RALLYEMATHÉMATIQUE SANS FRONTIÈRES

SOLUCIONES

PRUEBA

2011

1. El pez de Piero della Francesca

Llamemos:

$$peso\ del\ cuerpo = x$$

$$peso\ de\ la\ cabeza = \frac{1}{3} \cdot x$$

$$peso\ de\ la\ cola = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot x = \frac{1}{12} \cdot x$$

Se tiene la ecuación:

$$\frac{1}{3} \cdot x + x + \frac{1}{12} \cdot x = 51$$

De donde obtenemos:

$$17x = 51 \cdot 12$$

Luego $x = 36$

Respuesta: ***peso de la cabeza es 12 libras***

Peso del cuerpo 36 libras

Peso de la cola es de 3 libras

2. Melancholia

a) Al siglo XVI le corresponden como dos primeras cifras de la izquierda 15 (15 - -) por lo que el número inscrito en la ***zona gris es 15***

b) La suma de los números enteros del 1 al 16 es**:**

$$\boldsymbol{S} = \frac{1+16}{2} \cdot 16 = \mathbf{136}$$

c) Como todas las filas suman lo mismo (llamemos a esa suma parcial P) la suma de los 16 números se obtiene sumando las sumas parciales de las cuatro filas. Esto es:

$$S = 4 \cdot P$$

Es decir:

$$P = \frac{136}{4} = \mathbf{34}$$

Nos fijamos en una de las diagonales: 34=13+11+4+a_{32}, luego a_{32}=**6**

La otra diagonal será: 34=16+10+7+ a_{44}, luego a_{44}=**1**

En la cuarta fila tenemos: 4+15+ a_{43}+1=34, de donde a_{43}=**14**

La fecha de creación del cuadro será por tanto 1514

De momento tenemos:

16	**3**	**2**	**13**
	10	**11**	
	6	**7**	
4	**15**	**14**	**1**

Completando la segunda columna, se tiene a_{12}=34-10-6-15=**3**

A partir de esto obtenemos a_{13}=34-16-3-13=**2**

Los números ya utilizados son: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 16. Nos quedan: 5, 8, 9, 12

Como en la tercera fila tenemos 6+7=13, se necesita que $a_{31}+a_{34}=21$ por lo que, de entre 5, 8, 9 y 12, a_{31}y a_{34} solo pueden ser 9 o 12 y por tanto, en la segunda fila estarán a_{21} y a_{24} que podrán ser 5 o 8. Para completar la asignación, completamos la columna primera:

$34=16+4+a_{21}+a_{31}$

$a_{21}+a_{31}=14$

Por lo que a_{21} y a_{31} sólo pueden ser 9 y 5. Como 9 estaba en la tercera fila y 5 en la segunda se tiene a_{31}+=9 y a_{21}=5

Podemos concluir que los números que faltan son: a_{24}=**8** y a_{34}=**12**

Así, el cuadrado mágico completo es:

16	**3**	**2**	**13**
5	**10**	**11**	**8**
9	**6**	**7**	**12**
4	**15**	**14**	**1**

3. La familia Cien

Si llamamos x, y a los dos números, la condición se traduce en la siguiente ecuación:

$$x \cdot y + (y - x) + +xx + y = 100 \; con \; y \geq x$$

Luego,
$$2y + x \cdot y = 100$$
$$y(x+2) = 100 = 2^2 \cdot 5^2$$

Los posibles factores son los divisores de 100. Creamos una tabla teniendo en cuenta que $y \geq x$:

y	x+2	x
10	10	8
20	5	3
25	4	2
~~50~~	~~2~~	~~0~~
~~100~~	~~1~~	~~-1~~

Las dos últimas filas dan resultados imposibles para x (0 y -1) que debe ser entero estrictamente positivo
Por tanto los posibles pares son:

y	x
10	8
20	3
25	2

Podemos comprobar que las tres parejas cumplen la condición:

