Coordenadas baricéntricas

Juan Serrano de Rodrigo

17 de noviembre de 2024

Resumen

Este artículo amplía la información contenida en el capítulo 7 de la obra de Evan Chen «*Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*», acerca del uso de coordenadas baricéntricas como recurso para resolver problemas de geometría. En particular, se detalla la demostración de las coordenadas baricéntricas de varios puntos notables del triángulo (incentro, excentro, punto simediano, ortocentro y circuncentro) y se ofrecen las soluciones de todos los problemas del capítulo.

§0 Notación y convenciones

A lo largo de este artículo utilizaremos la notación $[XYZ]$ para el **área con signo** del triángulo XYZ. Esto quiere decir que el área $[XYZ]$ es positiva si los vértices X, Y, Z están dispuestos en sentido contrario a las agujas del reloj, y negativa en caso contrario. Fijamos un **triángulo de referencia** ABC cuyos lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ tienen longitudes a, b, c, respectivamente. Asignamos a cada punto P del plano una terna ordenada de números reales $P = (x, y, z)$ cumpliendo

$$\vec{P} = x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C} \quad \text{y} \quad x + y + z = 1.$$

Las anteriores se denominan **coordenadas baricéntricas** del punto P respecto al triángulo ABC. Observar que, en esta notación, las coordenadas de los vértices del triángulo ABC resultan $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ y $C = (0, 0, 1)$. Las coordenadas baricéntricas se llaman también **coordenadas de área** debido a que, dado un punto P, se tiene

$$P = \left(\frac{[PBC]}{[ABC]}, \frac{[PCA]}{[BCA]}, \frac{[PAB]}{[CAB]}\right).$$

En ocasiones, las coordenadas baricéntricas nos permiten trabajar con expresiones *homogéneas*. En vista de lo anterior, utilizaremos la notación de **coordenadas baricéntricas no homogéneas** $(x : y : z)$ como abreviatura, de modo que

$$(x : y : z) = \left(\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z}\right)$$

con $x+y+z \neq 0$. Dicho de otra forma: para todo número real $k \neq 0$, los puntos $(x : y : z)$ y $(kx : ky : kz)$ se consideran idénticos, siendo $(x : y : z) = (x, y, z)$ si $x + y + z = 1$.

Por último, definimos la **notación de Conway** mediante los símbolos

$$S_A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \quad S_B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, \quad S_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

§1 Definiciones y primeros teoremas

Teorema 1 (Fórmula del área baricéntrica). *Sean P_1, P_2, P_3 puntos con coordenadas baricéntricas $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ para $i = 1, 2, 3$. Entonces el área con signo de $\triangle P_1P_2P_3$ está dada por el determinante*

$$\frac{[P_1P_2P_3]}{[ABC]} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Teorema 2 (Ecuación de una recta). *La ecuación de una recta está dada por la expresión $ux + vy + wz = 0$, donde u, v, w son números reales. Los valores u, v y w son únicos salvo factor de escala.*

Demostración. La idea principal es que tres puntos son colineales si y solo si el área con signo del «triángulo» que forman es cero. Supongamos que queremos caracterizar los puntos $P = (x, y, z)$ que yacen sobre una recta XY, donde el punto $X = (x_1, y_1, z_1)$ e $Y = (x_2, y_2, z_2)$. Utilizando la fórmula del área anterior con $[PXY] = 0$, hallamos que esto ocurre precisamente cuando

$$0 = (y_1z_2 - y_2z_1)\, x + (z_1x_2 - z_2x_1)\, y + (x_1y_2 - x_2y_1)\, z,$$

es decir, $0 = ux + vy + wz$ para ciertas constantes u, v, w. $\square$

En particular, la ecuación de la recta AB es sencillamente $z = 0$, lo que se sigue de sustituir $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ en $ux + vy + wz = 0$. Las ecuaciones de las rectas BC y CA son $x = 0$ e $y = 0$, respectivamente.

Teorema 3 (Cevianas baricéntricas). *Sea $P = (x_1 : y_1 : z_1)$ un punto cualquiera distinto de A. Entonces, los puntos sobre la recta AP (distintos de A) pueden parametrizarse como*

$$(t : y_1 : z_1)$$

donde $t \in \mathbb{R}$ y $t + y_1 + z_1 \neq 0$.

§2 Puntos notables del triángulo

En el cuadro 1 se dan en forma explícita las coordenadas de distintos puntos notables del triángulo de referencia ABC. Notar que las coordenadas de estos puntos están dadas en forma *no homogénea*. A continuación se detalla la demostración de estos resultados.

2.1. Coordenadas del incentro

Para ver que $I = (a : b : c)$ basta tener en cuenta que las áreas de los triángulos IBC, ICA, IAB son proporcionales a $r\,a$, $r\,b$ y $r\,c$, respectivamente, donde r denota el radio de la circunferencia inscrita (ver figura 2A). Así, obtenemos

$$I = (r\,a : r\,b : r\,c) = (a : b : c).$$

A partir de este resultado puede deducirse también el teorema de la bisectriz. En efecto, la bisectriz de A tiene como ecuaciones homogéneas $(t : b : c)$ con $t \in \mathbb{R}$, de modo que

Punto	**Coordenadas**	**Idea de la demostración**
Baricentro	$G = (1 : 1 : 1)$	Trivial
Incentro	$I = (a : b : c)$	Definición por áreas
Excentro	$I_A = (-a : b : c)$, etc.	Definición por áreas
Punto simediano	$K = (a^2 : b^2 : c^2)$	Conjugados isogonales
Ortocentro	$H = (\tan A : \tan B : \tan C)$	Definición por áreas
Circuncentro	$O = (\operatorname{sen} 2A : \operatorname{sen} 2B : \operatorname{sen} 2C)$	Definición por áreas

Cuadro 1. Coordenadas baricéntricas de los puntos notables de un triángulo.

su punto de corte $D = (0, d, 1 - d)$ con el lado BC tiene coordenadas no homogéneas $(0 : b : c)$. Así,

$$\frac{DB}{DC} = \frac{1-d}{d} = \frac{c}{b} \quad \Longrightarrow \quad \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}.$$

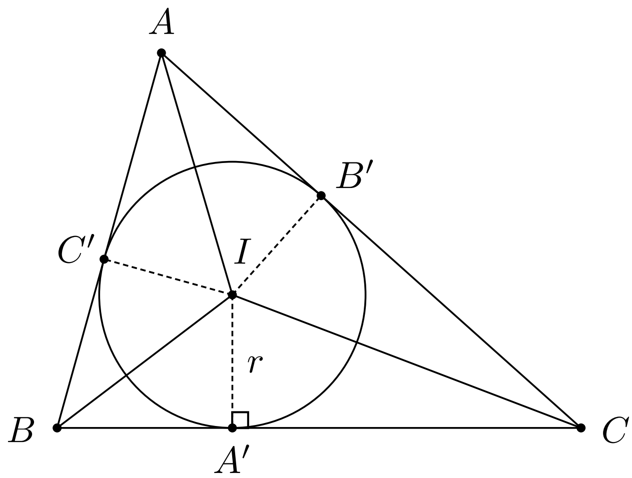


Figura 2A. Coordenadas baricéntricas del incentro I.

2.2. Coordenadas de los excentros

En el caso de los excentros I_A, I_B e I_C, utilizamos de nuevo la definición por áreas. Para ello necesitamos calcular $[I_ABC]$, $[I_ACA]$, $[I_AAB]$. Denotando mediante r_a el radio de la circunferencia A-excrita (ver figura 2B) y teniendo en cuenta la convención sobre el signo de las áreas involucradas, obtenemos

$$I_A = (-a\,r_a : b\,r_a : c\,r_a) = (-a : b : c).$$

Las coordenadas para $I_B = (a : -b : c)$ e $I_C = (a : b : -c)$ se deducen análogamente.

2.3. Coordenadas del punto simediano

Pasamos ahora a demostrar la expresión de las coordenadas del punto simediano K. Vamos a probar de modo más general que, dado un punto $P = (x : y : z)$, las coordenadas

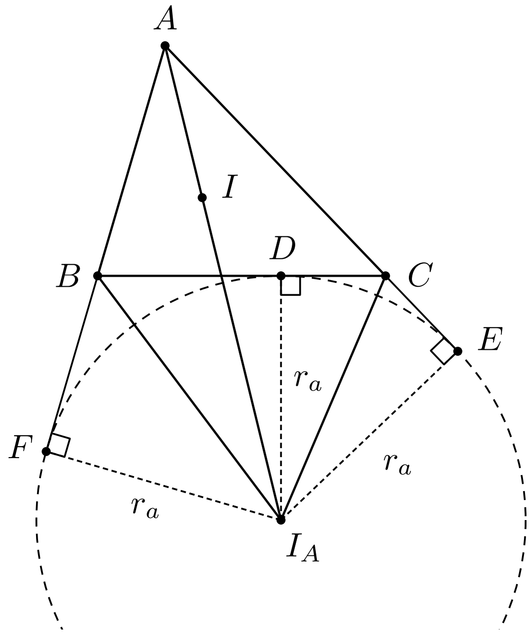


Figura 2B. Coordenadas baricéntricas del excentro I_A.

de su **conjugado isogonal** P^* vienen dadas por

$$P^* = \left(\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z} \right).$$

Lo anterior puede deducirse a partir de la fórmula dada por el teorema 4.22 (razones isogonales) que aparece en [1], pág. 64. Sean D y E puntos sobre $\overline{BC}$ tales que $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$ son isogonales. Entonces

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{BE}{EC} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2. \tag{1}$$

Sea $P^* = (x^* : y^* : z^*)$. Denotamos mediante $D = (0, d, 1-d)$ y $E = (0, e, 1-e)$ las coordenadas homogéneas de los puntos sobre $\overline{BC}$ que determinan las cevianas AP y AP^*. Por la ecuación (1) se tiene

$$\frac{z}{y} \cdot \frac{z^*}{y^*} = \frac{1-d}{d} \cdot \frac{1-e}{e} = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{BE}{EC} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Deducimos por tanto la relación

$$z^* : y^* = \frac{c^2}{b^2} : \frac{z}{y} = \frac{c^2}{z} : \frac{b^2}{y},$$

de donde se sigue el resultado. Con esto, teniendo en cuenta que el punto simediano K se define como el conjugado isogonal del baricentro $G = (1 : 1 : 1)$, obtenemos las coordenadas $K = (a^2 : b^2 : c^2)$.

