Soluciones

Problema 1. *Sea E una elipse y consideremos tres rectas paralelas r_1, r_2 y r_3, cada una de las cuales corta a E en dos puntos distintos. Sean estos puntos A_1, B_1, A_2, B_2 y A_3, B_3, respectivamente. Probar que los puntos medios de los segmentos A_1B_1, A_2B_2 y A_3B_3 están alineados.*

Solución 1. *El resultado es inmediato en el caso de que la elipse sea una circunferencia. Esta tres rectas determinan tres cuerdas y sus puntos medios son los puntos de corte de las rectas con un diámetro perpendicular a todas ellas. En otro caso, pensando en la elipse como la intersección de un cono con un plano (el cono de Apolonio), la proyección sobre un plano perpendicular al eje del cono nos da una circunferencia y las rectas paralelas se proyectan en rectas paralelas.*

Solución 2. *Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la ecuación de nuestra elipse es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Entre todas las rectas de pendiente dada m consideraremos dos particulares: en primer lugar la que pasa por el origen, O, $y=mx$. Por simetría, el origen será precisamente el punto medio de los dos puntos en que esta recta corta a la elipse; a continuación, consideramos una de las dos rectas tangentes a la elipse con esta pendiente m en el punto que llamamos P. Si nuestras rectas r_1, r_2 y r_3 tienen pendiente m y los puntos medios de los puntos de corte con la elipse van a estar alineados, estos puntos medios deben estar sobre la recta que pasa por O y P.*
Tomemos una recta con ecuación $y=mx+c$ y determinemos sus intersecciones con la elipse, A y B, con coordenadas respectivas, (x_A, y_A) y (x_B, y_B). x_A y x_B serán las soluciones para la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1,$$

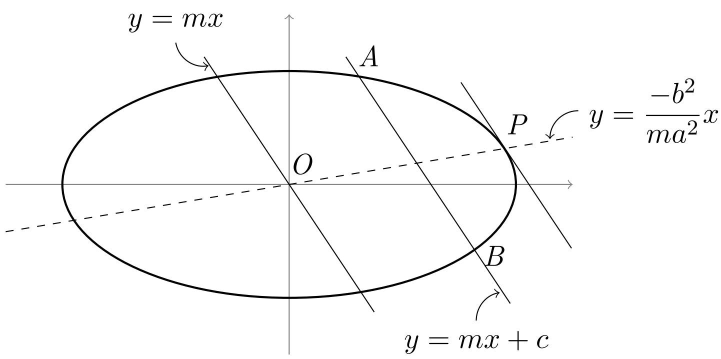
es decir,

$$(b^2+m^2a^2)x^2+(2ma^2c)x+a^2c^2-a^2b^2=0,$$

que vienen dadas por

$$\frac{-2ma^2c\pm\sqrt{(2ma^2c)^2-4(b^2+m^2a^2)(a^2c^2-a^2b^2)}}{2(b^2+m^2a^2)},$$

una para cada signo. Por lo tanto, si el punto medio tiene por coordenadas (x_M, y_M), entonces $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-ma^2c}{b^2+m^2a^2}$ e $y_M=mx_M+c=\frac{b^2c}{b^2+m^2a^2}$, que están sobre la recta $y=\frac{y_M}{x_M}x=\frac{-b^2}{ma^2}\,x$, que es independiente del valor de c de la recta particular elegida.



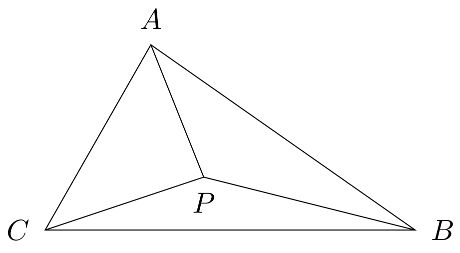
Solución 3. *Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la ecuación de nuestra elipse es* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *y que la pendiente común de* r_1, r_2 *y* r_3 *es* m. *La transformación,* f, *definida por*

