Soluciones

Viernes mañana, primera sesión

1. Con baldosas cuadradas de lado un número exacto de unidades se ha podido embaldosar una habitación de superficie 18144 unidades cuadradas de la siguiente manera: el primer día se puso una baldosa, el segundo, dos baldosas, el tercero tres, etc. ¿Cuántas baldosas fueron necesarias?

Solución. Supongamos que fueron necesarias n baldosas y que su tamaño es $k \times k$. Entonces $nk^2 = 18144 = 2^5 \times 3^4 \times 7$. Hay nueve casos posibles para n, a saber, 2×7, $2^3 \times 7$, $2^5 \times 7$, $2 \times 3^2 \times 7$, $2^3 \times 3^2 \times 7$, $2^5 \times 3^2 \times 7$, $2 \times 3^4 \times 7$, $2^3 \times 3^4 \times 7$, $2^5 \times 3^4 \times 7$. Además este número tiene que poderse expresar en la forma $1 + 2 + 3 + \cdots + N = N(N+1)/2$ y esto sólo es posible en el caso sexto: $2^5 \times 3^2 \times 7 = 63 \times 64/2 = 2016$. Para descartar los otros casos rápidamente observamos que N y $N + 1$ son números primos entre sí. Si por ejemplo $N(N + 1)/2 = 2^3 \times 7$, tendría que ser $N + 1 = 2^4$ y $N = 7$, que es imposible, etc. Por tanto, se necesitaron 2016 baldosas.

2. Hemos empezado la Olimpiada Matemática puntualmente a las 9:00, como he comprobado en mi reloj, que funcionaba en ese momento correctamente. Cuando he terminado, a las 13:00, he vuelto a mirar el reloj y he visto que las manecillas se habían desprendido de su eje pero manteniendo la posición en la que estaban cuando el reloj funcionaba. Curiosamente las manecillas de las horas y de los minutos aparecían superpuestas exactamente, una sobre otra, formando un ángulo (no nulo) menor que $120°$ con el segundero. ¿A qué hora se me averió el reloj? (Dar la respuesta en horas, minutos y segundos con un error máximo de un segundo; se supone que, cuando funcionaba, las manecillas del reloj avanzaban de forma continua.)

Solución. Si medimos el tiempo t en segundos a partir de las 00:00 y los ángulos en grados, en sentido horario y a partir de la posición de las manecillas a las 00:00, tenemos que el ángulo barrido por la manecilla de las horas en el instante t es $\alpha_{hor}(t) = t/120$ y barrido por el minutero, $\alpha_{min}(t) = t/10$. Como ambas manecillas han aparecido superpuestas, los dos ángulos han de coincidir en el momento t en que el reloj se ha averiado. El minutero ha podido dar alguna vuelta completa, por tanto debe tenerse

$$\frac{t}{10} = \frac{t}{120} + 360k,$$

con $k \geq 0$ un número entero, es decir, $t = \frac{360\times120}{11}k$. Como la avería ha sido entre las 9:00 y las 13:00, tiene que ser $9 \leq k \leq 12$. El ángulo para el segundero es $\alpha_{seg}(t) = 6t$, por tanto la diferencia

$$6t - \frac{t}{120} = \frac{360 \times 719}{11}k = (360 \times 65 + \frac{360 \times 4}{11})k$$

debe ser, salvo múltiplos de 360, un número β entre -120 y 120. Si $k = 9$, $\beta = (360 \times 3)/11$, que efectivamente está en este rango. Sin embargo, si $k = 10$ ó 12, $\beta = \pm(360 \times 4)/11$, que está fuera de este intervalo. El caso $k = 11$ también se excluye puesto que se tendría $\beta = 0$ y las tres manecillas no están superpuestas. Por lo tanto el único caso posible es $k = 9$, que corresponde al momento

$$t = \frac{360 \times 120 \times 9}{11} = 3600 \times 9 + 60 \times 49 + 5 + \frac{5}{11},$$

lo que significa que el reloj se averió a las 9:49:05.

3. Sea ABC un triángulo rectángulo en C no isósceles con catetos $b > a$.

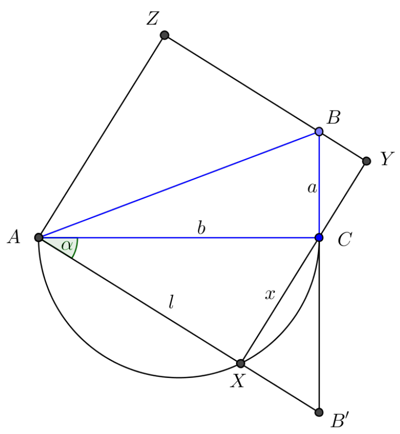
(i) Hallar el lado del cuadrado $AXYZ$ que circunscribe al triángulo ABC (los vértices B y C tienen que estar en lados distintos del cuadrado).

