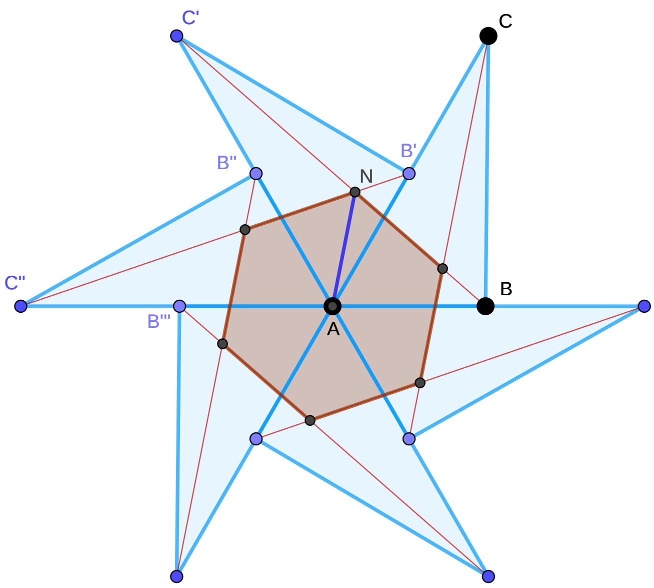
Fase aragonesa de la LVIII Olimpiada Matemática Española

Primera etapa (14 de enero de 2022)



1. Consideramos un triángulo ABC rectángulo en B, tal que su cateto AB está apoyado en el eje de abscisas. El triángulo es tal que al girarlo dos veces un ángulo $\widehat{A}$ con respecto al vértice A, como se observa en la figura, la hipotenusa cae sobre el eje de abscisas. Considera la construcción del punto N que se observa en la figura y calcula numéricamente la razón entre los segmentos $\overline{B'C}$ y $\overline{AN}$. Calcula también el cociente entre las áreas de la figura estrellada (toda la figura coloreada) y del hexágono interior (en color oscuro).

Solución: Tomamos el punto A como origen de coordenadas y la longitud del segmento $\overline{AB}$ como unidad de longitud. De este modo tenemos (identificando los puntos con sus coordenadas) $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$. Las condiciones del problema nos dicen que el ángulo en A es de 60°, luego $C = (1, \sqrt{3})$. Notemos que la longitud de $\overline{AC}$ es 2, y la de $\overline{B'C}$ es 1.

Ahora es fácil calcular las coordenadas de varios puntos: $B' = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $C' = (-1, \sqrt{3})$, $C'' = (-2, 0)$.

La recta que une B' y C tiene como ecuación

$$\frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{x-1}{-2}, \quad \text{esto es,} \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-1),$$

y la que une C'' y B' es

$$\frac{y}{\sqrt{3}/2} = \frac{x+2}{1/2+2}, \quad \text{esto es,} \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{5}(x+2).$$

Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones obtenemos las coordenadas del punto $N = (\frac{1}{7}, \frac{3\sqrt{3}}{7})$. Así, la longitud del segmento $\overline{AN}$ es $\frac{1}{7}\sqrt{1+27} = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

Por tanto el cociente entre las longitudes de los segmentos $\overline{B'C}$ y $\overline{AN}$ es $\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{2}}$.

El área de la figura estrellada es 6 veces el área del triángulo ABC, mientras que el área del hexágono es 6 veces el área del triángulo equilátero de lado $\frac{2}{\sqrt{7}}$. Como el área de un triángulo equilátero de lado l es $\frac{1}{2}l(\frac{\sqrt{3}}{2}l) = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$, obtenemos

$$\frac{\text{área estrella}}{\text{área hexágono}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}.$$

2. Sea n un número mayor o igual que 3. Consideramos n números enteros positivos (no necesariamente distintos) dispuestos en un círculo formando un corro. Decimos que tres números son vecinos en el corro si se encuentran en tres posiciones consecutivas sin otros números en medio. Dado un corro de este tipo formado con n números, decimos que es un n-corro si el producto de tres vecinos cualesquiera es siempre n. Determina razonadamente el número de enteros n entre 3 y 2022 para los que existe un n-corro.

Solución: Fijamos un punto del corro y llamamos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a los números del corro recorridos en sentido horario. La condición de ser n-corro es:

(*) $$a_1a_2a_3 = a_2a_3a_4 = a_3a_4a_5 = \cdots = a_{n-2}a_{n-1}a_n = a_{n-1}a_na_1 = a_na_1a_2 = n.$$

De la primera igualdad obtenemos $a_1 = a_4$ y, análogamente, $a_1 = a_4 = a_7 = \cdots$.
De la segunda igualdad obtenemos $a_2 = a_5$ y, análogamente, $a_2 = a_5 = a_8 = \cdots$.
De la tercera igualdad obtenemos $a_3 = a_6$ y, análogamente, $a_3 = a_6 = a_9 = \cdots$.