2.4. Coordenadas del ortocentro

Para hallar las coordenadas del ortocentro H calcularemos el área del triángulo HBC, sabiendo que sus ángulos correspondientes son

$$\angle CBH = 90^\circ - C, \quad \angle BHC = 180^\circ - A, \quad \angle HCB = 90^\circ - B.$$

La fórmula es la dada por el teorema 5.3 (fórmulas del área) en [1], pág. 77.

$$[HBC] = \frac{a^2 \operatorname{sen}(90^\circ - C)\, \operatorname{sen}(90^\circ - B)}{2 \operatorname{sen}(180^\circ - A)} = \frac{a^2 \cos C\, \cos B}{2 \operatorname{sen} A}.$$

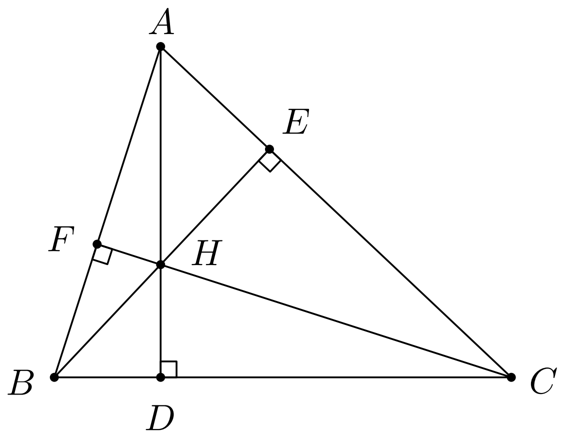


Figura 2C. Coordenadas baricéntricas del ortocentro H.

Con lo anterior, el cociente entre las áreas resulta

$$\frac{[HBC]}{[ABC]} = \frac{\frac{a^2 \cos C \cos B}{2 \operatorname{sen} A}}{\frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} A}} = \frac{1}{\operatorname{tag} B \operatorname{tag} C} = \frac{\operatorname{tag} A}{\operatorname{tag} A + \operatorname{tag} B + \operatorname{tag} C}.$$

Observar que la última igualdad se sigue por la relación

$$\operatorname{tag} A + \operatorname{tag} B + \operatorname{tag} C = \operatorname{tag} A \cdot \operatorname{tag} B \cdot \operatorname{tag} C,$$

que es válida para ángulos A, B, C cumpliendo $A + B + C = 180^\circ$. Los demás cocientes entre áreas pueden calcularse análogamente, de modo que resulta

$$H = \left(\frac{\operatorname{tag} A}{\operatorname{tag} A + \operatorname{tag} B + \operatorname{tag} C}, \frac{\operatorname{tag} B}{\operatorname{tag} A + \operatorname{tag} B + \operatorname{tag} C}, \frac{\operatorname{tag} C}{\operatorname{tag} A + \operatorname{tag} B + \operatorname{tag} C} \right) = (\operatorname{tag} A : \operatorname{tag} B : \operatorname{tag} C).$$

Ahora, teniendo en cuenta los teoremas del seno y del coseno, obtenemos

$$\operatorname{tag} A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{2R}}{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \frac{abc}{2R} \cdot \frac{1}{S_A}.$$

Por tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned} H = (\operatorname{tag} A : \operatorname{tag} B : \operatorname{tag} C) &= \left(\frac{abc}{2R} \cdot \frac{1}{S_A} : \frac{abc}{2R} \cdot \frac{1}{S_B} : \frac{abc}{2R} \cdot \frac{1}{S_C} \right) \\ &= \left(\frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C} \right) = (S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B). \end{aligned}$$

2.5. Coordenadas del circuncentro

Las coordenadas baricéntricas del circuncentro O surgen de calcular las áreas de los triángulos OBC, OCA y OAB, aplicando el teorema del ángulo inscrito. Así, si R denota el radio de la circunferencia circunscrita, se tiene

$$[OBC] = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{sen} 2A, \quad [OCA] = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{sen} 2B, \quad [OAB] = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{sen} 2C.$$

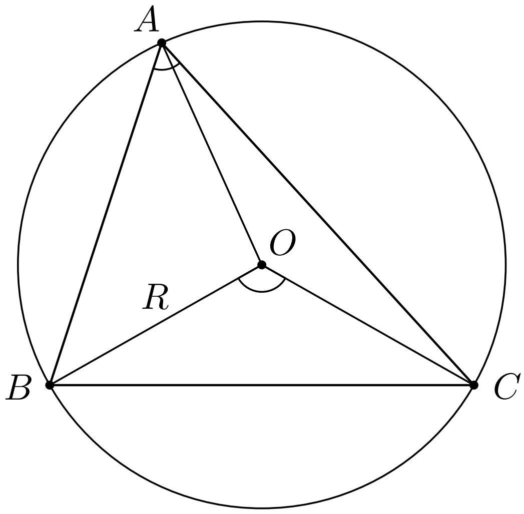


Figura 2D. Coordenadas baricéntricas del circuncentro O.

Por tanto, las coordenadas resultan

$$O = \left(\frac{R^2}{2} \operatorname{sen} 2A : \frac{R^2}{2} \operatorname{sen} 2B : \frac{R^2}{2} \operatorname{sen} 2C \right) = (\operatorname{sen} 2A : \operatorname{sen} 2B : \operatorname{sen} 2C).$$

Para relacionar las anteriores expresiones trigonométricas con los símbolos de Conway, basta aplicar de nuevo los teoremas del seno y del coseno, obteniendo

$$\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \cos A = \frac{a}{R} \cdot \frac{S_A}{bc}.$$

Con esto, podemos escribir

$$\begin{aligned} O = (\operatorname{sen} 2A : \operatorname{sen} 2B : \operatorname{sen} 2C) &= \left(\frac{a}{R} \cdot \frac{S_A}{bc} : \frac{b}{R} \cdot \frac{S_B}{ca} : \frac{c}{R} \cdot \frac{S_C}{ab} \right) \\ &= \left(a^2\, S_A : b^2\, S_B : c^2\, S_C \right). \end{aligned}$$

Ejemplo 4. Halla las coordenadas baricéntricas de la intersección de la bisectriz interior de A y la simediana que pasa por B.

Solución. Sabemos que la bisectriz interior de A tiene coordenadas $(t : b : c)$ con $t \in \mathbb{R}$. Por otro lado, la simediana que pasa por B tiene coordenadas $(a^2 : s : c^2)$ con $s \in \mathbb{R}$. Si denotamos mediante $P = (x : y : z)$ el punto de intersección buscado, se tienen las relaciones

$$y : z = b : c \quad \text{y} \quad x : z = a^2 : c^2.$$

Por tanto, podemos escribir

$$P = \left(z \cdot \frac{a^2}{c^2} : z \cdot \frac{b}{c} : z \right) = \left(\frac{a^2}{c^2} : \frac{b}{c} : 1 \right) = \left(a^2 : bc : c^2 \right). \qquad \square$$

Problemas para esta sección

Problema 5. Halla las coordenadas del punto medio de $\overline{AB}$.

Solución. Es fácil deducir que el punto medio M tiene coordenadas $M = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. $\square$

Problema 6. Sea $P = (x : y : z)$ un punto con $x, y, z \neq 0$. Demuestra que su **conjugado isotómico** está dado por

$$P^t = \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}\right).$$

Solución. Recordamos que, si P es el punto de corte definido por las cevianas AD, BE, CF, entonces su conjugado isotómico P^t es el punto definido por la intersección de las cevianas AD', BE', CF', donde D', E' y F' son los simétricos de D, E, F respecto a los puntos medios de los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$. Es fácil comprobar la existencia del punto P^t usando el teorema de Ceva.

En la notación de coordenadas baricéntricas, si $P = (x : y : z)$, entonces el punto D tiene coordenadas $D = (t : y : z)$ con $t \in \mathbb{R}$, mientras que el punto D' tiene coordenadas $D' = (s : z : y)$ con $s \in \mathbb{R}$. Así, el punto $P^t = (x^t : y^t : z^t)$ verifica

$$\frac{z^t}{y^t} = \frac{y}{z} \quad \Longrightarrow \quad z^t = y^t\,\frac{y}{z} \qquad \text{y} \qquad \frac{x^t}{y^t} = \frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad x^t = y^t\,\frac{y}{x}.$$

De este modo, podemos escribir

$$P^t = \left(y^t\,\frac{y}{x} : y^t : y^t\,\frac{y}{z}\right) = \left(\frac{y}{x} : 1 : \frac{y}{z}\right) = \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}\right). \qquad \square$$

Problema 7. Halla las coordenadas baricéntricas del punto de intersección entre la simediana que pasa por A y la mediana que pasa por B.

Solución. La simediana que pasa por A tiene coordenadas baricéntricas $(t : b^2 : c^2)$ con $t \in \mathbb{R}$, mientras que la mediana que pasa por B tiene coordenadas $(1 : s : 1)$ con $s \in \mathbb{R}$. Sea $P = (x : y : z)$ el punto buscado, entonces se tiene

$$y : z = b^2 : c^2 \quad \text{y} \quad x : z = 1.$$

Con esto, concluimos

$$P = \left(z : z \cdot \frac{b^2}{c^2} : z\right) = \left(1 : \frac{b^2}{c^2} : 1\right) = \left(c^2 : b^2 : c^2\right). \qquad \square$$

§3 Colinealidad, concurrencia y puntos en el infinito

El teorema 1 puede aplicarse para demostrar que tres puntos son colineales. Concretamente, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 8 (Colinealidad). *Consideramos los puntos P_1, P_2, P_3 con $P_i = (x_i : y_i : z_i)$ para $i = 1, 2, 3$. Los tres puntos son colineales si y sólo si*

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Lo anterior puede reformularse del siguiente modo, más útil.

Proposición 9. *La recta que pasa por dos puntos* $P = (x_1 : y_1 : z_1)$ *y* $Q = (x_2 : y_2 : z_2)$ *está dada precisamente por la fórmula*

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Lo anterior se usa habitualmente junto con el teorema 3 para intersecar una ceviana con una recta arbitraria que pasa por dos puntos.

Hay un criterio parecido en caso de que tres rectas sean concurrentes. Sin embargo, antes vamos a dar alguna observación sobre **puntos en el infinito**. Anteriormente hemos definido

$$(x : y : z) = \left(\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z}\right)$$

si $x + y + z \neq 0$. ¿Qué ocurre en caso de que $x + y + z = 0$?

