# L Olimpiada Matemática Española

Fase aragonesa

Soluciones a los problemas

1. *Tenemos 50 fichas numeradas del 1 al 50, y hay que colorearlas de rojo o azul. Sabemos que la ficha 5 es de color azul y que la coloración debe satisfacer las dos propiedades siguientes:*

   *a) Si la ficha con el número $x$ y la ficha con el número $y$ son de distinto color, entonces el color de la ficha con el número $|x-y|$ debe ser rojo.*

   *b) Si la ficha con el número $x$ y la ficha con el número $y$ son de distinto color y $x \cdot y$ es un número entre $1$ y $50$ (incluyendo ambos), entonces el color de la ficha con el número $x \cdot y$ debe ser azul.*

   *Determinar cuántas coloraciones distintas se pueden realizar en el conjunto de fichas.*

   **Solución:** Observemos que las fichas con dos números que se diferencian en 5 tienen el mismo color. En efecto, si fueran de distinto color, su diferencia debería ser de color rojo, por la regla a). Pero su diferencia es 5, que es de color azul. Por tanto basta con saber el color de los 4 primeros números. Distinguimos dos casos: **1)** que la ficha 1 sea de color azul y **2)** que la ficha 1 sea de color rojo.

   **1)** Si 1 es de color azul, todas las fichas tienen color azul por la regla b). Esto es así porque si la ficha de número $k \neq 1$ fuera roja, entonces por b), $k = k \cdot 1$ tendría que ser azul, lo que contradice que $k$ sea roja.

   **2)** Si 1 es roja, por la regla a) $4 = 5 - 1$ es roja. Para determinar el color de 2 y 3, supongamos que 3 es azul. Por ser $2 = 3 - 1$ y ser 3 y 1 de diferente color, entonces 2 es roja. Ahora bien $3 = 5 - 2$ y 5 es azul y 2 roja, por lo tanto 3 es roja. Esto no puede ser, por lo tanto 3 no puede ser azul y es roja, por lo que 2 también es roja. Así pues, 1, 2, 3 y 4 son rojas, lo mismo que el resto de fichas que no son múltiplo de 5.

Por tanto, solo hay dos coloraciones posibles, o todas las fichas de color azul o todas rojas, excepto los múltiplos de 5 que son azules. Es fácil comprobar que ambas satisfacen las condiciones requeridas.

2. *Determinar cuántas soluciones reales tiene la ecuación*

$$\sqrt{2-x^2} = \sqrt[3]{3-x^3}$$

**Solución:** Para que existan soluciones reales tiene que ser $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Ahora bien, si $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$, se tiene que

$$2 - x^2 \leq 2, \qquad 3 - x^3 \geq 3,$$

y $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$, por lo que no hay soluciones si $x \in [-\sqrt{2}, 0]$. Tampoco $x = \sqrt{2}$ es solución, por lo que basta buscar soluciones con $0 < x < \sqrt{2}$.

Notemos que si $0 < z < 1$, entonces $0 < z^3 < z^2$ y $0 < \sqrt{z} < \sqrt[3]{z}$. Por tanto, $0 < \sqrt{1-z^2} < \sqrt[3]{1-z^2} < \sqrt[3]{1-z^3}$. Así, para $0 < x < \sqrt{2}$ se tiene

$$\begin{aligned}\sqrt{2-x^2} &= \sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &< \sqrt{2}\sqrt[3]{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^3} = \sqrt[3]{\sqrt{2}^3 - x^3} < \sqrt[3]{3-x^3}.\end{aligned}$$

Deducimos que nuestra ecuación no tiene soluciones reales.