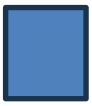
$$10 \cdot 8 + (10 - 8) + (10 + 8) = 80 + 2 + 18 = 100$$
$$20 \cdot 3 + (20 - 3) + (20 + 3) = 60 + 17 + 23 = 100$$
$$25 \cdot 2 + (25 - 2) + (25 + 2) = 50 + 23 + 27 = 100$$

La familia cien está formada por estas tres parejas: (10 y 8) (20 y 3)   y   (25 y 2)

4. Concentración parcelaria

X 

Y

1,3X 

0,7Y

El área inicial es $S = X \cdot Y$

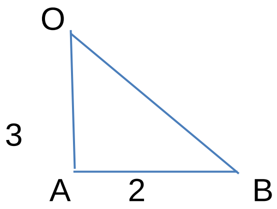
La superficie del segundo rectángulo es:

$$1{,}3X \cdot 0{,}7Y = 0{,}91\ X \cdot Y = 0{,}91\ S$$

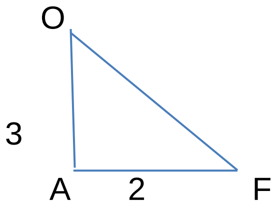
Por tanto la superficie del segundo rectángulo **disminuye** con respecto al primero en un porcentaje del **9%.**

5. La tienda Sioux

a) Teniendo en cuenta los ángulos rectos tenemos dos triángulos rectángulos y aplicando Pitágoras:

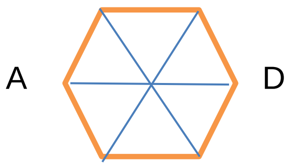


$$OB = \sqrt{\mathbf{13}} \approx \mathbf{3,6\ m}$$



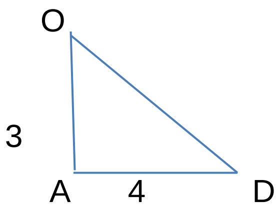
$$OF = \sqrt{\mathbf{13}} \approx \mathbf{3,6\ m}$$

b) El hexágono regular se divide en seis triángulos equiláteros de lado 2m



$$AD = 2 + 2 = \mathbf{4\ m}$$

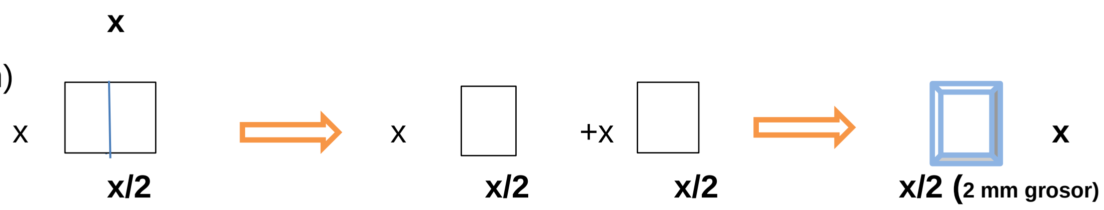
Finalmente,



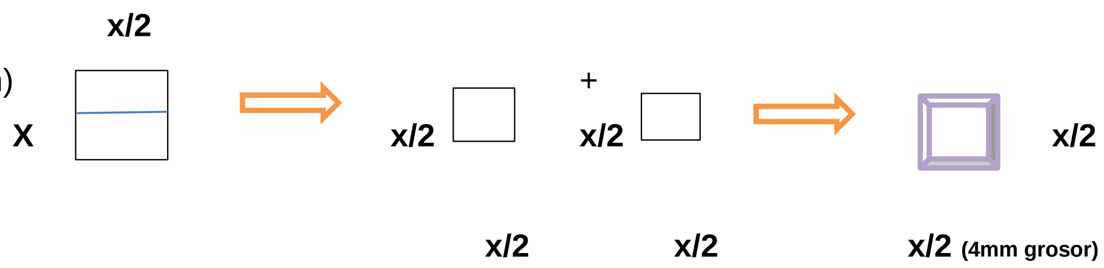
$$OD = \sqrt{16 + 9} = \mathbf{5\ m}$$

6. Tijeretazo

1ª operación)



