Teoría de Juegos

Taller de Talento Matemático

En el programa de televisión *El Hormiguero* hay una sección en la que un colaborador llamado Don Rogelio reta a personas del público al siguiente juego: *sobre una mesa hay tres filas de palos, con tres palos, cinco palos y siete palos respectivamente. En su turno, el jugador puede eliminar tantos palos de una misma fila como quiera. El jugador que quite el último palo, pierde.* Don Rogelio siempre gana, pero ¿es posible ganarle a Don Rogelio?

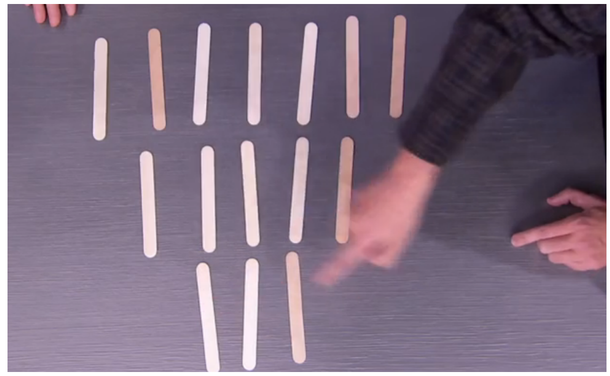

Figure 1: Juego Nim en *El Hormiguero*

1 NIM

El juego anterior puede generalizarse al caso de un número arbitrario de montones con un número arbitrario de palos en cada uno de ellos. Recibe el nombre de NIM, y su origen es tan antiguo como incierto, aunque se cree que nació en China, y sus primeras referencias Europeas datan del siglo XVI. Formalicemos las cosas:

Hay n montones de palos situados sobre una mesa, y el montón k tiene x_k palos, $k = 1, ..., n$. Dos jugadores se turnan para quitar tantos palos como quieran de un mismo montón. Según se juege en modo *normal* o *misère* el jugador que quite el último palo ganará o perderá, respectivamente. En el programa se juega en modo *misère*, pero nosotros vamos a realizar el desarrollo en modo *normal*, por simplicidad y analogía con otros juegos.

Antes de seguir leyendo, recomiendo probar a jugar contra otra persona unas cuantas partidas. Se puede empezar jugando con la versión del programa ($n = 3$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$) o bien probar con otras cantidades, la idea es enfrentarse al juego durante unos diez minutos aproximadamente.

1.1 Resolución del NIM

Situación 1: Hay un solo montón en juego. Naturalmente, el jugador que tenga el turno quitará todos los palos de dicho montón y ganará, dejando 0 palos.

Situación 2: Hay dos montones en juego, con el mismo número de palos. El jugador actual no tiene nada que hacer: quite los palos que quite del montón que sea, el otro deberá simplemente quitar los mismos del otro montón hasta que el jugador actual termine por hacer desaparecer uno de los montones, y el otro termine con el restante, ganando así la partida.

Situación 3: Hay dos montones en juego, uno de los cuales tiene más palos que el otro. El jugador actual puede entonces quitar ese excedente de palos al montón que más tenga, dejando el juego en situación 2 al otro jugador y por consiguiente ganado la partida él mismo.

Observamos entonces que las situaciones en las que hay dos montones pueden clasificarse en buenas o malas según el número de palos de ambos montones sea distinto o igual, respectivamente. Matemáticamente, los únicos datos que tenemos son los tamaños de los montones, así que para etiquetar una situación como buena o mala tenemos que utilizar este dato. Si los tamaños son iguales, eso significa que el número total de palos en juego es par. La noción de paridad está estrechamente relacionada con el sistema binario.

1.1.1 El sistema binario

Estamos acostumbrados a trabajar con números en el sistema decimal, esto es, dado un número, sus cifras expresan los coeficientes de su descomposición en base 10. Así, por ejemplo

$$57408 = 5 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0.$$

Al descomponer un número en potencias de base 10, los coeficientes de dichas potencias son números enteros comprendidos entre 0 y 9. Dichos coeficientes se corresponden con las cifras del número. Así pues, para los números hasta el 9 basta con una sola cifra, mientras que los números hasta el 99 requieren de un máximo de dos cifras, los números hasta el 999 un máximo de tres cifras, y así sucesivamente.

