



## Fase aragonesa de la LVII Olimpiada Matemática Española

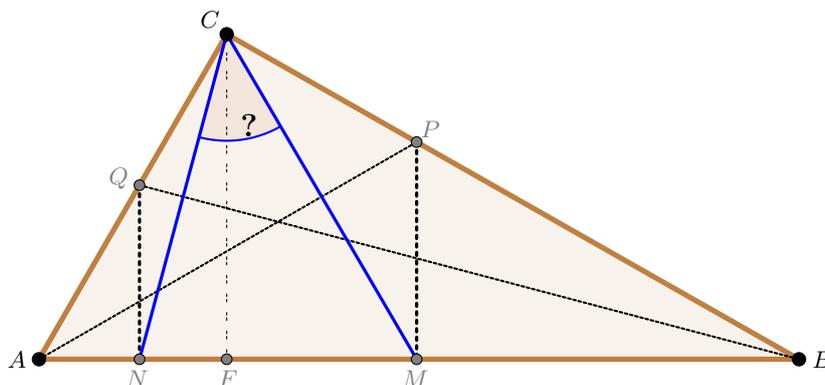
Primera etapa (8 de enero de 2021)



1. Sea  $ABC$  un triángulo rectángulo con el ángulo recto en el vértice  $C$ . Sea  $P$  el punto de corte de la bisectriz del ángulo  $\angle BAC$  con el segmento  $BC$ , y  $Q$  el punto de corte de la bisectriz del ángulo  $\angle ABC$  con el segmento  $AC$ . Sean  $M$  y  $N$  los puntos de corte con el segmento  $AB$  de las rectas perpendiculares al mismo y que pasan por  $P$  y  $Q$  respectivamente.

¿Cuánto vale el ángulo  $\angle MCN$ ?

**Solución:** La situación del problema queda reflejada en el siguiente gráfico:



Por ser un punto de la bisectriz de  $\angle BAC$ , la distancia de  $P$  a la recta  $AC$  es igual a la distancia a la recta  $AB$ . Por tanto los segmentos  $PC$  y  $PM$  tienen igual longitud y el triángulo  $PCM$  es isósceles. Deducimos que  $\angle PCM = \angle PMC = \angle MCF$ . De aquí obtenemos  $2\angle MCF = \angle FCB$  y este es complementario de  $\angle FBC = \angle ABC$ , luego  $2\angle MCF = \angle BAC$ .

El mismo razonamiento da  $2\angle NCF = \angle ABC$ . Concluimos que

$$\angle MCN = \angle MCF + \angle NCF = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) = 45^\circ.$$

**De otro modo:** Los triángulos  $APC$  y  $APM$  son congruentes, pues ambos son rectángulos, tienen la misma hipotenusa y el ángulo en  $A$  igual. Por tanto el triángulo  $CAM$  es isósceles y obtenemos

$$\angle AMC = \angle ACM = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2}.$$

Del mismo modo obtenemos  $\angle BNC = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2}$ . Ahora, usando el triángulo  $CMN$ , concluimos que:

$$\angle MCN = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} - \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = \frac{\angle BAC + \angle ABC}{2} = 45^\circ.$$

2. Considera el siguiente par de números naturales de 4 cifras:

$$(m, n) = (2601, 1600) \quad (\text{es decir, } m = 2601, n = 1600).$$

Fíjate que  $m$  y  $n$  verifican las siguientes propiedades:

- Son números de 4 cifras (esto es, entre 1000 y 9999).
- Son cuadrados perfectos.
- Tienen las mismas cifras en exactamente dos de las cuatro posiciones. (En nuestro ejemplo, en la segunda y tercera posiciones.)
- En las dos posiciones en las que las cifras son distintas, la cifra que aparece en  $m$  es igual a la que aparece en  $n$  más 1.

Encuentra todos los pares de números naturales que verifican estas cuatro propiedades.

**Solución:** Buscamos números naturales de la forma  $m = a^2$ ,  $n = b^2$ , con  $32 \leq b < a \leq 99$  y tales que  $a^2 - b^2$  es uno de los siguientes números: 1100, 1010, 1001, 110, 101, 11.