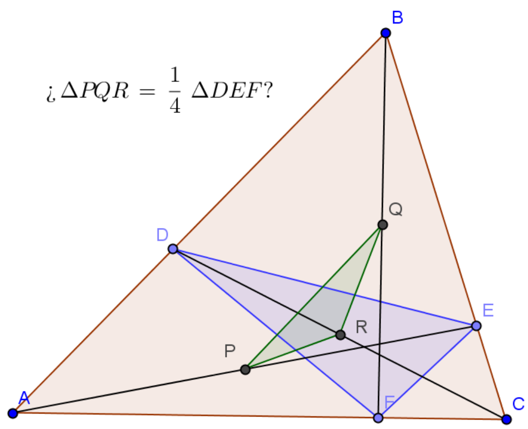
**Otra solución:** Como antes, basta considerar $x \in (0, \sqrt{2})$. Ahora bien, si elevamos a la sexta potencia ambos lados y restamos, se tiene

$$\begin{aligned}(3-x^3)^2 - (2-x^2)^3 &= 2x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 1 \\ &= 2x^2\left((2-x^2)^2 + 4x^2 - 4\right) - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 1 \\ &= 2x^2(2-x^2)^2 + 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 1 \\ &= 2x^2(2-x^2)^2 + 2x^2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(2-x^2) > 0,\end{aligned}$$

de donde deducimos que no hay solución.

3. *Sea $\Delta ABC$ un triángulo y $D$, $E$ y $F$ tres puntos cualesquiera sobre los lados $AB$, $BC$ y $CA$ respectivamente. Llamemos $P$ al punto medio de $AE$, $Q$ al punto medio de $BF$ y $R$ al punto medio de $CD$. Probar que el área del triángulo $\Delta PQR$ es la cuarta parte del área del triángulo $\Delta DEF$.*

   **Solución:** Hagamos primero un dibujo donde queden reflejados los elementos que intervienen en el problema.




   Recordemos que el área de un triángulo determinado por dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en el espacio (en nuestro caso tenemos el triángulo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$) es

$$\frac{1}{2}|\vec{u}||\vec{v}||\mathrm{sen}(\alpha)| = \frac{1}{2}\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|,$$

   donde $\alpha$ es el ángulo que forman y $\times$ es el producto vectorial. Consideramos los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Entonces existen escalares $0 \leq \mu, \nu, \lambda \leq 1$ tales que

$$\overrightarrow{AD} = \mu\vec{u}, \quad \overrightarrow{AF} = \nu\vec{v} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{AE} = \lambda\vec{u} + (1-\lambda)\vec{v}.$$

   En consecuencia, el triángulo $\Delta DEF$ está determinado por los vectores $\overrightarrow{DE} = (\lambda - \mu)\vec{u} + (1-\lambda)\vec{v}$ y $\overrightarrow{DF} = -\mu\vec{u} + \nu\vec{v}$, y el área del triángulo

$\Delta DEF$ es

$$\begin{aligned}
\text{área}_{\Delta DEF} &= \frac{1}{2}\left|\big((\lambda-\mu)\vec{u}+(1-\lambda)\vec{v}\big)\times\big(-\mu\vec{u}+\nu\vec{v}\big)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|(\lambda-\mu)\nu+(1-\lambda)\mu\right|\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\lambda\nu-\mu\nu-\lambda\mu+\mu\right|\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|.
\end{aligned}$$

Por otra parte tenemos que

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\big(\lambda\vec{u}+(1-\lambda)\vec{v}\big),\quad \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\big(\vec{u}+\nu\vec{v}\big)\quad\text{y}\quad \overrightarrow{AR}=\frac{1}{2}\big(\mu\vec{u}+\vec{v}\big),$$

de donde deducimos que

$$\begin{aligned}
\text{área}_{\Delta PQR} &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{RP}\times\overrightarrow{RQ}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\big((\lambda-\mu)\vec{u}-\lambda\vec{v}\big)\times\frac{1}{2}\big((1-\mu)\vec{u}+(\nu-1)\vec{v}\big)\right| \\
&= \frac{1}{8}\left|(\lambda-\mu)(\nu-1)+\lambda(1-\mu)\right|\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| \\
&= \frac{1}{8}\left|\lambda\nu-\mu\nu+\mu-\lambda\mu\right|\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|.
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\text{área}_{\Delta PQR}=\frac{1}{4}\text{área}_{\Delta DEF}.$$