El sistema binario es el análogo del sistema decimal si tomamos como base el 2. Por ejemplo

$$59 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0,$$

y entonces decimos que la representación binaria del 59 es 111011, y escribimos $59_{10} = 111011_2$. Puesto que trabajamos con potencias de 2, los coeficientes de dichas potencias en la descomposición son números enteros comprendidos entre 0 y 1. Dichos coeficientes se corresponden con las cifras de la representación binaria del número, también llamadas *bits*. Así pues, para los números hasta el 1 basta con una sola cifra, mientras que los números hasta el 3 requieren de un máximo de dos cifras, los números hasta el 7 un máximo de tres cifras, y así sucesivamente. El número 59 ha requerido de seis cifras, pues la menor potencia de 2 que está por encima del 59 es $64 = 2^6$.

De esta forma, se tiene que un número es par si y solamente si la cifra más a la derecha en su representación binaria es 0 e impar si y solamente si dicha cifra es 1. Así, si expresamos en binario la suma de los tamaños de los dos montones, podemos ver si el número es impar, en cuyo caso la situación es buena. Sin embargo, si es par, eso no implica necesariamente que sea mala; hará falta refinar un poco más el criterio, y para ello examinar algunos casos más.

Situación 4: Hay tres montones en juego, dos de los cuales tienen el mismo número de palos, y el tercero un número distinto. El jugador actual puede entonces quitar ese tercer montón distinto, dejando el juego en situación 2 al otro jugador y por consiguiente ganado la partida él mismo.

Situación 5: Hay tres montones en juego, con cantidades arbitrarias. Esta es, de hecho, la situación con la que nos encontramos al principio de la sesión ($n = 3$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$). ¿Qué podemos hacer aquí? Parece que en toda situación el objetivo último es llegar a la situación 2, en la cual hay dos montones con el mismo número de palos. Pero, ¿existe siempre un camino para ello que asegure la victoria?

Al haber tres montones (o más) en juego, ya no nos vale exactamente la idea de sumar los montones o de mantener montones iguales. Surge así la necesidad de crear un indicador de cuándo una situación es de alguna manera similar a la 2, de cuándo los montones que dejamos en juego mantienen esa relación característica de un juego con dos montones iguales. Creamos para ello una operación en el sistema binario que valga 0 cuando se operen dos cosas iguales, y 1 cuando se operen dos cosas distintas.

1.1.2 La suma *XOR bit a bit*

Sean n y m dos números en sistema binario. Se define la suma *XOR bit a bit* de n y m, y se escribe $n \oplus m$, como el número en binario cuyas cifras resultan de operar bit a bit como sigue:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

es decir, si los bits son iguales el bit resultante es 0, y si son distintos el bit resultante es 1. A modo de ejemplo, sea $n = 101_2$ y $m = 110_2$. Entonces,

$$n \oplus m = (1 \oplus 1) \cdot 2^2 + (0 \oplus 1) \cdot 2^1 + (1 \oplus 0) \cdot 2^0 = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 011_2.$$

Algunas propiedades de la suma *XOR bit a bit* son:

a) Es conmutativa pues lo es bit a bit ya que $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0$.

b) Es asociativa, pues lo es bit a bit ya que $(0\oplus 0)\oplus 0 = 0\oplus(0\oplus 0) = 0$, $(0\oplus 0)\oplus 1 = 0\oplus(0\oplus 1) = 1$, y análogamente con todas las posibles combinaciones.

c) $n \oplus n = 0$, pues los bits que ocupan la misma posición son iguales, y $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$. Más aún, si $n \neq m$, entonces $n \oplus m \neq 0$, pues hay alguna posición en la que los bits de n y m no coinciden, dando lugar a un 1 en la correspondiente posición de la suma.

d) $n \oplus 0 = n$, pues estamos sumando 0 en cada bit y $0 \oplus 0 = 0$, $1 \oplus 0 = 1$.

De aquí en adelante llamaremos *nim-suma* a la suma *XOR bit a bit*. Además, haremos un abuso de notación y utilizaremos el símbolo $\oplus$ entre números en sistema decimal, significando esto que la nim-suma de x e y es la representación decimal de la nim-suma de las representaciones binarias de x y y. Por ejemplo $5_{10} \oplus 6_{10} = 101_2 \oplus 110_2 = 011_2 = 3_{10}$.