Consideramos dos rectas paralelas $u_1x + v_1y + w_1z = 0$ y $u_2x + v_2y + w_2z = 0$. Dado que ambas son paralelas, sabemos que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= u_1x + v_1y + w_1z \\ 0 &= u_2x + v_2y + w_2z \\ 1 &= x + y + z \end{aligned}$$

no admite soluciones (x, y, z). Eso solo es posible si

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

¡Sin embargo, eso implica que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= u_1x + v_1y + w_1z \\ 0 &= u_2x + v_2y + w_2z \\ 0 &= x + y + z \end{aligned}$$

tiene una solución no trivial! (Recíprocamente, si las rectas no son paralelas, el determinante es distinto de cero, y por tanto existe una única solución, que es $(0, 0, 0)$.)

En vista de lo anterior, vamos a prolongar nuestras rectas «un poquito» añadiéndoles un punto a cada una, un *punto en el infinito*. Es un punto $(x : y : z)$ que cumple la ecuación de la recta y la condición adicional $x + y + z = 0$. Con este añadido, dos rectas cualesquiera se cortan; las rectas que antes eran paralelas se corresponden ahora con rectas que se cortan en puntos en el infinito.

Ejemplo 10. Halla el punto en el infinito que yace sobre la bisectriz del ángulo A.

Solución. Se trata del punto $(-b - c : b : c)$, ya que yace sobre dicha bisectriz y además cumple que la suma de sus coordenadas es cero. □

Teorema 11 (Concurrencia). *Consideramos tres rectas*

$$\ell_i : u_ix + v_iy + w_iz = 0$$

con $i = 1,\ 2,\ 3$. *Son concurrentes o todas paralelas si y solo si*

$$0 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

§4 Vectores de desplazamiento

Para deducir la fórmula de la distancia entre dos puntos, y por tanto la ecuación de la circunferencia y la fórmula para la distancia entre dos rectas, es necesario introducir la noción de vector de desplazamiento.

El **vector de desplazamiento** entre dos puntos (normalizados) $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$ se define como $\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$. Observar que, dado que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ y $q_1 + q_2 + q_3 = 1$, la suma de las coordenadas de un vector de desplazamiento da siempre 0 como resultado.

A lo largo de esta sección asumiremos en ocasiones que hemos efectuado una traslación de tal modo que identifiquemos el circuncentro O con el vector nulo $\vec{0}$. Dado que las coordenadas del punto P vienen dadas por $\vec{P} = x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}$ con $x + y + z = 1$, efectuar esta traslación no las modifica. Explícitamente, se tiene

$$\vec{P} - \vec{O} = x\left(\vec{A} - \vec{O}\right) + y\left(\vec{B} - \vec{O}\right) + z\left(\vec{C} - \vec{O}\right).$$

En vista de lo anterior, hay que recordar siempre que es importante usar coordenadas normalizadas al hacer cálculos con vectores de desplazamiento. A continuación enunciamos la fórmula de la distancia entre dos puntos.

Teorema 12 (Fórmula de la distancia). *Dados dos puntos cualesquiera P y Q, consideramos el vector de desplazamiento $\overrightarrow{PQ} = (x, y, z)$. Entonces, la distancia entre P y Q está dada por*

$$|PQ|^2 = -a^2yz - b^2zx - c^2xy.$$

Como consecuencia, podemos deducir la ecuación de la circunferencia.

Teorema 13 (Circunferencia baricéntrica). *La ecuación general de una circunferencia es*

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0$$

con u, v, w números reales.

Aunque la ecuación de la circunferencia en coordenadas baricéntricas pueda parecer complicada a primera vista, cabe mencionar que se simplifica notablemente si esta circunferencia pasa por los vértices o los lados del triángulo de referencia. Por ejemplo, si la circunferencia pasa por $A = (1, 0, 0)$, entonces todos los términos a^2yz, b^2zx, c^2xy se anulan y deducimos $u = 0$.

Una consecuencia de esto es que, siempre que trates de resolver un problema que involucre circunferencias circunscritas usando coordenadas baricéntricas, debes esforzarte por determinar el sistema de coordenadas de forma que los puntos de la circunferencia sean puntos de los lados o, todavía mejor, los vértices del triángulo de referencia.

Damos por último un criterio para determinar cuándo son perpendiculares dos vectores de desplazamiento.

Teorema 14 (Perpendiculares baricéntricas). *Sean $\overrightarrow{MN} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\overrightarrow{PQ} = (x_2, y_2, z_2)$ dos vectores de desplazamiento. Entonces $\overline{MN} \perp \overline{PQ}$ si y solo si*

$$0 = a^2(z_1y_2 + y_1z_2) + b^2(x_1z_2 + z_1x_2) + c^2(y_1x_2 + x_1y_2).$$

Este teorema es especialmente útil cuando uno de los vectores de desplazamiento es un lado del triángulo.

Problemas para esta sección

Lema 15 (Circunferencia circunscrita baricéntrica). *La circunferencia circunscrita (ABC) del triángulo de referencia tiene ecuación*

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0.$$

Demostración. Basta sustituir las coordenadas $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ y $C = (0, 0, 1)$ en la ecuación general de la circunferencia para deducir $u = v = w = 0$. El resultado se sigue inmediatamente. □

Problema 16. Consideramos el vector de desplazamiento $\overrightarrow{PQ} = (x_1, y_1, z_1)$. Demuestra que $\overline{PQ} \perp \overline{BC}$ si y solo si

$$0 = a^2(z_1 - y_1) + x_1(c^2 - b^2).$$

Solución. Sustituimos el vector de desplazamiento $\overrightarrow{BC} = (0, -1, 1)$ en la ecuación dada por el teorema 14 para obtener:

$$0 = a^2(-z_1 + y_1) + b^2x_1 - c^2x_1$$
$$0 = a^2(z_1 - y_1) + x_1(c^2 - b^2),$$

lo que demuestra el resultado. □

Lema 17 (Mediatriz baricéntrica). *La mediatriz de $\overline{BC}$ tiene ecuación*

$$0 = a^2(z - y) + x(c^2 - b^2).$$

Demostración. Basta notar que la mediatriz queda determinada por un vector director perpendicular a $\overline{BC}$ y por el hecho de que contiene al punto $M = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. De modo más específico, sea $P = (x, y, z)$ un punto de la mediatriz. Entonces $\overrightarrow{PM} = (x, y - \frac{1}{2}, z - \frac{1}{2})$ y se cumple $\overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{BC}$. Aplicamos el teorema 14 para deducir

$$0 = a^2\left(z - \frac{1}{2} - y + \frac{1}{2}\right) + x\left(c^2 - b^2\right)$$
$$0 = a^2\left(z - y\right) + x\left(c^2 - b^2\right),$$

como queríamos demostrar. □

§5 Un ejemplo de la lista corta de la IMO

Ejemplo 18 (Lista corta 2011/G6). Sea ABC un triángulo con $AB = AC$ y sea D el punto medio de $\overline{AC}$. La bisectriz de $\angle BAC$ corta a la circunferencia que pasa por D, B y C en el punto E, en el interior del triángulo ABC. La recta BD corta a la circunferencia que pasa por A, E y B en dos puntos, B y F. Las rectas AF y BE se cortan en un punto I, y las rectas CI y BD se cortan en un punto K. Demuestra que I es el incentro del triángulo KAB.

§6 Notación de Conway

Damos a continuación algunos resultados que permiten trabajar más fácilmente con la **notación de Conway**. Recordamos que esta se define como

$$S_A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \qquad S_B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, \qquad S_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

Además, vamos a definir la abreviatura $S_{BC} = S_B S_C$, etcétera. A pesar de su apariencia, estos símbolos cumplen varias identidades interesantes. Por ejemplo, es sencillo comprobar que $S_B + S_C = a^2$. A continuación mostramos algunas menos obvias.

Proposición 19 (Identidades de Conway). *Denotamos mediante S el doble del área del triángulo ABC. Entonces*

$$\begin{aligned} S^2 &= S_{AB} + S_{BC} + S_{CA} \\ &= S_{BC} + a^2 S_A \\ &= \frac{1}{2}\left(a^2 S_A + b^2 S_B + c^2 S_C\right) \\ &= (bc)^2 - S_A^2. \end{aligned}$$

En particular

$$a^2 S_A + b^2 S_B - c^2 S_C = 2S_{AB}.$$

De modo más general, si S denota el doble del área del triángulo ABC, definimos

$$S_\theta = S \cot\theta.$$

Aquí el ángulo está dirigido módulo 180°. En el caso particular $\theta = \angle A$ se tiene la fórmula $S_A = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - a^2\right)$. Con esta notación tenemos también el siguiente resultado.

Teorema 20 (Fórmula de Conway). *Sea P un punto arbitrario. Si $\beta = \measuredangle PBC$ y $\gamma = \measuredangle BCP$, entonces*

$$P = \left(-a^2 : S_C + S_\gamma : S_B + S_\beta\right).$$

§7 Vectores de desplazamiento (continuación)

El siguiente lema introduce la potencia de un punto en coordenadas baricéntricas.

Lema 21 (Potencia de un punto baricéntrica). *Sea ω la circunferencia dada por*

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (x + y + z)(ux + vy + wz) = 0.$$

Sea $P = (x, y, z)$ un punto cualquiera. Entonces

$$\mathrm{Pot}_\omega(P) = -a^2yz - b^2zx - c^2xy + (x + y + z)(ux + vy + wz).$$

Observar que, para usar esta fórmula, las coordenadas $P = (x, y, z)$ deben ser homogéneas. De lo contrario, la fórmula de la distancia no es válida, y por tanto tampoco este lema. Como consecuencia de este resultado se deduce la ecuación del eje radical de dos circunferencias.

Lema 22 (Eje radical baricéntrico). *Supongamos que se dan dos circunferencias no concéntricas de ecuaciones*

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (x+y+z)(u_1x + v_1y + w_1z) = 0$$
$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (x+y+z)(u_2x + v_2y + w_2z) = 0.$$

Entonces, su eje radical está dado por

$$(u_1 - u_2)x + (v_1 - v_2)y + (w_1 - w_2)z = 0.$$

Damos por último una versión más fuerte del teorema 14. Observar que, en la demostración de este teorema, solamente se necesita que la suma de las coordenadas de *uno* de los vectores de desplazamiento sea cero para simplificar la expresión resultante.

Teorema 23 (Perpendicularidad generalizada). *Supongamos que M, N, P y Q son puntos con*

$$\overrightarrow{MN} = x_1\overrightarrow{OA} + y_1\overrightarrow{OB} + z_1\overrightarrow{OC}$$
$$\overrightarrow{PQ} = x_2\overrightarrow{OA} + y_2\overrightarrow{OB} + z_2\overrightarrow{OC}$$

tales que, o bien $x_1 + y_1 + z_1 = 0$, o $x_2 + y_2 + z_2 = 0$. Entonces, las rectas MN y PQ son perpendiculares si y solo si

$$0 = a^2(z_1y_2 + y_1z_2) + b^2(x_1z_2 + z_1x_2) + c^2(y_1x_2 + x_1y_2).$$

Lo anterior es útil cuando O o H aparecen al trazar perpendiculares. Por ejemplo, obtenemos el siguiente corolario al hallar la recta perpendicular a $\overline{AO}$ que pasa por A.