Si n es múltiplo de 3, entonces podemos construir fácilmente un n-corro con números

$$1, 1, n, 1, 1, n, 1, 1, n, \ldots$$

Entre 3 y 2022 hay $\frac{2022}{3} = \mathbf{674}$ múltiplos de 3.

Si n es un múltiplo de 3 más 1: $n = 3k+1$, entonces $a_1 = a_4 = \cdots = a_{3k+1} (= a_n)$, y $a_3 = a_6 = \cdots = a_{3k}$. Las últimas igualdades en (*) nos dan $a_{3k}a_{3k+1}a_1 = a_{3k+1}a_1a_2 = a_1a_2a_3 = n$. Esto es, $a_3a_1^2 = a_1^2a_2 = a_1a_2a_3 = n$, que nos dan $a_1 = a_2 = a_3$ y $n = a_1^3$. Por tanto, n ha de ser un cubo perfecto, y todos los números del corro tienen que ser iguales a la raíz cúbica de n.

Un razonamiento análogo nos dice que pasa lo mismo si n es de la forma $3k+2$. Así pues, además de los enteros n que son múltiplos de 3, solamente existen n-corros para los enteros n que son cubos perfectos no múltiplos de 3. Como $12^3 < 2022 < 13^3$, a los múltiplos de 3 hay que añadir lo siguientes **7** valores de n: $2^3, 4^3, 5^3, 7^3, 8^3, 10^3, 11^3$.

Por tanto, el número pedido es $674 + 7 = \mathbf{681}$.

LVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Curso **2021 - 2022**

Enunciados y soluciones - Viernes 21 de enero

Problema 1. *En una fila, hay 2022 personas. Cada una de ellas, o siempre miente o siempre dice la verdad. Todos ellos afirman: "hay más mentirosos a mi izquierda que personas que digan la verdad a mi derecha". Determinar cuántos mentirosos hay en la fila.*

Solución. Vamos a numerar a las personas de izquierda a derecha según su posición en la fila como $p_1, p_2, \ldots, p_{2022}$. En primer lugar, probaremos que todos los p_i con $1 \leq i \leq 1011$ son mentirosos. En el caso de p_1, como no hay personas a su izquierda, sabemos que el enunciado no puede ser cierto, con lo que necesariamente p_1 ha de ser un mentiroso. Procederemos ahora por inducción, suponiendo probado que las k personas más a la izquierda son mentirosas, donde $1 < k < 1011$. Si p_{k+1} dijese la verdad, tendría k mentirosos a su izquierda y por tanto un máximo de $k-1$ personas que dicen la verdad a su derecha, con lo que hay estrictamente más de $2021 - 2k$ mentirosos a su derecha. Tomemos ahora el mentiroso más a la derecha. Este tendrá al menos $2021 - 2k + k = 2021 - k$ mentirosos a su izquierda y a lo sumo $k - 1$ que dicen la verdad a su derecha. Como es un mentiroso, ha de pasar que $2021 - k \leq k - 1$, lo cual implica que $k \geq 1011$, lo cual es una contradicción.
Vamos a probar ahora que las 1011 personas restantes dicen la verdad. Tomemos a un individuo cualquiera p_k, con $1012 \leq k \leq 2021$. Esta persona tendrá al menos a 1011 mentirosos a su izquierda, que siempre serán más que los que tenga a su derecha. Así que necesariamente deberá decir la verdad.
Por tanto, se concluye que 1011 personas mienten y 1011 dicen la verdad.

Problema 2. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sea P un punto en el interior. Si se cumple que*

$$\text{área}(PAB) \cdot \text{área}(PCD) = \text{área}(PBC) \cdot \text{área}(PDA),$$

demostrar que P se encuentra en el segmento AC o en el segmento BD.