1.1.3 La fórmula ganadora

En cada situación de juego, deberemos calcular la *nim-suma* de los tamaños de los montones en juego. Si dicha *nim-suma* es nula, cualquier movimiento provocará una nueva situación con *nim-suma* no nula (se cambia al menos uno de los bits de uno de los montones). En caso contrario, si la *nim-suma* inicial no fuera nula, podríamos encontrar un movimiento para provocar una situación de *nim-suma* nula. Dependiendo si al principio del juego la *nim-suma* es nula o no, ganará el segundo o el primer jugador, respectivamente siempre que en cada movimiento provoque una situación de *nim-suma* nula.

Lo que sigue es la formalización de esta fórmula ganadora, que escapa el nivel al que va dirigida la sesión, si bien se incluye aquí por si es de interés y utilidad para el lector.

Sea $n \in \mathbb{N}$ el número de montones del juego y sea $l \in \mathbb{N}$ el número de movimientos que tiene la partida. Centrémonos en el movimiento i-ésimo, $i = 1, ..., l$. Sean $x_1, ..., x_n \in \mathbb{N}$ los tamaños de cada montón antes de tal movimiento, y sean $y_1, ..., y_n \in \mathbb{N}$ los tamaños de los montones respectivos después de tal movimiento. Sean $s = x_1 \oplus \cdots \oplus x_n$ y $t = y_1 \oplus \cdots \oplus y_n$.

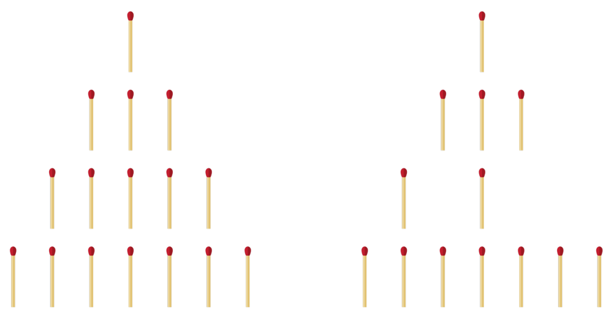

Figure 2: Ejemplo de movimiento en juego NIM

En el ejemplo de la figura 2 tenemos representadas la situación inicial del juego y el resultado del primer movimiento ($i = 1$). En este caso $n = 4$, $x_1 = y_1 = 1$, $x_2 = y_2 = 3$, $x_3 = 5$, $y_3 = 2$, $x_4 = y_4 = 7$. Así pues,

$$s = 1 \oplus 3 \oplus 5 \oplus 7 = 0$$
$$t = 1 \oplus 3 \oplus 2 \oplus 7 = 7$$

Notar que, lógicamente, todos los x_j coinciden con los y_j salvo uno, el del montón donde se ha producido el movimiento.

En el modelo general, supongamos, sin pérdida de generalidad, que el movimiento se realiza en el montón k-ésimo, por lo tanto $x_j = y_j$ para cada $j \neq k$ y $x_k > y_k$. Se tiene que

$$\begin{aligned} t &= 0 \oplus t \\ &= s \oplus s \oplus t \\ &= s \oplus (x_1 \oplus \cdots \oplus x_n) \oplus (y_1 \oplus \cdots \oplus y_n) \\ &= s \oplus (x_1 \oplus y_1) \oplus \cdots \oplus (x_n \oplus y_n) \\ &= s \oplus 0 \oplus \cdots \oplus (x_k \oplus y_k) \oplus \cdots \oplus 0 \\ &= s \oplus x_k \oplus y_k \end{aligned}$$

Lema 1: si $s = 0$, entonces $t \neq 0$ independientemente del movimiento.

Demostración: asumiendo que el movimiento se realiza en el montón k, se tiene por lo anterior que $t = s \oplus x_k \oplus y_k = 0 \oplus x_k \oplus y_k = x_k \oplus y_k$. Puesto que $x_k \neq y_k$, esta *nim-suma* no es nula. Así, $t = x_k \oplus y_k \neq 0$.

Lema 2: si $s \neq 0$, entonces existe algún movimiento para el cual $t = 0$

Demostración: sea d la posición del bit distinto de 0 más a la izquierda en la representación binaria de s. Sea k tal que el bit d-ésimo de la representación binaria de x_k sea también distinto de 0, que existe, pues en otro caso el bit d-ésimo de s sería 0.