Ejemplo 24. La tangente a (ABC) en A viene dada por

$$b^2z + c^2y = 0.$$

Demostración. Sea $P = (x, y, z)$ un punto de la recta tangente y asociemos O con el origen del sistema de coordenadas. El vector de desplazamiento $\overrightarrow{AP}$ resulta

$$\overrightarrow{AP} = (x-1, y, z) = (x-1)\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}.$$

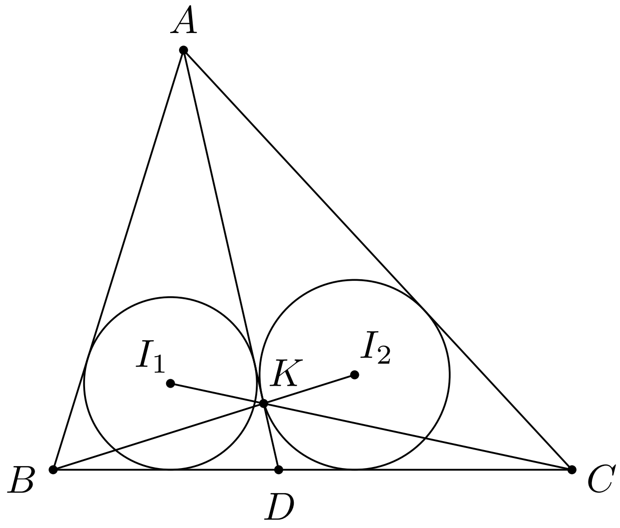
Usamos ahora el vector

$$\overrightarrow{OA} = \vec{A} - \vec{O} = 1\vec{A} + 0\vec{B} + 0\vec{C}.$$

Al escribir $(x_1, y_1, z_1) = (x-1, y, z)$ y $(x_2, y_2, z_2) = (1, 0, 0)$ se obtiene el resultado. □

§8 Más ejemplos

Ejemplo 25. Sea ABC un triángulo y D un punto sobre $\overline{BC}$. Denotamos mediante I_1 e I_2 los incentros de los triángulos ABD y ACD, respectivamente. Las rectas BI_2 y CI_1 se cortan en K. Demuestra que K yace sobre $\overline{AD}$ si y solo si $\overline{AD}$ es la bisectriz de A.



Solución. Usamos coordenadas baricéntricas respecto a ABC. Escribimos $AD = d$, $CD = p$, $BD = q$. Sea C_1 el punto de corte de la semirrecta DI_2 con $\overline{AC}$. Se tiene $C_1 = (p : 0 : d)$ y $D = (0 : p : q)$ por el teorema de la bisectriz. Así, si $I_2 = (a : b : t)$, entonces se tiene

$$\begin{vmatrix} p & 0 & d \\ 0 & p & q \\ a & b & t \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{ad + bq}{p}.$$

Esto implica

$$I_2 = (ap : bp : ad + bq)$$

y análogamente

$$I_1 = (aq : ad + cp : cq),$$

de forma que las rectas BI_2 y CI_1 se cortan en el punto

$$K = (apq : p(ad + cp) : q(ad + bq)).$$

Si este punto yace sobre AD, entonces

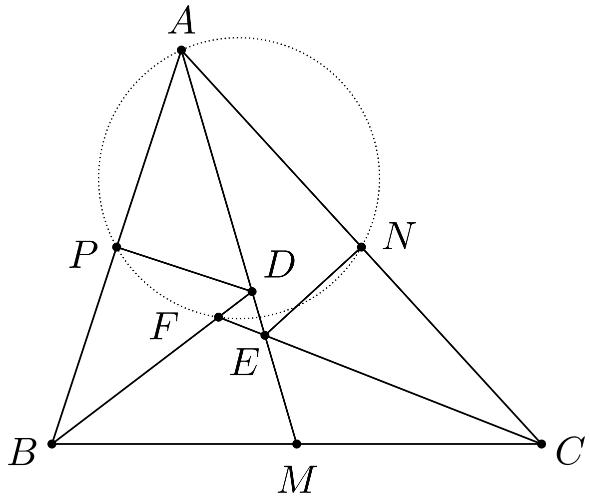
$$\frac{p}{q} = \frac{p(ad + cp)}{q(ad + bq)}.$$

Así, obtenemos $cp = bq$, o bien $p : q = b : c$, lo que implica que D es el pie de la bisectriz. El recíproco es inmediato deshaciendo los pasos anteriores. $\square$

Ejemplo 26 (USAMO 2008/2). Sea ABC un triángulo acutángulo escaleno y sean M, N y P los puntos medios de $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$, respectivamente. Sean D y E los puntos de corte de las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ y la recta AM, respectivamente, y sea F el punto de corte de las rectas BD y CE, en el interior del triángulo ABC. Demuestra que los puntos A, N, F y P yacen todos en una circunferencia.

Solución. Usamos coordenadas baricéntricas respecto de $\triangle ABC$. Así, se tiene $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ y $C = (0, 0, 1)$. Por otra parte, los puntos medios de los lados resultan

$$M = (0 : 1 : 1), \quad N = (1 : 0 : 1), \quad P = (1 : 1 : 0).$$



Por el lema 17, las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ tienen ecuaciones

$$m_{AB} : c^2(y - x) + z(b^2 - a^2) = 0,$$

$$m_{AC} : b^2(x - z) + y(a^2 - c^2) = 0.$$

Calculamos las coordenadas del punto D como intersección de las rectas AD y m_{AB}. Dado que $D = (t : 1 : 1)$, se tiene la ecuación

$$c^2(1 - t) + 1 \cdot (b^2 - a^2) = 0.$$

Despejando t, resulta

$$t = 1 - \frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{c^2}.$$

Así, $D = (b^2 + c^2 - a^2 : c^2 : c^2)$. Análogamente, $E = (b^2 + c^2 - a^2 : b^2 : b^2)$.

Vamos a calcular ahora las coordenadas del punto F como intersección de las rectas CE y BD. Para calcular la ecuación de ambas rectas usamos la fórmula del determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ b^2 + c^2 - a^2 & b^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad xb^2 - y(b^2 + c^2 - a^2) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ b^2 + c^2 - a^2 & c^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad xc^2 - z(b^2 + c^2 - a^2) = 0.$$

Despejando cada ecuación obtenemos las relaciones

$$\frac{y}{x} = \frac{b^2}{b^2 + c^2 - a^2} \quad \text{y} \quad \frac{z}{x} = \frac{c^2}{b^2 + c^2 - a^2},$$

con lo que $F = (b^2 + c^2 - a^2 : b^2 : c^2)$.

Finalmente, vamos a comprobar que F pertenece a la circunferencia (APN). Sustituyendo las coordenadas de los puntos A, P y N en la ecuación general de la circunferencia, obtenemos los valores $u = 0$, $v = \frac{c^2}{2}$ y $w = \frac{b^2}{2}$. Así, la ecuación de la circunferencia resulta

$$(APN) : -a^2yz - b^2zx - c^2xy + \frac{1}{2}\left(c^2y + b^2z\right)(x + y + z) = 0.$$

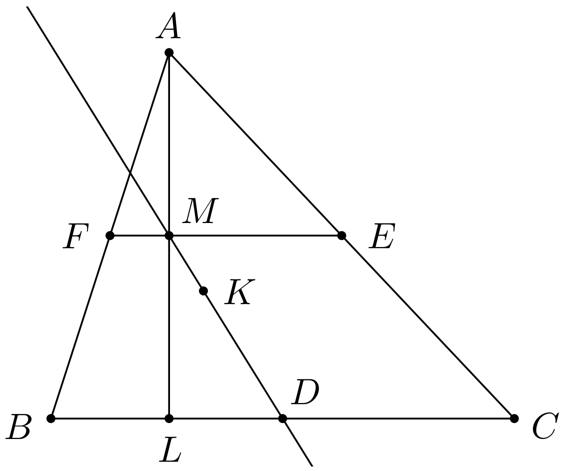
Hacemos las cuentas tras sustituir las coordenadas de F en la ecuación:

$$-a^2b^2c^2 - b^2c^2(b^2+c^2-a^2) - c^2(b^2+c^2-a^2)b^2 + \frac{1}{2}(c^2b^2+b^2c^2)(2b^2+2c^2-a^2) =$$
$$-a^2b^2c^2 - 2b^4c^2 - 2b^2c^4 + 2a^2b^2c^2 + 2b^4c^2 + 2b^2c^4 - a^2b^2c^2 = 0.$$

Así, F yace sobre la circunferencia (APN), con lo que hemos terminado. □

§9 Problemas

Lema 7.31. *Sea ABC un triángulo con altura $\overline{AL}$ y sea M el punto medio de $\overline{AL}$. Si K es el punto simediano del triángulo ABC, demuestra que $\overline{KM}$ biseca a $\overline{BC}$.*



Demostración. Utilizamos coordenadas baricéntricas sobre el triángulo ABC. Vamos a calcular las coordenadas baricéntricas de M como intersección de la recta AL y la recta que pasa por los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

La recta AL puede calcularse utilizando el lema 17. Su ecuación resulta

$$0 = a^2(z-y) - (z+y)(c^2-b^2).$$

Por otro lado, la recta EF tiene ecuación general $ux+vy+wz=0$ y pasa por los puntos $E=(1:0:1)$ y $F=(1:1:0)$. Así, se cumplen las relaciones

$$u+w=0 \qquad \text{y} \qquad u+v=0.$$

De aquí se sigue $v=w$ y $v=-u$. La ecuación de la recta EF es $x-y-z=0$. La intersección de las rectas surge de resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a^2(z-y)-(z+y)(c^2-b^2)=0 \\ \hfill x-y-z=0 \end{cases}$$

por sustitución. De este modo obtenemos

$$\begin{aligned} a^2(z-y)-(z+y)(c^2-b^2)&=0, \\ (b^2-a^2-c^2)y+(a^2+b^2-c^2)z&=0, \end{aligned}$$