2ª operación)



……

Observamos que en las operaciones pares obtenemos hojas cuadradas

Nº operación	Hojas superpuestas	Grosor	Dimensiones (en función de x)
1	$2^1 = 2$	2mm	x/2 y x
2	$2^2 = 4$	4mm	x/2 y x/2
3	$2^3 = 8$	6mm	x/4 y x/2
4	$2^4 = 16$	16mm	x/4 y x/4
5	$2^5 = 32$	32mm	x/8 y x/4
6	$2^6 = 64$	64mm	x/8 y x/8

a) En la segunda operación se han obtenido **4 cuadrados superpuestos**

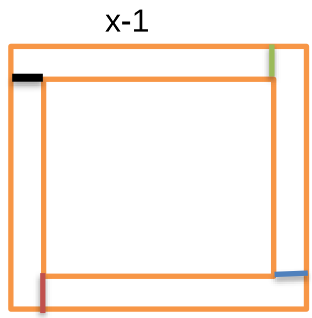
b) El cubo final (sexta operación par), de grosor 64mm, cuenta con **64 hojas cuadradas superpuestas de 1 mm de grosor cada una.**

c) **La arista del cubo es 64mm** (ya que el grosor, que es 64mm, constituye un lado del cubo)

d) La arista del cubo final es por un lado x/8 y por otro 64 mm, de donde $x = 8 \cdot 64 = \mathbf{512mm = 0,512m}$

Especial Tercero de ESO

7. Un problema de jardinero



a) La superficie del césped será la longitud por el ancho de 1m y, a su vez, la longitud la podemos dividir en cuatro partes de longitud x-1. Así:

$$4(x-1)\cdot 1 = 156 \text{ m}^2$$

Obtendremos : $x = 40m$

Por tanto, **el lado del terreno exterior mide x=40 m**

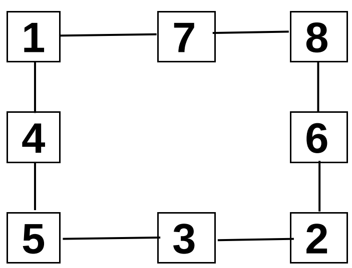
Y el **lado del macizo** será x-2= **38 m**

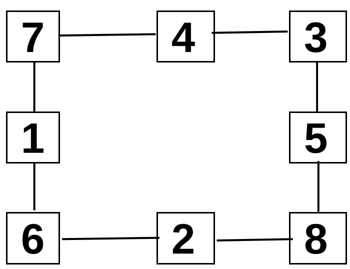
__**Otra forma:**__

El césped lo podemos dividir en 4 rectángulos iguales (ver figura anterior) por lo que el área de cada uno de esos rectángulos será $\frac{156\text{m2}}{4} = 39m^2 = (39m \cdot 1m)$. Esto es, el largo de cada rectángulo será de 39m ya que sabemos que su anchura es 1m. Por tanto, la longitud del terreno será 39+1=40m y la del macizo de 39-1=38m.

8 – Corta y pega

Las posibilidades son:

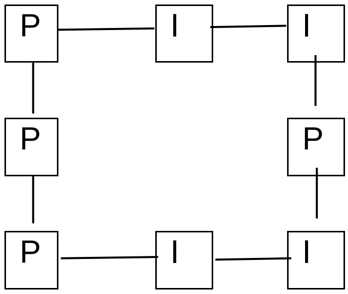




O cualquier rotación o simetría central

En primer lugar, EL 8 debe estar en una esquina al no poderse obtener como resta de números menores a él.

Por otro lado, nos fijamos en que en las esquinas tiene que haber dos pares y otros dos impares para que las restas correspondientes nos den otros dos pares y otros dos impares en las casillas centrales:



En el ejemplo de la derecha podemos comprobar, si llamamos P a número par e I a impar que:

P-I=I

P-P=P

I-I=I

Tampoco podemos poner en vértices consecutivos un número y su doble.
A partir de estos condicionantes buscamos ternas de números que sean vértices consecutivos y completamos obteniendo las soluciones indicadas.