Hagamos un movimiento en el montón k de manera que $y_k = s \oplus x_k$, lo cual es posible porque $s \oplus x_k < x_k$: todos los bits a la izquierda del d-ésimo son iguales en ambos ya que son nulos en s, el bit d-ésimo disminuye de 1 a 0, porque sumamos $1 \oplus 1$, y cualquier cambio en los bits restantes ascenderá a $2^d - 1$ como máximo:

	2^m	$\cdots$	2^{d+1}	2^d	2^{d-1}	$\cdots$	2^1	2^0
s	0	$\cdots$	0	1	S_{d-1}	$\cdots$	S_1	S_0
x_k	X_m	$\cdots$	X_{d+1}	1	X_{d-1}	$\cdots$	X_1	X_0
$s \oplus x_k$	X_m	$\cdots$	X_{d+1}	0	$S_{d-1} \oplus X_{d-1}$	$\cdots$	$S_1 \oplus X_1$	$S_0 \oplus X_0$

Tal movimiento resultará en $t = s \oplus x_k \oplus y_k = s \oplus x_k \oplus (s \oplus x_k) = (s \oplus s) \oplus (x_k \oplus x_k) = 0 \oplus 0 = 0$.

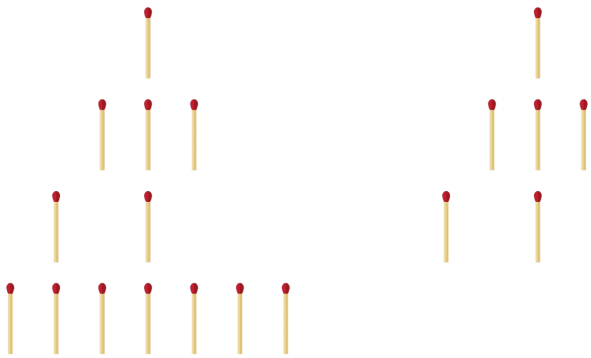

Figure 3: Ejemplo de movimiento para *nim-suma* nula

En el ejemplo anterior, la *nim-suma* inicial era nula, de modo que el lema 1 garantiza que cualquier movimiento da lugar a una situación de *nim-suma* no nula, como la de la figura 3.

Ahora, al ser la *nim-suma* no nula, podemos hacer un segundo movimiento ($i = 2$) que dé lugar a una situación de *nim-suma* nula, por el lema 2. Puesto que $s = 7_{10} = 111_2$, $d = 2$, y necesariamente $k = 4$ con lo que $x_k = 7_{10} = 111_2$. El movimiento tiene que ser tal que $y_k = s \oplus x_k = 0$, así que hay que eliminar todos los palos de la última fila. En efecto así conseguimos $t = 1 \oplus 3 \oplus 2 \oplus 0 = 0$.

Teorema *(NIM):* La estrategia ganadora consiste en terminar cada movimiento con una *nim-suma* de los tamaños de los montones que hay en juego nula.

Demostración: Si se sigue dicha estrategia, por el lema 1 el oponente dejará una situación de nim-suma no nula, y por el lema 2 en el siguiente turno se podrá de nuevo dejar una situación de nim-suma nula. El único que puede ganar la partida es el que sigue el camino de las situaciones de nim-suma nula, pues la situación final ganadora, aquella en la que ya no quedan palos, tiene nim-suma nula trivialmente.

Observación: En el supuesto de que ambos jugadores conozcan la estrategia, el segundo ganará siempre que la *nim-suma* de los tamaños iniciales sea nula, ya que el tal caso su el movimiento inicial del primer jugador dejará una *nim-suma* no nula por el lema 1, pudiendo el jugador 2 devolver el juego a una *nim-suma* nula por el lema 2, y así sucesivamente. En el caso de que la *nim-suma* inicial sea no nula, ganará el primer jugador, pues podrá hacer un movimiento para poner el juego en *nim-suma* nula por el lema 2, y entonces el segundo dejará una *nim-suma* no nula independientemente del movimiento que haga, por el lema 1; y así sucesivamente.

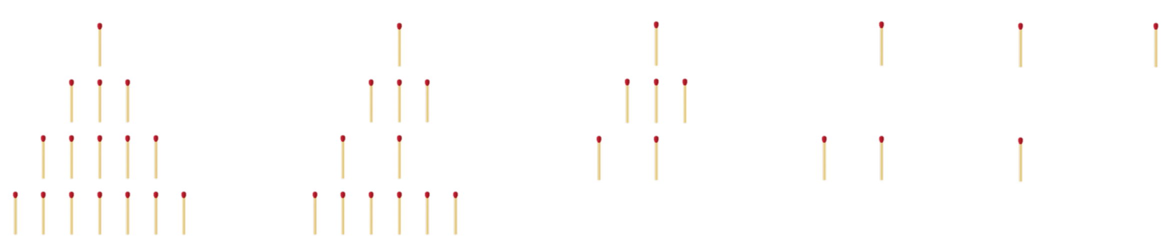

Figure 4: Ejemplo de partida completa con $l = 6$. Puesto que inicialmente $s = 0$, gana el segundo jugador.