(ii) Explicar paso a paso cómo construir el cuadrado $AXYZ$ con regla y compás.

Solución. (i) Sea l la longitud del cuadrado y x la longitud del segmento XC. Los triángulos rectángulos AXC y BYC son semejantes (puesto que $\angle BCY = \pi/2 - \angle ACX = \angle CAX$), de donde $l/b = (l - x)/a$, es decir, $x/l = (b - a)/b$. Entonces, aplicando el Teorema de Pitágoras,

$$b^2 = l^2 + x^2 = l^2(1 + (\frac{x}{l})^2) = l^2(1 + \frac{(b-a)^2}{b^2}),$$

de donde $l = b^2/\sqrt{(b-a)^2 + b^2}$.



(ii) Para construir el cuadrado observamos que, por (i), se tiene que la tangente del ángulo $\alpha = \angle CAX$ es $x/l = (b-a)/b$. Prolongamos el lado BC del triángulo hasta un punto B' de modo que BB' mida b unidades. Así, CB' mide $b-a$ y el ángulo $\angle CAB'$ tiene tangente $(b-a)/b$. El vértice X del cuadrado que buscamos tiene que estar entonces sobre la recta que contiene a A y B'. Por otro lado, el ángulo $\angle AXC$ tiene que ser de $90°$, así que X tiene que estar sobre la circunferencia con diámetro AC. Por lo tanto, basta con trazar esta circunferencia y su intersección con la recta por A y B' será el punto X buscado. Los puntos Y y Z que completan el cuadrado se obtienen ahora fácilmente.

Viernes tarde, segunda sesión

4. Las tres raíces del polinomio $x^3 - 14x^2 + Bx - 84$ son los lados de un triángulo rectángulo. Hallar B.

Solución. Sean u, v y w las tres raíces y supongamos que $w^2 = u^2+v^2$. Por las relaciones de Cardano, $u+v+w = 14$, $uv+uw+vw = B$ y $uvw = 84$. Si $s = u+v$ y $p = uv$, se tiene entonces que $s+w = 14$, $pw = 84$ y $s^2 = w^2+2p$. Sustituyendo en esta última ecuación los valores de s y p en función de w y operando, queda $w^2 - 7w + 6 = 0$, luego $w = 1$ ó 6. Si fuera $w = 1$, tendríamos $s = 13$, $p = 84$ y u y v serían raíces de $x^2 - 13x + 84 = 0$, que no tiene soluciones reales. Por tanto, $w = 6$, $s = 8$, $p = 14$ y $B = p + ws = 62$. (Efectivamente, las tres raíces de $x^3 - 14x^2 + 62x - 84$ son 6, $4+\sqrt{2}$ y $4-\sqrt{2}$ y $6^2 = (4+\sqrt{2})^2 + (4-\sqrt{2})^2$.)

5. En un triángulo ABC la bisectriz por A, la mediana por B y la altura por C son concurrentes y además la bisectriz por A y la mediana por B son perpendiculares. Si el lado AB mide una unidad, hallar cuánto miden los otros dos lados.

Solución. Damos dos soluciones diferentes.

Solución 1. Sean P, M y Q los pies de la bisectriz por A, la mediana por B y la altura por C, respectivamente, que se cortan en el punto X. En el triángulo ABM la bisectriz por A, AX, es perpendicular a BM (puesto que por hipótesis la mediana y la bisectriz de ABC son perpendiculares), por tanto $\angle ABX = \angle AMX$, esto es ABM es isósceles y $AM = AB = 1$, con lo cual $AC = 2$.

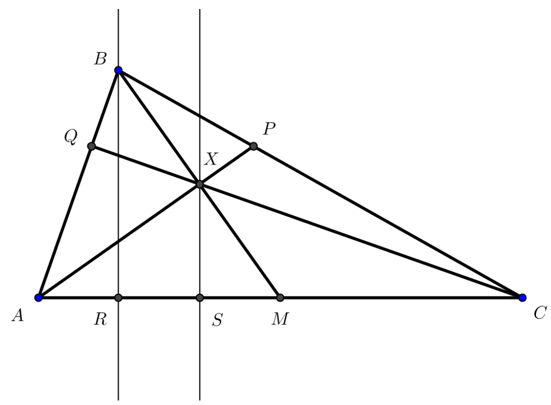
Sea $BP = x$ y $BQ = y$. Por el Teorema de la bisectriz, $BP/AB = PC/AC$, esto es $PC = 2x$. Ahora, por el Teorema de Ceva,