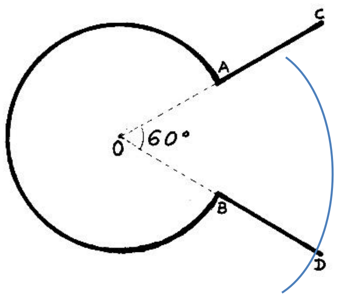
Especial Cuarto de ESO

7. La cabra Chota

a) Si la longitud de la cuerda es de 5m coincidirá con el radio de la circunferencia del cerco por lo que la **superficie en que puede pacer Chota será el área del círculo:**

$$\boldsymbol{\pi \cdot 5^2 = 25\pi \approx 78,54\ m^2}$$

b) Si la longitud de la cuerda es de 10m el área en que puede pace Chota será:

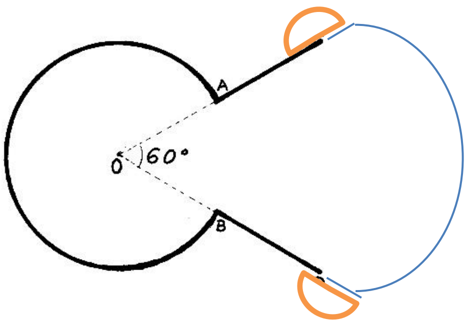


Ponemos la superficie en función de la suma de dos sectores circulares ambos con centro en O, el primero con ángulo 300º y radio 5m y el otro con ángulo 60º y radio 10m:

$$S = \pi \cdot 5^2 \cdot \frac{300}{360} + \pi \cdot 10^2 \cdot \frac{60}{360} = 25\pi \cdot \frac{5}{6} + 100\pi \cdot \frac{1}{6} = \frac{225}{6}\pi = 37{,}5\pi$$

La superficie será $\boldsymbol{37,5\pi \approx 117,81\ m^2}$

c) En el caso en que la cuerda sea de 11m, la superficie será:

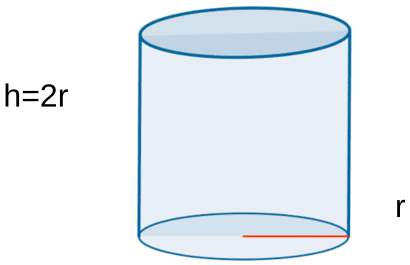


La superficie será la suma del área del sector circular de centro O, radio 5m y ángulo 300º más el del sector circular de centro O, radio 11m y ángulo 60º más los dos semicírculos de radio 1m (o lo que es lo mismo el área de un círculo de radio 1m.

$$S =\cdot 5^2 \cdot \frac{300}{360} + \pi \cdot 11^2 \cdot \frac{60}{360} + \pi = 25\pi \cdot \frac{5}{6} + 121\pi \cdot \frac{1}{6} + \pi = 42\pi \approx 131{,}95$$

La superficie será $\boldsymbol{42\pi \approx 131,95\ m^2}$

8. Un cilindro en un cubo

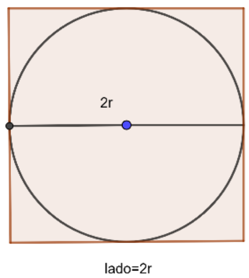


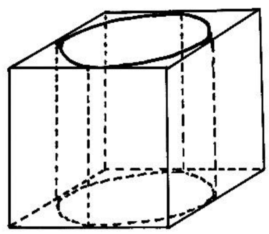
V=50,24l

a) $V = 50{,}24 = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2\pi \cdot r^3$ de aquí se obtiene:

$$\boldsymbol{r} = \sqrt[3]{\frac{50{,}24}{2 \cdot 3{,}14}} = \sqrt[3]{8} = \mathbf{2}\ \boldsymbol{dm}$$

b)





Como el cubo tiene lado 2r y r=2 dm, el lado del cubo medirá 4 dm y su volumen:

$$V = (2r)^3 = 4^3 = \mathbf{64}\ \boldsymbol{l}$$