$$(x', y') = f(x, y) = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$$

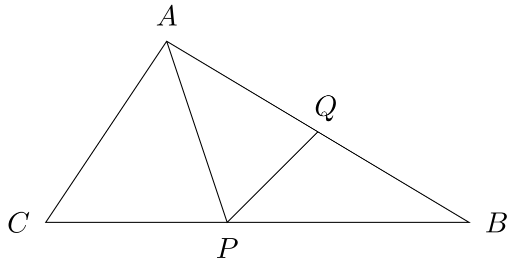
convierte la elipse en una circunferencia de ecuación $x'^2 + y'^2 = 1$, *y una recta de ecuación* $y = mx + c$ *en una recta de ecuación* $by' = max' + c$, *es decir,* $y' = \frac{ma}{b}x + \frac{c}{b}$. *Por tanto, las imágenes por* f *de* r_1, r_2 *y* r_3 *serán tres rectas que cortan a la circunferencia formando tres cuerdas paralelas entre sí, y sus puntos medios estarán entonces sobre el diámetro ortogonal a todas ellas, es decir, sobre la recta de ecuación* $y' = -\frac{b}{ma}x'$. *Como* f *conserva los puntos medios, por linealidad, los puntos medios de* A_1B1, A_2B_2 *y* A_3B_3 *estarán sobre la recta* $\frac{y}{b} = -\frac{b}{ma}\frac{x}{a}$, *es decir,* $y = -\frac{b^2}{ma^2}x$, *el diámetro conjugado de* $y = mx$.

Problema 2. *Sea* T *un triángulo de ángulos* α, β *y* γ. *¿Para qué valores de* α, β *y* γ *el triángulo* T *se puede dividir en tres triángulos congruentes entre sí?*

Solución. *Si* $\alpha = \beta = \gamma$, *el triángulo es equilátero y siendo* O *el centro de* T, *los triángulos que se obtienen uniendo* O *con cualquiera par de vértices son congruentes. Veremos que sólo en este caso se puede obtener una división con tres triángulos congruentes, con un vértice común en el interior de* T.



Denotemos por r, s *y* t *los ángulos de estos tres triángulos congruentes y supongamos, por ejemplo, que* r *es uno de los ángulos* $\angle APB$, $\angle BPC$ *o* $\angle CPA$. *Dado que cualquiera de estos ángulos es menor que* π, r *sumado a cualquiera de ellos ha de ser mayor que* π, *por lo que no pueden ser ni* s *ni* t, *pues* $r + s + t = \pi$, *luego los tres deben ser iguales a* r, *y* T *es equilátero.*
Analicemos ahora el caso en que los tres triángulos congruentes tengan un vértice común, P *sobre uno de los lados, por ejemplo el lado* BC, *y supongamos que los triángulos son* $\triangle CPA$, $\triangle APQ$ *y* $\triangle QPB$, *para algún punto* Q *sobre el lado* AB.
Nótese que ahora hay analogía entre los ángulos $\angle QPA$ *y* $\angle BPQ$, *pero no entre estos y* $\angle APC$.



Como antes, siendo r, s y t los ángulos de los tres triángulos congruentes, comenzamos analizando el caso en que $\angle QPA$ y $\angle BPQ$, digamos r
Por congruencia se tiene que $\overline{AQ} = \overline{QS}$, por lo que también $\overline{AP} = \overline{PB}$. Dado que $\triangle APB$ es isósceles y Q es el punto medio de AB, $\angle PQA = \angle PQB = \pi/2$. Luego, los triángulos congruentes son rectángulos y los ángulos son $r = \pi/3$, $s = \pi/2$, $t = \angle ABC = \pi/6$.
Si los ángulos $\angle APQ$ y $\angle QPB$ no son el mismo, digamos que son r y s, entonces $\angle APC = t$ y dado que también $r + s + \angle PAB + \angle PBA$, se tendrá $t = \angle PAB + \angle PBA$, por lo ninguno de ellos puede ser t. Entonces, $\angle PQA = \angle PQB = \pi/2$. Si además de no ser el mismo ángulo, fuese $r \neq s$, se tendría $\overline{AQ} \neq \overline{QB}$ por lo que, por la congruencia de $\triangle AQP$ y $\triangle QBP$, deberá tenerse $\overline{AQ} = \overline{PB}$. Pero dos triángulos rectángulos en que la hipotenusa de uno es igual a un cateto del otro, no pueden ser congruentes. Por lo tanto $r = s$, y estamos en el supuesto anterior.
Por tanto, sólo existen dos tipos de triángulos que se pueden descomponer en tres triángulos congruentes: los equiláteros y los rectángulos (30, 60, 90).