Con lo que se deduce

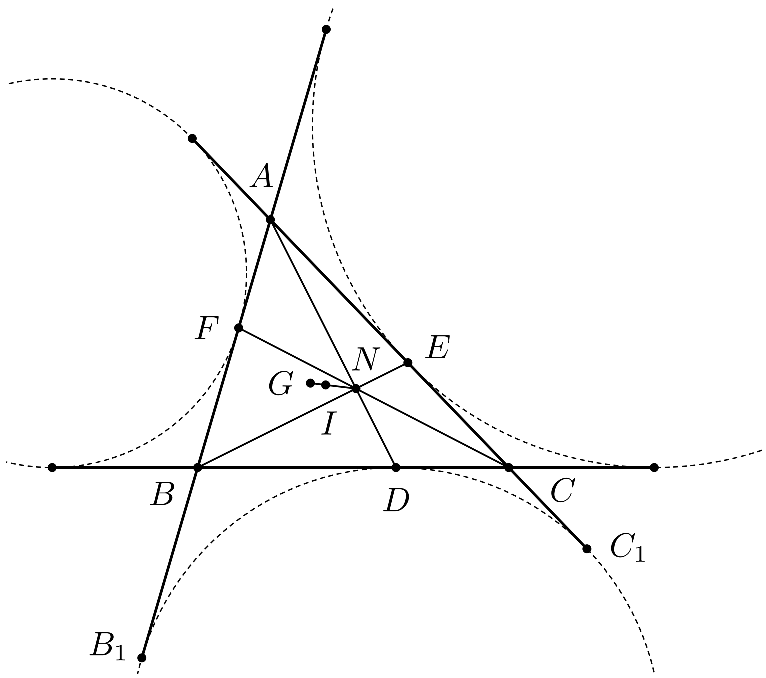
$$\frac{z}{y} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{a^2 + b^2 - c^2} \quad \Longrightarrow \quad M = (2a^2 : a^2 + b^2 - c^2 : a^2 + c^2 - b^2).$$

Observar que, utilizando la notación de Conway, las coordenadas de M pueden reescribirse como $M = (a^2 : S_C : S_B)$. Teniendo en cuenta que $K = (a^2 : b^2 : c^2)$, basta comprobar que los puntos M, K y $D = (0 : 1 : 1)$ son colineales. Así,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a^2 & S_C & S_B \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a^2 & b^2 - c^2 & S_C \\ a^2 & b^2 - c^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Esto prueba que D yace sobre la recta MK, con lo que hemos terminado. □

Problema 7.32. Denotamos mediante I y G el incentro y el baricentro de un triángulo ABC. Sea N el **punto de Nagel**, esto es, la intersección de las cevianas que unen A con el punto de contacto de la circunferencia A-excrita sobre $\overline{BC}$, y análogamente para B y C. Demuestra que I, G, N son colineales y que $NG = 2GI$.



Solución. Utilizamos coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC. Sean D, E y F los puntos de contacto de la circunferencia A-excrita, B-excrita y C-excrita, respectivamente. Recordamos que se tiene $AB_1 = AC_1 = s$, donde s denota el semiperímetro de ABC. De este modo se tiene

$$CD = CC_1 = s - b = \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{a-b+c}{2},$$

$$BD = BB_1 = s - c = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}.$$

De lo anterior se sigue que $D = (0 : a - b + c : a + b - c)$. Análogamente se prueba que $E = (-a + b + c : 0 : a + b - c)$ y $F = (-a + b + c : a - b + c : 0)$. Si el punto de Nagel tiene coordenadas $N = (x : y : z)$, obtenemos las relaciones

$$\frac{x}{z} = \frac{-a+b+c}{a+b-c} \qquad \text{y} \qquad \frac{y}{z} = \frac{a-b+c}{a+b-c}.$$

Por tanto, $N = (-a+b+c : a-b+c : a+b-c)$. Para comprobar que I, G, N son colineales, basta ver que se anula el determinante formado por las coordenadas de estos puntos. En efecto,

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ -a+b+c & a-b+c & a+b-c \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ -a+b+c & 2(a-b) & 2(a-c) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ 2(a-b) & 2(a-c) \end{vmatrix} \\
&= 2(b-a)(a-c) - 2(a-b)(c-a) = 0.
\end{aligned}$$

Para demostrar la segunda parte, normalizamos las coordenadas de los puntos:

$$I = \left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}\right), \quad N = \left(\frac{-a+b+c}{a+b+c}, \frac{a-b+c}{a+b+c}, \frac{a+b-c}{a+b+c}\right).$$

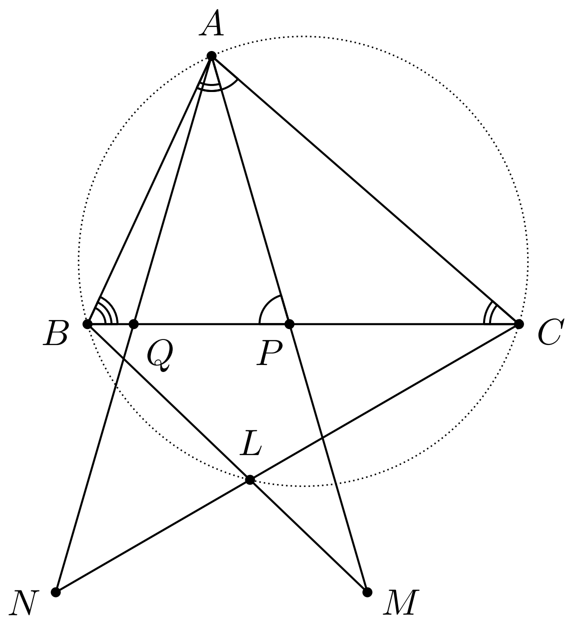
Teniendo en cuenta que $G = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, obtenemos los vectores

$$\overrightarrow{NG} = \left(\frac{4a-2b-2c}{3(a+b+c)}, \frac{-2a+4b-2c}{3(a+b+c)}, \frac{-2a-2b+4c}{3(a+b+c)}\right),$$

$$\overrightarrow{GI} = \left(\frac{2a-b-c}{3(a+b+c)}, \frac{-a+2b-c}{3(a+b+c)}, \frac{-a-b+2c}{3(a+b+c)}\right).$$

De aquí se concluye que $NG = 2GI$, con lo que hemos terminado. □

Problema 7.33 (IMO 2014/4). Los puntos P y Q yacen sobre el lado BC de un triángulo acutángulo ABC de forma que $\angle PAB = \angle BCA$ y $\angle CAQ = \angle ABC$. Sean M y N los puntos sobre AP y AQ, respectivamente, tales que P es el punto medio de AM y Q es el punto medio de AN. Demuestra que el punto de intersección de BM y CN yace sobre la circunferencia circunscrita del triángulo ABC.



Solución. Usamos coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC. Observar que, por construcción, los triángulos ABC y PBA son semejantes. Así, se tiene

$$\frac{BP}{c} = \frac{c}{a} \implies BP = \frac{c^2}{a}.$$

Análogamente, los triángulos ABC y QAC son semejantes, por lo que

$$\frac{CQ}{b} = \frac{b}{a} \implies CQ = \frac{b^2}{a}.$$

Esto permite escribir las coordenadas de los puntos P y Q como

$$P = \left(0, 1 - \frac{c^2}{a^2}, \frac{c^2}{a^2}\right) \qquad \text{y} \qquad Q = \left(0, \frac{b^2}{a^2}, 1 - \frac{b^2}{a^2}\right).$$

Ahora, dado que P y Q son los puntos medios de $\overline{AM}$ y $\overline{AN}$, se cumplen las relaciones $M = 2P - A$ y $N = 2Q - A$. Teniendo en cuenta que $A = (1, 0, 0)$, obtenemos

$$M = \left(-1, 2 - \frac{2c^2}{a^2}, \frac{2c^2}{a^2}\right) \qquad \text{y} \qquad N = \left(-1, \frac{2b^2}{a^2}, 2 - \frac{2b^2}{a^2}\right).$$

Las ecuaciones de las rectas BM y CN resultan

$$\frac{2c^2}{a^2}x + z = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{2b^2}{a^2}x + y = 0,$$

con lo que el punto de intersección entre ambas, L, tiene coordenadas

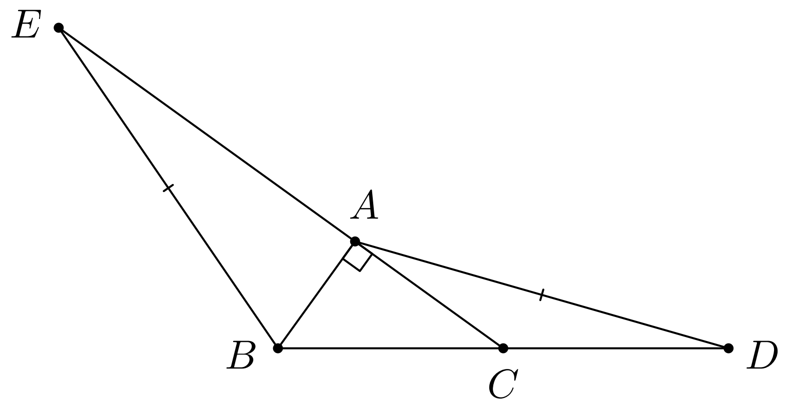
$$L = \left(a^2 : -2b^2 : -2c^2\right).$$

Para finalizar, basta comprobar que las coordenadas de L satisfacen la ecuación de la circunferencia circunscrita de ABC, esto es, $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$. Así,

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 4a^2b^2c^2 - 2a^2b^2c^2 - 2a^2b^2c^2 = 0,$$

lo que demuestra el resultado. $\square$

Problema 7.34 (EGMO 2013/1). El lado BC del triángulo ABC se prolonga por C hasta D, de modo que $CD = BC$. El lado CA se prolonga por A hasta E, de forma que $AE = 2CA$. Demuestra que, si $AD = BE$, entonces el triángulo ABC es rectángulo.