4. *Se considera un polígono regular de 90 vértices, numerados del 1 al 90 de manera aleatoria. Probar que siempre podemos encontrar dos vértices consecutivos cuyo producto es mayor o igual que 2014.*

**Solución:** Como $45^2 > 2014$, no puede haber dos vértices consecutivos con número entre 45 y 90. Por lo tanto, para que no se cumpliera el enunciado, los números que deben ir a izquierda y derecha de los vértices numerados del 45 al 90 tendrían que ser menores o iguales que 44. Sin embargo, entre los vértices numerados del 45 al 90 debería haber, al menos, 46 vértices.

5. *Hallar las soluciones enteras de la ecuación*

$$x^4 + y^4 = 3x^3y$$

**Solución:** Es claro que $(0,0)$ es solución (la solución trivial) y que si $(x,y)$ es solución y $(x,y) \neq (0,0)$, entonces o bien $x, y > 0$ o bien $x, y < 0$. Además el par $(-x,-y)$ también es solución. Por otra parte, si $(x,y)$ es solución y $d$ es un divisor común de $x$ e $y$, también $\left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}\right)$ es solución. Por tanto, si existiera una solución no trivial, existiría una solución $(x,y)$ con $x, y > 0$ y $x$ e $y$ primos entre sí. Ahora bien, si $x > 1$ y $p$ es un divisor primo de $x$, como $p$ divide a $x^4$ y a $3x^3y$, también divide a $y$, lo que contradice el que $x$ e $y$ sean relativamente primos. Por tanto, $x = 1$. Del mismo modo probamos que $y = 1$. Pero $(1,1)$ no es solución. Concluimos que no hay soluciones no triviales. Así pues, la única solución es $x = 0 = y$.

6. *Probar que*

$$2014^{2013} - 1013^{2013} - 1001^{2013}$$

*es múltiplo de*

$$2014^3 - 1013^3 - 1001^3$$

**Solución:** Ninguno de los números $a = 1013$, $b = 1001$ y $a+b = 2014$ es múltiplo de 3. Debemos probar que $(a+b)^{2013} - a^{2013} - b^{2013}$ es múltiplo de

$$(a+b)^3 - a^3 - b^3 = 3a^2b + 3ab^2 = 3ab(a+b).$$

Por el binomio de Newton se tiene:

$$(a+b)^{2013} - a^{2013} - b^{2013} = \sum_{n=1}^{2012} \binom{2013}{n} a^{2013-n} b^n,$$

y agrupando las parejas "simétricas"

$$\begin{aligned}(a+b)^{2013} - a^{2013} - b^{2013} &= \sum_{n=1}^{1006} \binom{2013}{n} \left(a^{2013-n} b^n + a^n b^{2013-n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{1006} \binom{2013}{n} (ab)^n \left(a^{2013-2n} + b^{2013-2n}\right).\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que para $m$ impar

$$a^m + b^m = (a+b)(a^{m-1} - a^{m-2}b + - \cdots + b^{m-1}) = (a+b)p_m(a,b),$$

podemos escribir

$$(a+b)^{2013} - a^{2013} - b^{2013} = \sum_{n=1}^{1006} \binom{2013}{n} (ab)^n (a+b) p_{2013-2n}(a,b),$$

probando así que $(a+b)^{2013} - a^{2013} - b^{2013}$ es múltiplo de $ab(a+b)$. Finalmente, $2014 = \dot{3} + 1$ (múltiplo de 3 más 1), $1013 = \dot{3} - 1$ y $1001 = \dot{3} - 1$, luego

$$\begin{aligned}(a+b)^{2013} - a^{2013} - b^{2013} &= (\dot{3}+1)^{2013} - (\dot{3}-1)^{2013} - (\dot{3}-1)^{2013} \\ &= \dot{3} + \left(1^{2013} - (-1)^{2013} - (-1)^{2013}\right) \\ &= \dot{3} + (1+1+1) = \dot{3}.\end{aligned}$$