Problema 3. *Se considera la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida como sigue:*

$$f(n) = \begin{cases} -f(\frac{n}{2}) & \text{si } n \text{ es par} \\ f(n-1) + 1 & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

para $n \geq 0$. Demostrar que $f(n)$ es múltiplo de 3 si, y sólo si, n es múltiplo de 3, y hallar el menor número n que cumple $f(n) = 2017$.

Solución 1. *De la definición de f se sigue que $f(2^a) = (-1)^a$, para todo $a \geq 0$. Siendo $a > b \geq 0$, entonces*

$$f(2^a + 2^b) = f(2^b(2^{a-b} + 1)) = (-1)^b[(-1)^{a-b} + 1] = (-1)^a + (-1)^b,$$

y, en general, si $a_1 > \cdots > a_k \geq 0$, se tiene que

$$f(2^{a_1} + \cdots + 2^{a_k}) = (-1)^{a_1} + \cdots + (-1)^{a_k}.$$

Los restos de 2^n al dividir entre 3 son 1 o 2, dependiendo de si n es par o impar, y dado que 2 y (-1) se diferencian en 3, se tiene que $2^{a_1} + \cdots + 2^{a_k}$ y $(-1)^{a_1} + \cdots + (-1)^{a_k}$ dan el mismo resto al dividir entre 3.
Para la segunda parte, claramente el menor número buscado se conseguirá sumando las menores potencias pares de 2 hasta completar 2017, es decir,

$$2^0 + 2^2 + 2^{2\times 2} + \cdots + 2^{2\times 2016},$$

progresión geométrica de razón 4 cuya suma es $\dfrac{2^{2\times 2017} - 1}{3}$

Solución 2. *Se prueba por inducción en el número de cifras binarias de n, que $f(n)$ es el número de unos que tiene la expresión binaria de n en posiciones impares menos el número de unos que tiene en posiciones pares (considerando que contamos de derecha a izquierda y que empezamos por la posición uno). Si*

$$n = (a_k \dots a_2 a_1)_{(2)},$$

entonces usando que $2^{2n+1} \equiv 2 \pmod 3$ y $2^{2n} \equiv 1 \pmod 3$, resultará que

$$n \equiv a_k(-1)^k + \cdots + a_2 - a_1,$$

que es múltiplo de 3 si y solo si $f(n) = a_k(-1)^{k+1} + \cdots - a_2 + a_1$ es múltiplo de 3. De la descripción de f es obvio que el menor que cumple que $f(n) = 2017$ es

$$4^0 + 4^1 + \cdots + 4^{2016} = \frac{4^{2017} - 1}{3}.$$

Problema 4. *Describir todas las soluciones enteras positivas (m, n) de la ecuación $8m - 7 = n^2$ y dar el primer valor de m (si existe) mayor que 1959.*

Solución. *Como n tiene que ser impar, $n = 2s - 1$ para algún número natural s. Así:*

$$8m - 7 = (2s-1)^2 = 4s(s-1) + 1 = 8\binom{s}{2} + 1 \quad y \quad 8m = 8\left(\binom{s}{2} + 1\right),$$

de donde obtenemos que las soluciones son de la forma $m = \binom{s}{2} + 1$ y $n = 2s - 1$.