Corolario *(Teorema de Don Rogelio)*: En el juego de Don Rogelio gana siempre la persona que empiece mediante la siguiente estrategia: hacer un movimiento que remita a alguna de las siguientes situaciones: $\{0,1,1\}$, $\{0,2,2\}$, $\{0,3,3\}$, $\{0,4,4\}$, $\{0,5,5\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,4,5\}$, $\{1,6,7\}$, $\{1,8,9\}$, $\{2,4,6\}$, $\{2,5,7\}$, $\{3,4,7\}$, $\{3,5,6\}$.

1.2 Definición de juego y concepto de estrategia

La teoría de juegos es un área de la matemática aplicada que utiliza modelos matemáticos para estudiar interacciones en estructuras formalizadas de incentivos, llamadas juegos. Fue desarrollada en sus inicios para entender el comportamiento de la economía, pero recientemente se ha empezado a usar en el desarrollo de inteligencias artificiales, por su aplicación a la construcción de comportamientos racionales.

Se llama **juego** al conjunto de reglas que describen la situación modelada, mientras que se llama **partida** a cada realización de un determinado juego. Asimismo, se llama **movimiento** a la posibilidad de elección de un jugador de acuerdo a las reglas del juego, mientras que se llama **elección** a la alternativa realizada. Así pues, un juego es una secuencia de movimientos, mientras que una partida es una secuencia de elecciones. Se llama **situación** a cada una de las posibilidades que pueden darse en un juego tras una secuencia de movimientos concreta.

Dado un juego, una **estrategia** para un jugador es un plan de acción para cualquier situación que pueda aparecer, determinando completamente la forma de tomar cada elección de la partida. Una estrategia se dice **ganadora** si al seguir un jugador concreto dicha estrategia está asegurada su victoria en toda partida de dicho juego. Por ejemplo, una estrategia en el *NIM* es quitar siempre un palo del montón que más palos tenga, pero claramente no es una estrategia ganadora. La estrategia consistente en realizar un movimiento que conduzca a una situación de *nim-suma* nula sí es ganadora para el jugador que pueda efectuarla. En el caso del juego de Don Rogelio, la estrategia puede reducirse a memorizar una serie de situaciones y realizar elecciones de movimiento que conduzcan a alguna de ellas.

Se dice que un juego es **combinatorio** cuando hay dos jugadores y la información es completa para ambos, sin dejar ninguna elección a la suerte. Son juegos combinatorios desde el *Tres en Raya* hasta el *Ajedrez*, pasando por el *NIM*. Los juegos combinatorios presentan una teoría más sencilla que otros juegos más generales, siendo interesantes para introducirse en esta extensa rama de las matemáticas.

2 CRAM

Pasamos ahora a presentar un segundo juego que es en esencia más sencillo que el NIM, pero que nos va a ayudar a introducir algunas nociones de analogía y diferencias entre ambos para continuar ahondando en la teoría de juegos.

Hay un tablero con una cuadrícula de tamaño $n \times m$. Dos jugadores se turnan para colocar fichas de dominó (de 2×1) en vertical u horizontal sobre el tablero. El jugador que coloque la última ficha gana, o dicho de otro modo, el jugador que no pueda colocar una ficha pierde. Así pues, se trata de un juego combinatorio.

Nuevamente recomiendo que antes de continuar busquéis a un oponente contra el que jugar algunas partidas. Es buena idea probar con tres tipos de tableros: uno con n y m par, uno con n y m par, y uno con n impar y m par. La idea es enfrentarse al juego durante unos diez minutos aproximadamente, tratando de pensar en una posible estrategia (os avecino que va a ser mucho más fácil que la del NIM).