Solución. Utilizamos coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC. Es sencillo calcular las coordenadas baricéntricas de los puntos $D = (0, -1, 2)$ y $E = (3, 0, -2)$. Así, los vectores de desplazamiento correspondientes resultan

$$\overrightarrow{AD} = (-1, -1, 2) \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{BE} = (3, -1, -2).$$

Aplicamos la fórmula de la distancia dada por el teorema 12 para obtener

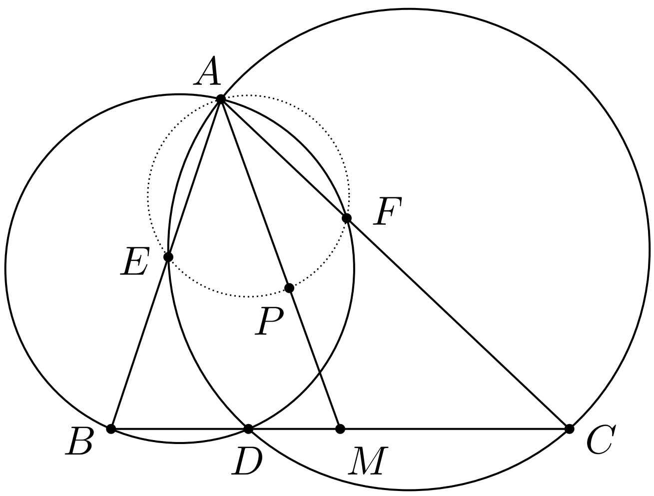
$$|AD|^2 = -2a^2 - 2b^2 + c^2, \qquad |BE|^2 = 2a^2 - 6b^2 - 3c^2.$$

La condición $AD = BE$ implica, por tanto

$$\begin{aligned} -2a^2 - 2b^2 + c^2 &= 2a^2 - 6b^2 - 3c^2 \\ 4b^2 + 4c^2 &= 4a^2 \\ b^2 + c^2 &= a^2, \end{aligned}$$

con lo que ABC debe ser rectángulo en A, y hemos terminado. □

Problema 7.35 (Lista corta ELMO 2013). En $\triangle ABC$, un punto D yace sobre la recta BC. La circunferencia circunscrita de ABD corta a $\overline{AC}$ en F (distinto de A), y la circunferencia circunscrita de ADC corta a $\overline{AB}$ en E (distinto de A). Demuestra que, a medida que D varía, la circunferencia circunscrita de AEF pasa siempre por un punto fijo distinto de A, y que ese punto yace sobre la mediana que va desde A hasta BC.



Solución. Usamos coordenadas baricéntricas respecto de ABC. Fijamos las coordenadas baricéntricas del punto D como $D = (0 : d : d')$ con $d + d' = 1$. Calculamos en primer lugar la ecuación de la circunferencia (ABD). Dado que A y B yacen sobre dicha circunferencia, se tiene $u = 0$ y $v = 0$. Además, sustituyendo las coordenadas del punto D, obtenemos

$$\begin{aligned} -a^2yz - b^2zx - c^2xy + wz(x + y + z) &= 0, \\ -a^2dd' + wd' &= 0. \end{aligned}$$

Concluimos que $w = a^2d$, con lo que la ecuación resulta

$$\alpha : -a^2yz - b^2zx - c^2xy + a^2dz(x + y + z) = 0.$$

De forma análoga deducimos la ecuación de (ACD):

$$\beta : -a^2yz - b^2zx - c^2xy + a^2d'y(x + y + z) = 0.$$

Calculamos ahora la intersección de la circunferencia α con la recta AC, cuya ecuación es $y = 0$. De este modo, se tiene

$$-b^2\cancel{z}x + a^2d\cancel{z}(x + z) = 0$$

$$-b^2x + a^2dx + a^2dz = 0$$

$$a^2dz = (b^2 - a^2d)x$$

$$\frac{z}{x} = \frac{b^2 - a^2d}{a^2d}.$$

Así, $F = (a^2d : 0 : b^2 - a^2d)$. Un cálculo análogo da $E = (a^2d' : c^2 - a^2d' : 0)$. A continuación hallamos la ecuación de la circunferencia (AEF); dado que A yace sobre dicha circunferencia, $u = 0$. Sustituimos ahora las coordenadas de los puntos E y F:

$$-c^2a^2d'(c^2 - a^2d') + v(c^2 - a^2d')c^2 = 0,$$

$$-b^2a^2d(b^2 - a^2d) + w(b^2 - a^2d)b^2 = 0.$$

Cancelando términos y despejando, obtenemos $v = a^2d'$ y $w = a^2d$. Así, deducimos

$$\omega : -a^2yz - b^2zx - c^2xy + a^2(d'y + dz)(x + y + z) = 0.$$

En vista de la indicación sobre el punto fijo P de la circunferencia ω, vamos a escribir $P = (t : 1 : 1)$ con $t \in \mathbb{R}$. Veamos si podemos hallar el valor de t sustituyendo estas coordenadas en la ecuación anterior.

$$-a^2 - b^2t - c^2t + a^2(t + 2) = 0,$$

$$t\,(b^2 + c^2 - a^2) = a^2,$$

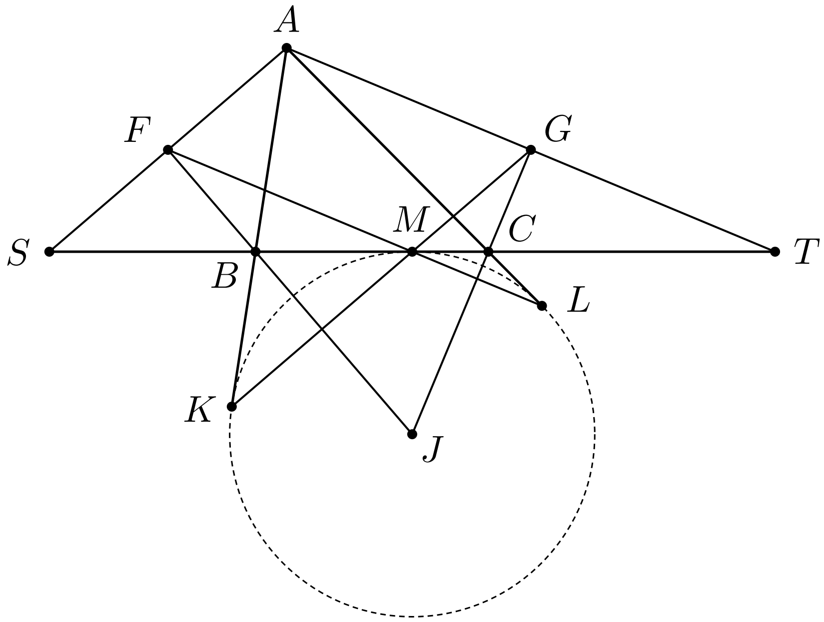
$$t = \frac{a^2}{b^2 + c^2 - a^2}.$$

Dado que las coordenadas del punto $P = (a^2 : 2S_A : 2S_A)$ no dependen de d ni de d', se sigue el resultado. Además, por definición, el punto yace sobre la mediana que va desde A hasta BC, como queríamos demostrar. $\square$

Problema 7.36 (IMO 2012/1). Dado el triángulo ABC, el punto J es el centro de la circunferencia excrita opuesta al vértice A. Esta circunferencia excrita es tangente al lado BC en M, y a las rectas AB y AC en K y L, respectivamente. Las rectas LM y BJ se cortan en F, y las rectas KM y CJ se cortan en G. Sea S el punto de corte de las rectas AF y BC, y sea T el punto de corte de las rectas AG y BC. Demuestra que M es el punto medio de ST.

Solución. Utilizamos coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC. Ya conocemos las coordenadas de los puntos $J = (-a : b : c)$ y $M = (0 : a - b + c : a + b - c)$, por lo que vamos a calcular las de los puntos restantes. Sabemos que

$$AK = s = \frac{1}{2}(a + b + c) \qquad \text{y} \qquad BK = s - c = \frac{1}{2}(a + b - c),$$



por lo que $K = (-a - b + c : a + b + c : 0)$. Observar que el signo negativo en la primera coordenada de K se debe a que las longitudes son dirigidas. De modo similar deducimos $L = (-a + b - c : 0 : a + b + c)$.

Vamos a hallar a continuación las ecuaciones de las rectas LM y BJ. Comenzamos por la primera; dado que $r_{LM} : ux + vy + wz = 0$ pasa por los puntos L y M, se tiene

$$u(-a+b-c) + w(a+b+c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = w\,\frac{a+b+c}{a-b+c},$$

$$v(a-b+c) + w(a+b-c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad v = w\,\frac{-a-b+c}{a-b+c}.$$

Por tanto, la ecuación de LM se expresa como

$$r_{LM} : (a+b+c)\,x + (-a-b+c)\,y + (a-b+c)\,z = 0.$$

En cuanto a la recta BJ, sabemos que $r_{BJ} : ux + vy + wz = 0$ pasa por los puntos B y J, por lo que $v = 0$ y, además,

$$-ua + wc = 0 \quad \Longrightarrow \quad w = \frac{ua}{c}.$$

Así, la ecuación de la recta BJ queda $r_{BJ} : cx + az = 0$.

Hallamos ahora las coordenadas baricéntricas del punto F como intersección de las rectas LM y BJ. Despejando z en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, se obtiene

$$\begin{aligned}(a+b+c)\,x + (-a-b+c)\,y + (a-b+c)\cdot\frac{-cx}{a} &= 0\\ (a^2 + ab + \cancel{ac} - \cancel{ac} + bc - c^2)\,x + (-a-b+c)\,y &= 0\end{aligned}$$

Despejamos la variable y, con lo que

$$y = \frac{a^2 + ab + bc - c^2}{a+b-c}\,x = \frac{(a+c)\,(a+b-c)}{a+b-c}\,x = (a+c)\,x.$$

Así, $F = (a : a+c : -c)$. Los mismos razonamientos aplicados a las rectas KM y CJ nos permiten obtener

$$\begin{aligned} r_{KM}: &\ (a+b+c)\,x + (a+b-c)\,y + (-a+b-c)\,z = 0, \\ r_{CJ}: &\ bx + ay = 0, \end{aligned}$$

de modo que $G = (a : -b : a+b)$. Se deduce que los puntos S y T tienen coordenadas

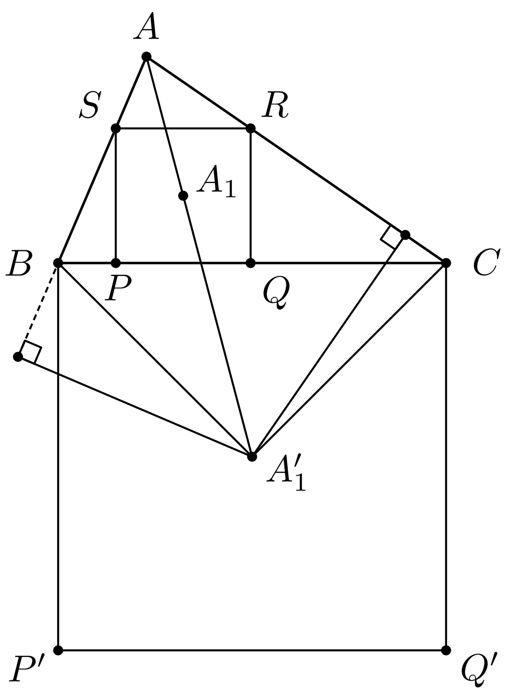
$$S = (0 : a+c : -c) \qquad \text{y} \qquad T = (0 : -b : a+b).$$

Finalmente, normalizando las coordenadas y calculando $\frac{1}{2}(S+T)$, queda

$$\frac{1}{2}(S+T) = \left(0, \frac{a-b+c}{2a}, \frac{a+b-c}{2a}\right).$$

Estas son las coordenadas normalizadas del punto M, con lo que hemos terminado. $\square$

Problema 7.37 (Lista corta 2001/G1). Sea A_1 el centro del cuadrado inscrito en el triángulo acutángulo ABC con dos vértices del cuadrado sobre el lado $\overline{BC}$. Así, uno de los dos vértices restantes del cuadrado yace sobre el lado $\overline{AB}$ y el otro sobre $\overline{AC}$. Los puntos B_1, C_1 se definen de forma análoga para los cuadrados inscritos con dos vértices sobre los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente. Demuestra que las rectas AA_1, BB_1, CC_1 son concurrentes.