Como  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ,  $a + b$  y  $a - b$  tienen la misma paridad,  $65 \leq a + b \leq 197$  y  $a - b \geq 0$ , teniendo en cuenta las factorizaciones como producto de primos:  $1100 = 2^2 \times 5^2 \times 11$ ,  $1010 = 2 \times 5 \times 101$ ,  $1001 = 7 \times 11 \times 13$ ,  $110 = 2 \times 5 \times 11$ , las únicas posibilidades son:

- $a^2 - b^2 = 1100$ ,  $a + b = 2 \times 5 \times 11 = 110$ ,  $a - b = 2 \times 5 = 10$ . En este caso  $a = 60$ ,  $b = 50$  y obtenemos el par  $(m, n) = (3600, 2500)$ .
- $a^2 - b^2 = 1001$ ,  $a + b = 11 \times 13 = 143$ ,  $a - b = 7$ . En este caso  $a = 75$ ,  $b = 69$  y obtenemos el par  $(m, n) = (5625, 4624)$ .
- $a^2 - b^2 = 1001$ ,  $a + b = 7 \times 13 = 91$ ,  $a - b = 11$ . En este caso  $a = 51$ ,  $b = 40$  y obtenemos el par  $(m, n) = (2601, 1600)$ .
- $a^2 - b^2 = 1001$ ,  $a + b = 7 \times 11 = 77$ ,  $a - b = 13$ . En este caso  $a = 45$ ,  $b = 32$  y obtenemos el par  $(m, n) = (2025, 1024)$ .
- $a^2 - b^2 = 101$ ,  $a + b = 101$ ,  $a - b = 1$ . En este caso  $a = 51$ ,  $b = 50$  y obtenemos el par  $(m, n) = (2601, 2500)$ .

Así pues, existen exactamente 5 posibilidades.

## Soluciones, tarde del jueves 21 de enero

1. Determinar todos los números de cuatro cifras  $n = \overline{abcd}$  tales que al insertar un dígito 0 en cualquier posición se obtiene un múltiplo de 7.

---

**Solución.** Comenzamos observando que el número que resulta de insertar un 0 al final de  $n$  es  $10n$ , que al ser múltiplo de 7 obliga a que  $n$  también lo sea. De hecho, son múltiplos de 7 los siguientes cinco números:

$$\begin{aligned}n &= \overline{abcd} &= 1000a + 100b + 10c + d \\x &= \overline{a0bcd} &= 10000a + 100b + 10c + d \\y &= \overline{ab0cd} &= 10000a + 1000b + 10c + d \\z &= \overline{abc0d} &= 10000a + 1000b + 100c + d \\w &= \overline{abcd0} &= 10000a + 1000b + 100c + 10d\end{aligned}$$

Como  $n, x$  son múltiplos de 7, también lo es su diferencia  $x - n = 9000a$ , y puesto que 9000 no es múltiplo de 7, debe serlo  $a$ . Al ser  $n$  un número de 4 cifras, se tiene que  $a \neq 0$  y necesariamente debe ser  $\boxed{a = 7}$ .

De forma similar,  $y - n = 9000a + 900b$  es múltiplo de 7, y sabemos que  $a$  es múltiplo de 7, luego  $900b$  es múltiplo de 7. Y como 900 no es múltiplo de 7, debe serlo  $b$ , y se deduce que  $\boxed{b = 0 \text{ o } b = 7}$ .

Análogamente, razonando con  $z - n = 9000a + 900b + 90c$  se obtiene que  $\boxed{c = 0 \text{ o } c = 7}$ , e insertando las condiciones de ser  $a, b, c$  múltiplos de 7 en el número de partida  $n$  deducimos que también  $\boxed{d \text{ es } 0 \text{ o } 7}$ .

Así pues, los números buscados son todos los que empiezan por 7 y las restantes cifras son 0 o 7:

$$7000, 7007, 7070, 7077, 7700, 7707, 7770, 7777.$$

2. Determinar todas las parejas de enteros positivos  $(m, n)$  para los cuales es posible colocar algunas piedras en las casillas de un tablero de  $m$  filas y  $n$  columnas, no más de una piedra por casilla, de manera que todas las columnas tengan la misma cantidad de piedras, y no existan dos filas con la misma cantidad de piedras.

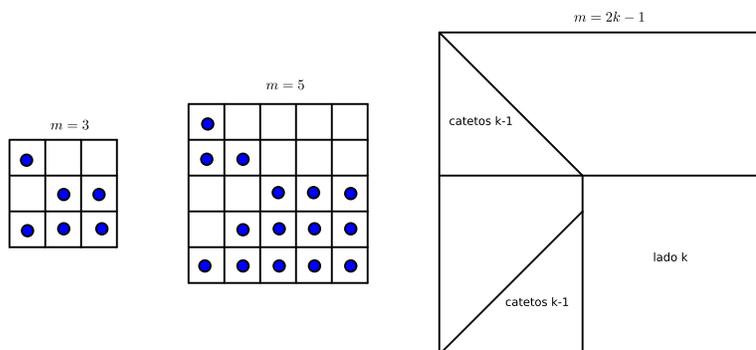
**Solución 1.** Veremos que las soluciones son todas las parejas  $(m, n)$  con  $n \geq m$  si  $m$  es impar, o  $n \geq m - 1$  si  $m$  es par.

Para  $m = 1$ , es inmediato que cualquier tablero  $(1, n)$  es posible, por ejemplo llenándolo completamente de piedras.