Con $s = 63$ se tiene $m = \frac{63 \times 62}{2} + 1 = 1954$ y para $s = 64$ nos sale $m = \frac{64 \times 63}{2} + 1 =$ 2017. La respuesta a la segunda pregunta es pues $m = 2017$.

Problema 5. *Se colorean los números $1, 2, \dots, n$ de dos colores, azul y rojo. Probar que si $n = 2017$ existe una coloración tal que la ecuación*

$$8(x + y) = z$$

no tiene soluciones monocromáticas. Determinar el menor n para el que nunca es posible colorear los números de forma tal que no haya soluciones monocromáticas.

Solución. *Para la segunda pregunta, observamos que si el 1 es azul, entonces $8(1+1) =$ 16 es rojo, y por tanto $8(16+16) = 256$ azul y $8(256+1) = 2056$ es rojo. En general, si un número i es azul $8(i+1)$ es rojo, y por consiguiente $i - 15$ no puede ser rojo ya que en ese caso tendríamos $8((i-15)+16) = 8(i+1)$. Por tanto, si i es azul, $i - 15$ también. Ahora bien, 256 es azul y por tanto $256 - 15 \cdot 16 = 256 - 240 = 16$ es azul, lo cual es una contradicción. Por tanto, necesariamente ha de ocurrir que $n < 2056$. Si eso sucede es posible no tener soluciones monocromáticas: pintamos el $[1, 15]$ de azul, el $[16, 255]$ de rojo y el $[256, 2055]$ nuevamente de azul. Por tanto, no hay soluciones monocromáticas, ya que si x, y fuesen ambos rojos, $8(x+y) \geq 8(16+16) = 256$ y ya no tenemos números rojos tan grandes. Si ambos fuesen azules y ≤ 15 entonces $8(x+y)$ está entre 16 y 240, con lo que no hay problemas; por su parte, si uno es ≥ 256, entonces $8(x+y) \geq 8 \cdot 257 = 2056$, número que ya no estamos considerando. En el caso 2017 basta considerar esta misma coloración pintando azul el $[256, 2017]$.*

Problema 6. *Calcular el número máximo de raíces reales distintas que puede tener un polinomio P que verifique la siguiente propiedad: el producto de dos raíces distintas de P sigue siendo una raíz de P.*

Solución. *La respuesta es 4. El polinomio $x(x-1/2)(x-1)(x-2)$, con raíces 0, 1/2, 1 y 2, cumple dicha cota. Supongamos que hubiese un polinomio con al menos 5 raíces distintas. Es importante reseñar que un polinomio tiene una cantidad finita de raíces y es lo que nos permite tomar máximos y mínimos.*
Si un polinomio tiene 5 raíces, al menos 4 serían no nulas y distinguimos dos casos.

1. *Si -1 es raíz, hay al menos una raíz (de hecho, al menos dos) con valor absoluto no nulo distinto de 1. Sea A una raíz con el mayor valor absoluto entre todas la raíces y supongamos que $|A| > 1$. Como -1 y A son raíces, $-A$ es raíz; pero entonces también lo sería $-A \cdot A = -A^2$ y $\left|A^2\right| > |A|$, lo que contradiría la maximalidad del valor absoluto de A.*

   Si no existen raíces con valor absoluto > 1, tomemos como A una de las raíces con el menor valor absoluto entre todas las raíces distintas de 0. Se tendrá entonces que $|A| < 1$, y como -1 y A son raíces, $-A$ es raíz y también lo será $-A \cdot A = -A^2$. Pero entonces, $\left|A^2\right| < |A|$, lo que contradiría la minimalidad del valor absoluto de A entre las raíces no nulas.

2. *Si -1 no es raíz, hay al menos tres raíces no nulas y de módulo distinto de 1. Hay entonces dos raíces A, B con los dos valores absolutos mayores (mayores que 1) o bien dos raíces con los dos valores absolutos menores A, B (menores que 1 y no nulos). En cualquier caso multiplicando $A \cdot B$ llegamos a una contradicción con la maximalidad o minimalidad.*