Solución. Usamos coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC. En primer lugar, observar que existe una homotecia de centro A que hace corresponder el cuadrado $PQRS$, inscrito sobre el lado $\overline{BC}$, con el cuadrado $P'Q'CB$, de lado a. Esta homotecia lleva el centro A_1 del cuadrado $PQRS$ al centro A'_1 del cuadrado $P'Q'CB$.

Vamos a calcular las coordenadas baricéntricas del punto A'_1 utilizando la definición por áreas. Notar que, en realidad, solo necesitamos la segunda y tercera coordenadas, dado que lo que nos interesa es la parametrización de la ceviana AA_1. Se tiene

$$[A_1'BC] = -\frac{1}{2}\,a \cdot \frac{1}{2}a = -\frac{1}{4}\,a^2.$$

$$[A_1'CA] = \frac{1}{2}\,b\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,a\ \mathrm{sen}(C+45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{4}\,ab\ \mathrm{sen}(C+45^\circ).$$

$$[A_1'AB] = \frac{1}{2}\,c\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,a\ \mathrm{sen}(B+45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{4}\,ac\ \mathrm{sen}(B+45^\circ).$$

Simplificamos la expresión usando la identidad

$$\mathrm{sen}(\alpha+45^\circ) = \mathrm{sen}\,\alpha\cos 45^\circ + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha\right).$$

Con todo, la parametrización de la ceviana AA_1 resulta

$$AA_1:\ \big(r : b\ (\mathrm{sen}\,C + \cos C) : c\ (\mathrm{sen}\,B + \cos B)\big) \quad \text{con } r \in \mathbb{R}.$$

Un razonamiento análogo permite calcular las parametrizaciones de BB_1 y CC_1,

$$BB_1: \big(a\ (\mathrm{sen}\,C + \cos C) : s : c\ (\mathrm{sen}\,A + \cos A)\big) \quad \text{con } s \in \mathbb{R},$$

$$CC_1: \big(a\ (\mathrm{sen}\,B + \cos B) : b\ (\mathrm{sen}\,A + \cos A) : t\,\big) \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Sea ahora $P = (x : y : z)$ el punto de concurrencia entre ambas cevianas. Tenemos

$$\frac{y}{z} = \frac{b\,(\mathrm{sen}\,C + \cos C)}{c\,(\mathrm{sen}\,B + \cos B)}, \qquad \frac{x}{z} = \frac{a\,(\mathrm{sen}\,C + \cos C)}{c\,(\mathrm{sen}\,A + \cos A)}.$$

Por tanto, el punto buscado tiene coordenadas

$$P = \left(\frac{a\,(\mathrm{sen}\,C + \cos C)}{c\,(\mathrm{sen}\,A + \cos A)} : \frac{b\,(\mathrm{sen}\,C + \cos C)}{c\,(\mathrm{sen}\,B + \cos B)} : 1\right).$$

Multiplicando por los factores de los denominadores resulta $P = (x : y : z)$, donde

$$x = a\,\big(\,\mathrm{sen}\,B + \cos B\big)\big(\,\mathrm{sen}\,C + \cos C\big),$$

$$y = b\,\big(\,\mathrm{sen}\,C + \cos C\big)\big(\,\mathrm{sen}\,A + \cos A\big),$$

$$z = c\,\big(\,\mathrm{sen}\,A + \cos A\big)\big(\,\mathrm{sen}\,B + \cos B\big).$$

Es sencillo comprobar que P yace también sobre CC_1, lo que termina el problema. $\square$

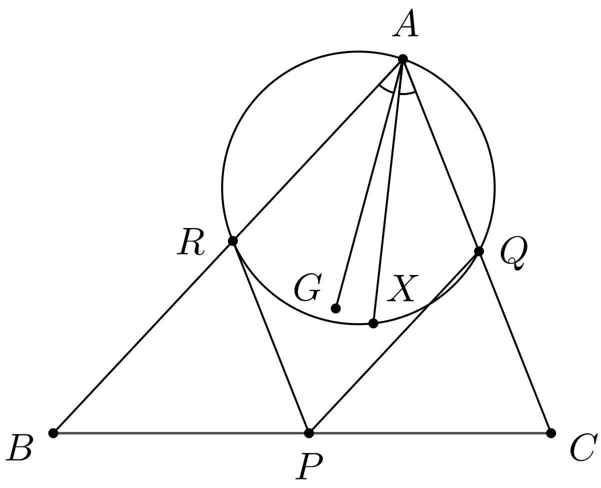
Mencionamos como nota al margen que las coordenadas anteriores pueden simplificarse usando identidades trigonométricas y eliminando factores comunes. En efecto, para la primera coordenada se tiene

$$\begin{aligned} a(\mathrm{sen}\,B + \cos B)(\mathrm{sen}\,C + \cos C) &= \mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B\,\mathrm{sen}\,C\ \frac{a}{\mathrm{sen}\,A}\cdot(1+\cot B)\cdot(1+\cot C) \\ &= 2R\ \mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B\,\mathrm{sen}\,C\cdot(1+\cot B)\cdot(1+\cot C). \end{aligned}$$

Así, el punto de concurrencia puede expresarse como

$$P = \left(\frac{1}{1+\cot A} : \frac{1}{1+\cot B} : \frac{1}{1+\cot C}\right).$$

Problema 7.38 (USA TST 2008/7). Sea ABC un triángulo con baricentro G. Sea P un punto variable sobre el segmento BC. Los puntos Q y R yacen sobre los lados AC y AB, respectivamente, de forma que $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{PR} \parallel \overline{AC}$. Demuestra que, a medida que P se desplaza a lo largo del segmento BC, la circunferencia circunscrita del triángulo AQR pasa por un punto fijo X tal que $\angle BAG = \angle CAX$.



Solución. Usamos coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC. La definición de los puntos Q y R genera dos triángulos semejantes $\triangle QPC$ y $\triangle RBP$, así como un paralelogramo $PQAR$. Esto implica las relaciones

$$\frac{BR}{AR} = \frac{AQ}{CQ} = \frac{BP}{CP}$$

Por tanto, si $P = (0 : p : q)$ con $p + q = a$, entonces $Q = (q : p : 0)$ y $R = (p : 0 : q)$. Vamos a hallar la ecuación de la circunferencia (AQR), que denotamos mediante α. Dado que A pertenece a dicha circunferencia $u = 0$. Al sustituir las coordenadas de los puntos Q y R, obtenemos

$$-c^2pq + pva = 0 \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{c^2q}{a}, \qquad -b^2pq + qwa = 0 \quad \Longrightarrow \quad w = \frac{b^2p}{a}.$$

Así, la ecuación de (AQR) resulta

$$\alpha : \ -a^2yz - b^2zy - c^2xy + \left(\frac{c^2q}{a}y + \frac{b^2p}{a}z\right)(x + y + z) = 0.$$

La condición $\angle BAG = \angle CAX$ implica que la recta AX es la isogonal de la mediana AG, por lo que el punto X debe tener coordenadas baricéntricas $X = (t : b^2 : c^2)$ con $t \in \mathbb{R}$. Basta sustituir estas coordenadas en la ecuación de α para despejar t, verificando que la expresión resultante no depende de p ni de q. En efecto,

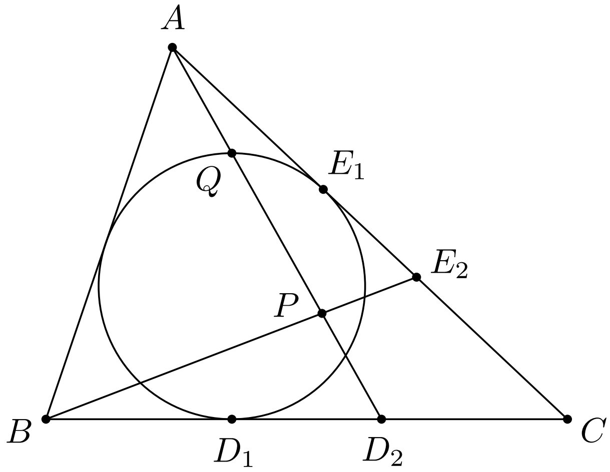
$$-a^2b^2c^2 - b^2c^2t - c^2tb^2 + \left(\frac{c^2q}{a}b^2 + \frac{b^2p}{a}c^2\right)(t + b^2 + c^2) = 0,$$

$$-a^2b^2c^2 - 2b^2c^2t + b^2c^2(t + b^2 + c^2) = 0,$$

$$-a^2 - 2t + t + b^2 + c^2 = 0.$$

Así, $t = b^2 + c^2 - a^2 = 2S_A$, con lo que $X = (2S_A : b^2 : c^2)$ es el punto fijo buscado. □

Problema 7.39 (USAMO 2001/2). Sea ABC un triángulo y sea ω su circunferencia inscrita. Denotamos mediante D_1 y E_1 los puntos en los que ω es tangente a los lados AC y BC, respectivamente. Denotamos mediante D_2 y E_2 los puntos sobre los lados BC y AC, respectivamente, tales que $CD_2 = BD_1$ y $CE_2 = AE_1$, y denotamos mediante P el punto de corte de los segmentos AD_2 y BE_2. La circunferencia ω corta al segmento AD_2 en dos puntos, de los que el más cercano al vértice A se denota mediante Q. Demuestra que $AQ = D_2P$.