Nótese la condición necesaria  $n \geq m - 1$ : para  $m$  filas son necesarias al menos  $m - 1$  columnas, ya que  $m - 1$  es la menor cantidad de piedras que puede contener la fila que tenga más piedras.

Sea  $m \geq 3$  impar. Veamos que no es posible alcanzar el caso límite  $n = m - 1$ . En efecto, para llenar un tablero  $(m, m - 1)$  con distintas cantidades de piedras en cada fila, es necesario que las filas tengan  $0, 1, \dots, m - 1$  piedras, en algún orden. El número total de piedras es  $\frac{(m-1)m}{2}$ , y debe ser igual a  $t(m - 1)$ , siendo  $t$  la cantidad de piedras de cada columna. Como la igualdad  $\frac{m}{2} = t$  es imposible cuando  $m$  es impar, en este caso el número de columnas debe ser  $n \geq m$ .

Una solución válida para el tablero  $(m, m)$ , para  $m = 2k - 1$ , se obtiene siguiendo el esquema de la siguiente figura:



Las piedras se colocan en dos triángulos rectángulos isósceles de catetos  $k - 1$ , y en un cuadrado de lado  $k$ . Las cantidades de piedras en las filas son  $1, 2, \dots, k - 1, k, k + 1, \dots, 2k - 1$ , y cada columna tiene  $k$  piedras.

Para  $m \geq 2$  par, el tablero  $(m, m - 1)$  se resuelve partiendo de una solución del tablero  $(m - 1, m - 1)$  y añadiendo una fila vacía.

Finalmente, toda solución para un tablero  $(m, n)$  puede extenderse a un tablero  $(m, n + 1)$ , de esta manera: si todas las columnas tienen  $t$  piedras, colocamos  $t$  piedras en la nueva columna, en las posiciones correspondientes a las  $t$  filas que más piedras tenían. Así, las columnas siguen teniendo  $t$  piedras cada una, y sigue sin haber dos filas con el mismo número de piedras. Repitiendo las veces que haga falta la

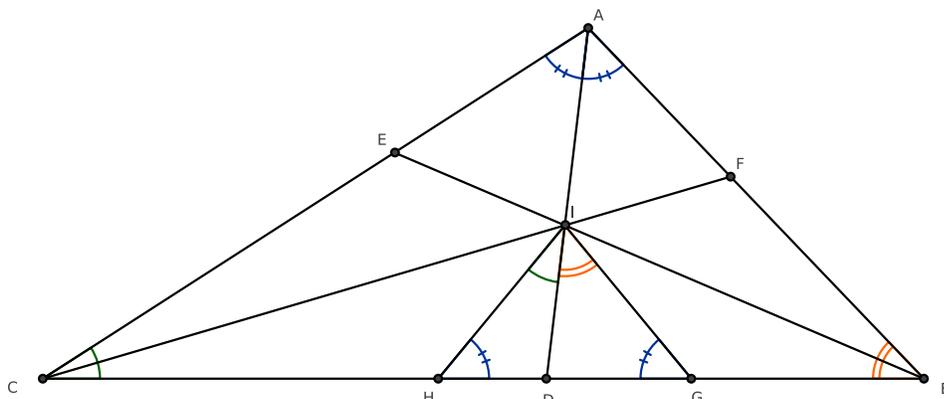
operación de paso de  $(m, n)$  a  $(m, n + 1)$ , se resuelven todos los tableros  $(m, n)$  con  $n \geq m$  si  $m$  es impar, o  $n \geq m - 1$  si  $m$  es par.

**Solución 2.** Similar a la anterior, utilizando el siguiente procedimiento para rellenar las casillas en el tablero  $(m, m)$ , cuando  $m$  es impar.

Vamos a colocar  $k$  piedras en la fila  $k \in [1, n]$ . Empezamos por la esquina superior izquierda colocando una piedra. Si la fila tiene todas las piedras que vamos a colocar, seguimos por la casilla inmediatamente abajo a la derecha (si estamos a la derecha del todo, seguimos por la izquierda del todo). Si la fila aún no tiene todas las piedras, entonces seguimos colocando piedras inmediatamente a la derecha de la anterior (la misma convención aplica en el borde). Evidentemente cuando hayamos terminado la última fila, todas las filas tendrán el número deseado de piedras. Además, como el número total de piedras es divisible por el número de columnas, habrá el mismo número de piedras en cada columna.

3. En el triángulo  $ABC$  con lado mayor  $BC$ , las bisectrices se cortan en  $I$ . Las rectas  $AI, BI, CI$  cortan a  $BC, CA, AB$  en los puntos  $D, E, F$ , respectivamente. Se consideran puntos  $G$  y  $H$  en los segmentos  $BD$  y  $CD$ , respectivamente, tales que  $\angle GID = \angle ABC$  y  $\angle HID = \angle ACB$ . Probar que  $\angle BHE = \angle CGF$ .

