

Preparación Olímpica I

Glenier Bello (gbello@unizar.es)

Problema 1. Demostrar que un número es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus cifras es divisible por 3.

Problema 2. Sea n un número impar no divisible por 3. Probar que $n^2 - 1$ es divisible por 24.

Problema 3. Demostrar que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ es múltiplo de 7.

Problema 4. Probar que existen infinitos primos de la forma $4k - 1$, con $k \in \mathbb{N}$.

Problema 5. Demostrar que si en un triángulo rectángulo las longitudes de sus tres lados son números naturales entonces el producto de ellas es múltiplo de 60.

Problema 6. Sea n un entero no negativo. Probar que $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$ siempre es divisible por algún número del conjunto $\{3, 5, 13\}$.

Problema 7. Hallar todos los primos p y q tales que $p + q = (p - q)^3$.