2.1 Resolución del CRAM

Caso 1 (n y m pares): la estrategia ganadora es en este caso para el segundo jugador, y consiste en reflejar el movimiento del otro jugador con respecto del centro, lo cual es posible por la paridad de n y m, en concreto las fichas reflejadas no se solapan con las otras. Siguiendo esta estrategia el segundo jugador siempre va a poder colocar ficha:

- Si la casilla que quiere ocupar está ocupada por el primer jugador, eso quiere decir que en el turno en el que el primer jugador ocupó dicha casilla, el segundo jugador ocupó la simétrica; pero la casilla simétrica es la que acaba de ocupar el primer jugador; contradicción.
- Si la casilla que quiere ocupar está ocupada por el segundo jugador (él mismo), eso quiere decir que la ocupó haciendo el movimiento simétrico a uno anterior del primer jugador, pero eso querría decir que en este movimiento, el primer jugador ha ocupado una casilla que ya había ocupado antes; contradicción.

Acabamos de demostrar que después de cada movimiento del primer jugador, el segundo siempre puede hacer otro. Esto prueba que el segundo jugador nunca se queda sin movimientos y, como el juego es finito, el primer jugador perdería necesariamente.

Caso 2 (n impar y m par): en este caso se pierde la condición de que las fichas simétricas no se solapen, pues hay una en el centro que coincide consigo misma. La estrategia ganadora entonces es para el primer jugador, y consiste en colocar su primera ficha ahí. De tal manera habrá convertido el tablero en uno en el que las fichas simétricas ya no se solapan, y será el segundo jugador de este nuevo juego, pudiendo aplicar la estrategia del caso 1.

Caso 3 (n y m impares): El caso general de este tablero no está resuelto. Sí que hay algunos tableros resueltos, como el caso 3×3, pero para ello va a hacer falta analizar el juego de otra manera, introduciendo una nueva herramienta matemática.

2.1.1 Grafos dirigidos

En Matemáticas, un grafo $G = (V, E)$ es una construcción formada por un conjunto de vértices $V = \{x_1, ..., x_l\}$ y un conjunto de aristas E que consta de parejas de elementos de V, es decir, parejas de vértices. Si la pareja (x_i, x_j) pertenece al conjunto E significa que hay una conexión entre el vértice x_i y el vértice x_j.

Pueden considerarse grafos en los que las aristas representen conexiones unidireccionales, es decir que haya conexión de x_i a x_j, y por tanto $(x_i, x_j) \in E$, pero no la haya de x_j a x_i, y por tanto $(x_j, x_i) \notin E$. Este tipo de grafos se llaman grafos dirigidos.

2.1.2 Resolución del caso 3×3 con un grafo dirigido

Vamos a construir un grafo cuyos vértices sean las posibles situaciones del juego CRAM en un tablero 3×3 (salvo simetrías y rotaciones) y haya una arista de un vértice a otro siempre que se pueda pasar de la primera situación a la segunda. Lógicamente es importante la dirección de la flecha, así que es un grafo dirigido. En particular, cada conexión podrá ir en un único sentido, pues se pueden poner fichas pero no quitarlas.