$$1 = \frac{MC}{CP} \cdot \frac{PB}{BQ} \cdot \frac{QA}{AM} = \frac{1}{2x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{1-y}{1},$$

de donde $y = 1/3$. Trazamos las perpendiculares a AC por B y X, respectivamente con pies R y S. Los triángulos XQB y XSM son congruentes (son rectángulos, $XB = XM$ por ser AX la altura del triángulo isósceles ABM y $XQ = XS$ por ser perpendiculares a los lados AB y AC desde un punto de la bisectriz), por tanto $SM = BQ = y = 1/3$. Por otro lado, por el Teorema de Thales, $BX = XM$ implica $RS = SM$, luego $RS = 1/3$ y $AR = AM - RS - SM = 1/3$. Finalmente, por el Teorema de Pitágoras,

$$BC^2 = BR^2 + RC^2 = AB^2 - AR^2 + RC^2 = 1 - \frac{1}{9} + (2 - \frac{1}{3})^2 = \frac{11}{3}.$$

Así pues, los otros dos lados miden 2 y $\frac{\sqrt{33}}{3}$.



Solución 2. Igual que antes, $AC = 2$. Fijamos un sistema de coordenadas con origen en A de forma que $\vec{AC} = (2, 0)$. Sea $\vec{AB} = (x, y)$. Entonces

$$\vec{CX} = \vec{CA} + \vec{AX} = (-2, 0) + (\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}) = (\frac{x-3}{2}, \frac{y}{2})$$

(notar que X es el punto medio de BM). Pero los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CX}$ son ortogonales, luego $x(x-3) + y^2 = 0$. Como $x^2 + y^2 = 1$, $x = 1/3$ e $y = \sqrt{8}/3$. Por el Teorema de Pitágoras, $BC^2 = y^2 + (2-x)^2 = 11/3$, esto es $BC = \sqrt{33}/3$.

6. ¿De cuántas formas se pueden colorear los vértices de un polígono con $n \geq 3$ lados usando tres colores de forma que haya exactamente m lados, $2 \leq m \leq n$, con los extremos de colores diferentes?

Solución. En el polígono señalamos los puntos medios de los m lados cuyos extremos deben colorearse con colores diferentes. Esto puede hacerse de $\binom{n}{m}$ formas. Los n vértices del polígono quedan divididos así en m grupos de vértices consecutivos en los que todos ellos tienen el mismo color pero los vértices de grupos adyacentes tienen colores diferentes. Hay entonces tantas formas de colorear estos grupos como formas de colorear un polígono de m lados sin que haya ningún lado con los extremos del mismo color (que es en realidad el caso particular $m = n$ del problema; esta interpretación también es válida si $m = 2$ considerando el "polígono" con 2 vértices unidos por un doble lado). La solución será entonces $\binom{n}{m}C_m$, donde C_m es este número.

Obtendremos C_m encontrando una relación de recurrencia para estos números. Obviamente, $C_2 = C_3 = 6$. Supongamos entonces $m \geq 4$ y fijemos tres vértices consecutivos P_1, P_2, P_3. Si P_1 y P_3 van coloreados de forma distinta, simplemente podemos unirlos directamente eliminando P_2 y resultará un polígono con $m-1$ lados a colorear de la forma indicada. Recíprocamente, cada uno de estos polígonos coloreados dará origen a uno con m lados (el color de P_2 quedará determinado por los de P_1 y P_3), por tanto contribuyen a C_m con C_{m-1} posibilidades. Por otro lado, si P_1 y P_3 tienen el mismo color, los podemos pegar eliminando P_2, resultando un polígono con $m-2$ lados que tendremos que colorear. Cada una de estas coloraciones dará origen ahora a 2 coloraciones para el polígono original (pues habrá 2 posibilidades para P_2) y por tanto, la contribución a C_m de este caso es $2C_{m-2}$. Encontramos así la relación de recurrencia buscada: $C_m = C_{m-1} + 2C_{m-2}$.

De la relación anterior obtenemos fácilmente los primeros valores de C_m, $m \geq 2$: 6, 6, 18, 30, 66, 126,... Si comparamos esta sucesión con la de las potencias de 2: 4, 8, 16, 32, 64, 128,..., parece obvio que $C_m = 2^m + (-1)^m 2$, fórmula que se puede confirmar fácilmente por inducción. En efecto, la fórmula es correcta para C_2 y C_3 y, si $m \geq 4$,

$$C_m = C_{m-1} + 2C_{m-2} = 2^{m-1} + (-1)^{m-1}2 + 2(2^{m-2} + (-1)^{m-2}2) = 2^m + (-1)^m 2.$$

Por tanto la solución es $\binom{n}{m}(2^m + (-1)^m 2)$.