**Solución** Comenzamos con una figura, donde se señalan algunas igualdades de ángulos que inmediatamente justificaremos.



Nótese que los triángulos  $ABD$  y  $GID$  tienen un ángulo común en  $D$  y ángulos iguales en  $B$  y en  $I$ , por lo que sus terceros ángulos deben coincidir, es decir  $\angle DGI = \angle DAB$ . De forma análoga, razonando con los triángulos  $ACD$  y  $HID$  se obtiene  $\angle DHI = \angle DAC$ .

Los triángulos  $BIA$  y  $BIH$  resultan ser congruentes por tener dos ángulos iguales y un lado común, esto revela que los puntos  $A$  y  $H$  son simétricos con respecto a la recta  $BI$ , y de forma similar  $A$  y  $G$  son simétricos respecto de  $CI$ .

Las simetrías que acabamos de establecer prueban que:

$$\angle BHE = \angle BAE \quad \text{y} \quad \angle CGF = \angle CAF,$$

y queda demostrada la igualdad de ángulos que se pedía.

Nota: otras soluciones pueden probar y utilizar que los cuadriláteros  $ABGI$  y  $ACHI$  son inscriptibles (cíclicos), y/o que  $G, H$  son puntos de la circunferencia de centro  $I$  que pasa por  $A$ .

4. Al desarrollar  $(1+x+x^2)^n$  en potencias de  $x$ , exactamente tres términos tienen coeficiente impar. ¿Para qué valores de  $n$  es esto posible?

**Solución** Empezamos estudiando qué efecto tiene sobre los coeficientes de un polinomio multiplicar por  $(1+x+x^2)$ :

$$\begin{aligned} (1+x+x^2)^{n+1} &= (1+x+x^2)^n(1+x+x^2) \\ &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots)(1+x+x^2) \\ &= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \\ &\quad + (a_1 + a_2 + a_3)x^3 + \dots \end{aligned}$$

Si llamamos  $\{a_i\}_{i=0}^{2n}$  a los coeficientes de  $P_n(x) = (1+x+x^2)^n$  y  $\{b_i\}_{i=0}^{2n+2}$  a los de  $P_{n+1}(x)$ , entonces para todo  $i$  se cumple que  $b_i = a_{i-2} + a_{i-1} + a_i$ , identificando con 0 los coeficientes que no están definidos. Esto sugiere ordenar los coeficientes de los polinomios  $P_n(x)$  en forma de triángulo, empezando con 1 en la cúspide, y donde los restantes coeficientes son la suma de los tres que se sitúan por encima de él. Algo así:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & & \\ 1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 \\ \dots & \dots \end{array}$$

Cada fila es simétrica con extremos 1, y el coeficiente central siempre es impar por ser suma de un impar más dos números iguales.

También vemos que para  $n = 1, 2, 4$ ,  $P_n(x)$  tiene 3 coeficientes impares. Veamos que esta situación ocurre para todas las potencias de 2. Es sencillo comprobar que si  $P_n(x)$  tiene 3 coeficientes impares (necesariamente los de grado 0,  $n$  y  $2n$ ), lo mismo ocurre para  $P_{2n}(x)$ :

$$\begin{aligned} (1+x+x^2)^{2n} &= ((1+x+x^2)^n)^2 \\ &\equiv (1+x^n+x^{2n})^2 \equiv 1+x^{2n}+x^{4n} \pmod{2}, \end{aligned}$$

donde hemos despreciado los “dobles productos”, al trabajar módulo 2. Partiendo de que  $P_1(x)$  tiene 3 términos impares, el procedimiento anterior de paso de  $n$  a  $2n$  prueba que  $P_n(x)$  tiene 3 términos impares para todo  $n$  potencia de 2. Veamos que no existen más valores de  $n$  con esta propiedad.

Si  $n$  no es potencia de 2, existen una potencia de 2 dada por  $a = 2^k$  y un número  $b$ , con  $0 < b < a$ , tales que  $n = a + b$ . Por lo visto antes, podemos asumir que  $P_a(x) \equiv 1 + x^a + x^{2a} \pmod{2}$ . Entonces:

$$\begin{aligned} P_n(x) = P_b(x)P_a(x) &\equiv P_b(x)(1+x^a+x^{2a}) \pmod{2} \\ &\equiv P_b(x) + (\text{términos de grado } \geq a > b) \end{aligned}$$

Además, sabemos que  $P_b(x)$  tiene su término central  $x^b$  impar, y este término “sobrevive” sin que nadie lo cancele, por lo que  $P_n(x)$  tiene al menos 4 términos impares: los de grado 0,  $b$ ,  $n$  y  $2n$ .