Solución. Podemos reescribir la igualdad del enunciado como

$$\frac{\text{área}(PAB)}{\text{área}(PDA)} = \frac{\text{área}(PBC)}{\text{área}(PCD)}.$$

Sea E el punto donde AP corta a BD, y sea F el punto donde CP corta a BD. Dado que PAB y PBC tienen un lado común, se tiene que

$$\frac{\text{área}(PAB)}{\text{área}(PDA)} = \frac{\text{altura de } B \text{ sobre } AP}{\text{altura de } D \text{ sobre } AP} = \frac{BE}{DE},$$

donde la segunda igualdad se cumple por semejanza de triángulos. Igualmente se cumple que
$$\frac{\text{área}(PBC)}{\text{área}(PCD)} = \frac{BF}{DF}.$$
Por lo tanto tenemos que $BE/DE = BF/DF$. Si desplazamos E desde B hasta D, el numerador de la fracción crece y el denominador decrece, por lo que la fracción es creciente. Deducimos así que $E = F$.
Si P está sobre AC, hemos acabado. Si no lo está, las rectas AP y CP son distintas, y se cortan como mucho en un punto. Dado que se cortan en P y en E, se deduce que $P = E$, y por tanto P está en BD, como queríamos demostrar.

Problema 3. *Hallar todas las ternas de números reales* (a, b, c) *que cumplan el sistema*
$$\begin{aligned} a + b + c &= 3 \\ 2^a + 2^b + 2^c &= 7 \\ 2^{-a} + 2^{-b} &= 3/4 \end{aligned}$$

Solución. Denotamos $u = 2^a$, $v = 2^b$ y $w = 2^c$. La segunda ecuación del sistema puede escribirse como $u + v + w = 7$, y la tercera como $u^{-1} + v^{-1} = 3/4$. También podemos obtener una relación entre u, v y w de la primera ecuación:
$$uvw = 2^a 2^b 2^c = 2^{a+b+c} = 2^3 = 8.$$
En la tercera ecuación, sustituimos a partir de la primera y la segunda:
$$\frac{3}{4} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{u+v}{uv} = \frac{7-w}{\frac{8}{w}}.$$
Esta última igualdad se puede escribir como $w^2 - 7w + 6 = 0$, que tiene como soluciones $w = 6$ y $w = 1$. Consideramos ambos casos:

- Si $w = 6$, las dos primeras ecuaciones dejan $uv = 4/3$ y $u + v = 1$. Sustituyendo la segunda ecuación en la primera produce $u(1 - u) = 4/3$, o $u^2 - u + 4/3 = 0$, que no tiene solución real.
- Si $w = 1$, las dos primeras ecuaciones dejan $uv = 8$ y $u + v = 6$. Sustituyendo la segunda ecuación en la primera produce $u(6 - u) = 8$, o $u^2 - 6u + 8 = 0$, que tiene soluciones $u = 4$ y $u = 2$. Esto lleva a las posibles soluciones $(u, v, w) = (4, 2, 1)$ y $(u, v, w) = (2, 4, 1)$. Tomando logaritmos, se obtiene $(a, b, c) = (2, 1, 0)$ y $(a, b, c) = (1, 2, 0)$. Se comprueba que ambas soluciones satisfacen el sistema inicial.

Problema 4. *Encontrar todos los polinomios* $p(x)$ *con coeficientes reales tales que*
$$p(x) + p(y) + p(z) + p(x + y + z) = p(x + y) + p(y + z) + p(z + x)$$
para cualesquiera números reales x, y, z.

Solución. Comenzamos observando que cuando $x = y = z = 0$ la ecuación dada se escribe como
$$4p(0) = 3p(0),$$

que automáticamente implica que $p(0) = 0$. Sustituimos ahora (x, y, z) por $(x, x, -x)$. Entonces,

$$3p(x) + p(-x) = p(2x). \tag{1}$$

Sea n el grado de p, y escribamos $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Entonces, el coeficiente con x^n en el lado izquierdo de (1) es $a_n \cdot (3 + (-1)^n)$, y en el lado derecho es $a_n \cdot 2^n$. Esto implica que

$$3 + (-1)^n = 2^n.$$

Si n es par, entonces $3 + 1 = 2^n$, que es cierto si $n = 2$. Si n es impar, tendremos que $n = 1$. Entonces, los únicos posibles candidatos con los polinomios de grado a lo sumo 2 y cuyo término constante es 0, esto es,

$$p(x) = ax^2 + bx, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Comprobamos ahora que estos polinomios cumplen las condiciones del enunciado. Como la condición es linear, es suficiente comprobar que tanto $p_1(x) = x$ como $p_2(x) = x^2$ funcionan. Esto se sigue de la comprobación

$$x + y + z + (x + y + z) = (x + y) + (y + z) + (z + x)$$

y

$$x^2+y^2+z^2+x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx = x^2+y^2+2xy+y^2+z^2+2zx+z^2+x^2+2zx.$$

Por tanto, cualquier polinomio de la forma $p(x) = ax^2 + bx$, con $a, b \in \mathbb{R}$, satisfacen la condición dada, y estos son los únicos.