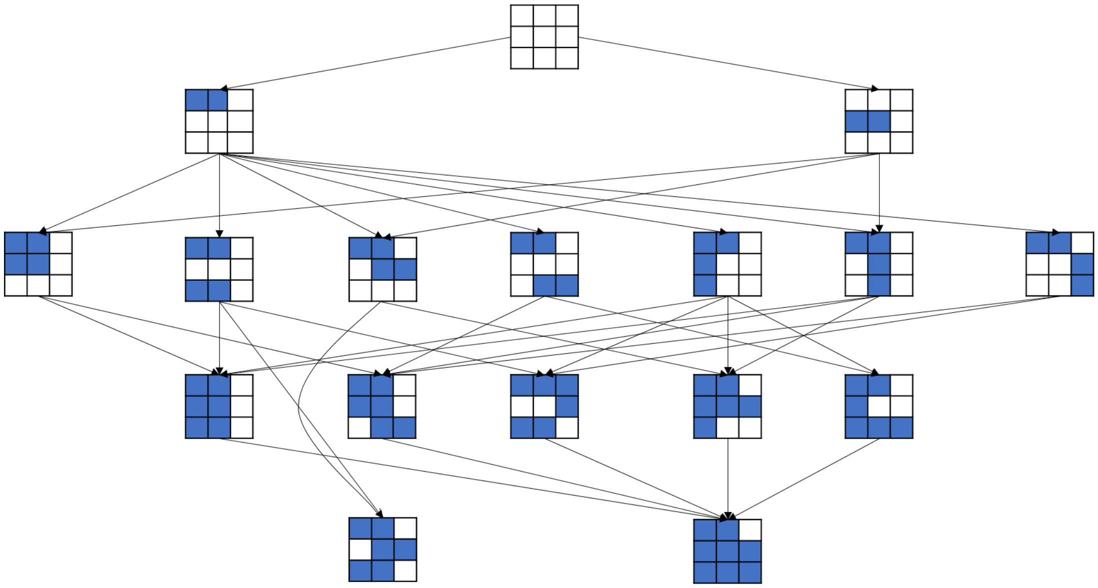

Figure 5: Grafo de situaciones para CRAM 3×3

Ahora que ya lo tenemos construido, vamos a colocar etiquetas a las situaciones (vértices) según si el jugador que tenga el turno en dicha posición pueda ganar o no. En el primer caso pondremos un ✓, y el segundo pondremos una $\times$. Observamos lo siguiente:

- Si desde la situación que examino solamente puedo llegar a situaciones marcadas con ✓, esta deberá ir marcada con una $\times$, pues haga lo que haga el siguiente jugador podrá ganar.
- Si desde la situación que examino puedo llegar a alguna situación marcada con $\times$, esta situación deberá ir marcada con un ✓, pues podré ganar si sigo la estrategia de ir a la situación marcada con $\times$, en la que el siguiente jugador no puede ganar.

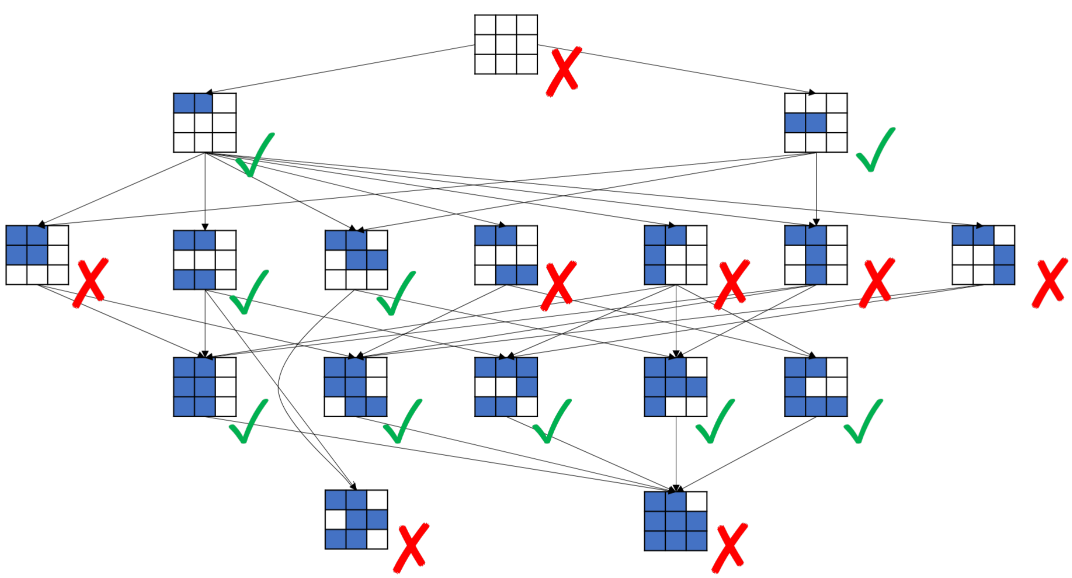

Figure 6: Grafo de situaciones para CRAM 3×3 con etiquetas de situaciones ganadoras

Construido el grafo con sus correspondientes etiquetas, basta ver qué etiqueta tiene la situación de tablero vacía para determinar qué jugador tiene la estrategia ganadora, que consistirá en colocar las fichas de forma que obtenga una situación $\times$, de la cual el otro jugador solo podrá construir una situación $\checkmark$, y a así sucesivamente. En el caso 3×3, la situación de tablero vacío va marcada con $\times$, así que ganará el segundo jugador con la estrategia antes mencionada.

2.2 Forma extensiva de un juego

Se llama **forma extensiva** de un juego al grafo dirigido cuyos vértices son todas las posibles situaciones y cuyas aristas unidireccionales representan la existencia de un movimiento que lleve el juego desde una situación a otra.

