si, $cx = x$ para todo $x > 0$, lo cual implica que $c = 1$. La única solución es, por lo tanto, $f(x) = x + 1$.