Es interesante ver que la forma extensiva de un juego conforma en sí misma una estrategia ganadora para el mismo: bastará etiquetar adecuadamente cada uno de los vértices del grafo y determinar a partir de la etiqueta de la situación inicial qué jugador está en posesión de la estrategia ganadora, que consistirá en elegir siempre movimientos que lleven a una situación etiquetada con $\times$.

El juego del *NIM* también puede representarse en forma extensiva, y tras asignar las correspondientes etiquetas, las situaciones marcadas con $\times$ son aquellas y solamente aquellas que tienen *nim-suma* nula. La estrategia ganadora construida a partir de la forma extensiva coincide entonces con la desarrollada a partir de la *nim-suma* en la sección (1.1.3).

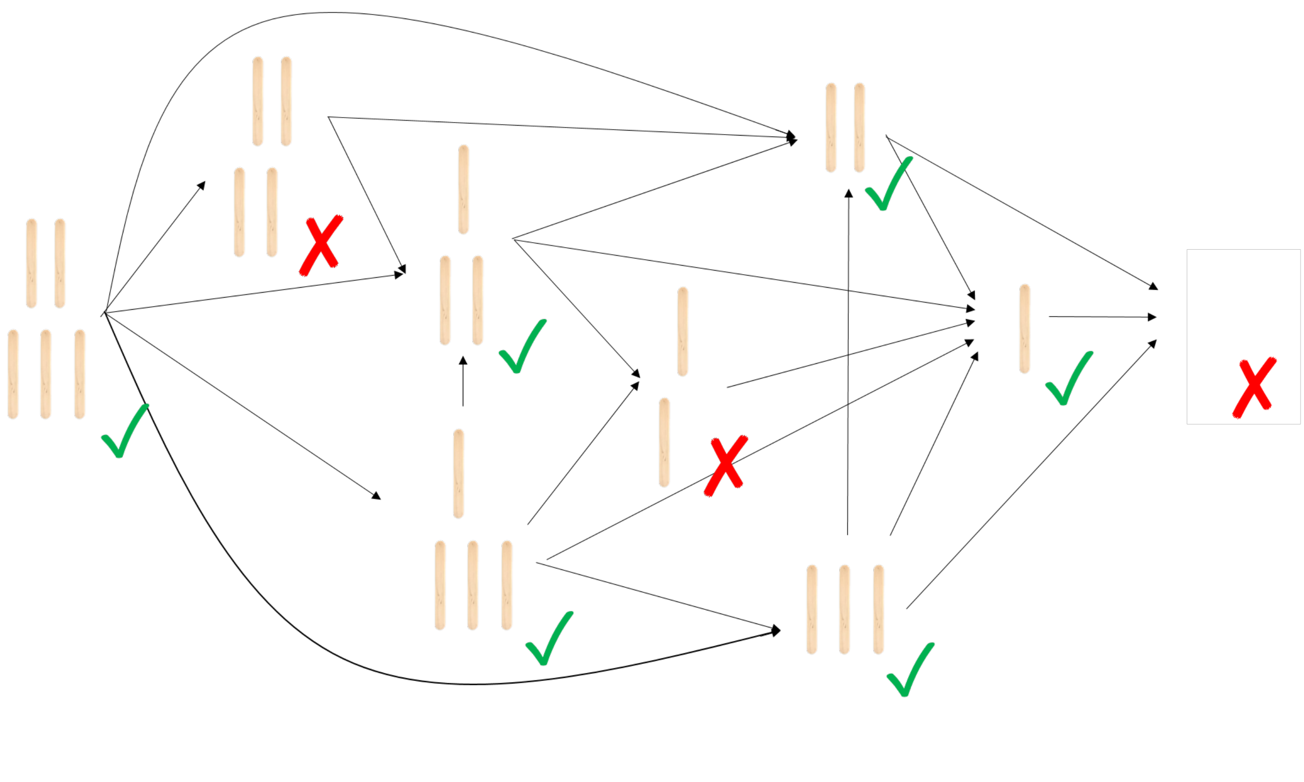

Figure 7: Grafo de situaciones para NIM 2, 3 con etiquetas de situaciones ganadoras

Juegos de *NIM* más grandes también son modelizables en forma extensiva, pero el grafo es cada vez menos controlable. De la misma manera, teóricamente existe un grafo que representa la forma extensiva del ajedrez, pero es tan sumamente grande que no es factible de hacer, mucho menos de memorizar.