Solución. Usamos coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC. Por el problema 4.8 ([1], pág. 61) sabemos que $\overline{D_1Q} \perp \overline{BC}$. Además, por el lema 4.9 ([1], pág. 61), D_2 y E_2 son los puntos de tangencia de las circunferencias A-excrita y B-excrita con los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Finalmente, el punto P es el punto de Nagel del triángulo ABC. Por tanto, podemos dar de manera inmediata las coordenadas homogéneas

$$P = \left(\frac{-a+b+c}{a+b+c}, \frac{a-b+c}{a+b+c}, \frac{a+b-c}{a+b+c} \right),$$

$$D_1 = \left(0, \frac{a+b-c}{2a}, \frac{a-b+c}{2a} \right),$$

$$Q = \left(\frac{t}{t+2a}, \frac{a-b+c}{t+2a}, \frac{a+b-c}{t+2a} \right).$$

Calculamos el vector de desplazamiento $\overrightarrow{D_1Q}$, que resulta

$$\overrightarrow{D_1Q} = \left(\frac{t}{t+2a}, \frac{-4ab+4ac-(a+b-c)\,t}{2a(t+2a)}, \frac{4ab-4ac-(a-b+c)\,t}{2a(t+2a)} \right).$$

A continuación utilizamos los vectores de desplazamiento $\overrightarrow{BC} = (0,-1,1)$ y $\overrightarrow{D_1Q}$ para expresar la condición $\overline{D_1Q} \perp \overline{BC}$ y despejar t. Obtenemos,

$$a^2\,(z-y) + x\,(c^2-b^2) = 0$$

$$a^2 \cdot \frac{8ab-8ac+2bt-2ct}{2a(t+2a)} + \frac{t}{t+2a} \cdot (c^2-b^2) = 0$$

$$a \cdot (4ab-4ac+bt-ct) + t \cdot (c^2-b^2) = 0$$

$$4a^2\cancel{(b-c)} + at\cancel{(b-c)} - t(b+c)\cancel{(b-c)} = 0$$

De este modo, el valor de t resulta

$$t = \frac{4a^2}{-a+b+c},$$

con lo que las coordenadas homogéneas de Q son

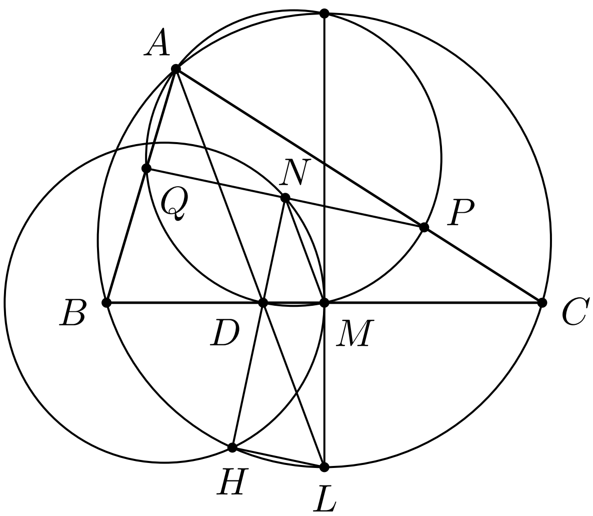
$$Q = \left(\frac{4a^2}{2a(a+b+c)}, \frac{(a-b+c)(-a+b+c)}{2a(a+b+c)}, \frac{(a+b-c)(-a+b+c)}{2a(a+b+c)} \right).$$

Dado que los puntos P y Q yacen ambos sobre la ceviana AD_2, para demostrar el resultado basta comprobar que se cumple la igualdad $x_P + x_Q = 1$, donde x_P y x_Q denotan las primeras coordenadas homogéneas de los puntos P y Q, respectivamente.

$$\begin{aligned} x_P + x_Q &= \frac{4a^2}{2a(a+b+c)} + \frac{-a+b+c}{a+b+c} \\ &= \frac{4a^2 - 2a^2 + 2ab + 2ac}{2a(a+b+c)} = \frac{2a^2 + 2ab + 2ac}{2a(a+b+c)} = 1, \end{aligned}$$

lo que termina el problema. □

Problema 7.40 (USA TSTST 2012/7). El triángulo ABC está inscrito en la circunferencia Ω. La bisectriz interior del ángulo A corta al lado BC y a Ω en D y L (distinto de A), respectivamente. Sea M el punto medio del lado BC. La circunferencia circunscrita del triángulo ADM corta de nuevo a los lados AB y AC en Q y P (distinto de A), respectivamente. Sea N el punto medio del segmento PQ, y sea H el pie de la perpendicular desde L sobre la recta ND. Demuestra que la recta ML es tangente a la circunferencia circunscrita del triángulo HMN.



Solución. Sabemos que LM es un diámetro de la circunferencia (ABC), por lo que $\angle DML = 90°$. Esto implica que el cuadrilátero $DHLM$ es cíclico, de modo que se tiene $\angle HML = \angle HDL$. Así, basta demostrar que $MN \parallel AL$ para terminar el problema.

Usamos coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC. Sabemos que

$$A = (1,0,0), \quad D = (0:b:c), \quad M = (0:1:1),$$

con lo que podemos hallar la ecuación de (ADM), cuya forma general es

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (ux + vy + wz)(x+y+z) = 0.$$

Del hecho de que A pertenezca a dicha circunferencia se deduce $u = 0$. Sustituyendo las coordenadas de M, obtenemos

$$-a^2 + (v + w) \cdot 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v + w = \frac{a^2}{2}.$$

De igual modo, al sustituir las coordenadas del punto D se tiene

$$-a^2bc + (vb + wc) \cdot (b + c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad bv + cw = \frac{a^2bc}{b + c}.$$

Multiplicando por b la primera ecuación y restándole la segunda, queda

$$(b - c)w = \frac{a^2b(b + c) - 2a^2bc}{2(b + c)} = \frac{a^2b^2 - a^2bc}{2(b + c)} = \frac{a^2b(b - c)}{2(b + c)}$$

$$w = \frac{a^2b}{2(b + c)}.$$

Análogamente, multiplicamos por c la primera ecuación y le restamos la segunda,

$$(c - b)v = \frac{a^2c(b + c) - 2a^2bc}{2(b + c)} = \frac{a^2c^2 - a^2bc}{2(b + c)} = \frac{a^2c(c - b)}{2(b + c)}$$

$$v = \frac{a^2c}{2(b + c)}.$$

En consecuencia, la ecuación de (ADM) resulta

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + \frac{a^2}{2(b + c)}\,(cy + bz)\,(x + y + z) = 0.$$

Vamos ahora a calcular las coordenadas de los puntos P y Q como puntos de intersección entre la circunferencia (ADM) y los lados AC y BC, respectivamente. Para el primero, sustituimos el valor $y = 0$ en la ecuación anterior,

$$-b^2zx + \frac{a^2}{2(b + c)}\,bz\,(x + z) = 0$$

$$-bx + \frac{a^2}{2(b + c)}(x + z) = 0$$

$$(-2b^2 - 2bc + a^2)x + a^2z = 0$$

$$\frac{x}{z} = \frac{a^2}{2b^2 + 2bc - a^2}.$$

Así, $P = (a^2 : 0 : 2b^2 + 2bc - a^2)$. Unos cálculos análogos muestran que las coordenadas del punto Q son $Q = (a^2 : 2c^2 + 2bc - a^2 : 0)$. En coordenadas homogéneas, se tiene

$$P = \left(\frac{a^2}{2b(b + c)},\, 0,\, \frac{2b^2 + 2bc - a^2}{2b(b + c)}\right) \quad \text{y} \quad Q = \left(\frac{a^2}{2c(b + c)},\, \frac{2c^2 + 2bc - a^2}{2c(b + c)},\, 0\right).$$

Por último, las coordenadas de N, punto medio del segmento $\overline{PQ}$, resultan

$$N = \left(\frac{a^2}{4bc},\, \frac{2c^2 + 2bc - a^2}{4c(b + c)},\, \frac{2b^2 + 2bc - a^2}{4b(b + c)}\right),$$

de modo que el vector de desplazamiento $\overrightarrow{MN}$ es

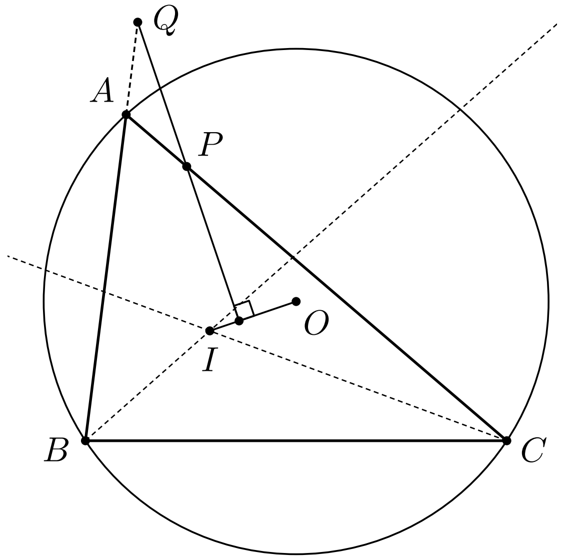
$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{a^2}{4bc},\ \frac{-a^2}{4c(b+c)},\ \frac{-a^2}{4c(b+c)}\right).$$

Vamos a comprobar que este vector es proporcional al vector $\overrightarrow{AD}$. En efecto

$$\overrightarrow{AD} = \left(-1,\ \frac{b}{b+c},\ \frac{c}{b+c}\right) = -\frac{4bc}{a^2}\,\overrightarrow{MN},$$

con lo que hemos terminado. $\square$

Problema 7.41. Sea ABC un triángulo con incentro I. Denotamos mediante P y Q los simétricos de B y C respecto de $\overline{CI}$ y $\overline{BI}$, respectivamente. Demuestra que $\overline{PQ} \perp \overline{OI}$, donde O es el circuncentro de ABC.



Solución. Usamos coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC. Por construcción, $PC = a$ y $QB = a$, con lo que los puntos P y Q tienen coordenadas homogéneas

$$P = \left(\frac{a}{b},\ 0,\ \frac{b-a}{b}\right), \qquad Q = \left(\frac{a}{c},\ \frac{c-a}{c},\ 0\right).$$

Por otro lado, el incentro tiene coordenadas homogéneas

$$I = \left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}\right).$$

Calculamos a continuación los vectores de desplazamiento $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{OI}$, entendiendo que identificamos O con el vector nulo $\vec{0}$. Con todo, se tiene

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{a(b-c)}{bc}, \frac{c-a}{c}, \frac{a-b}{b}\right) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{OI} = \left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}\right).$$

Aplicamos ahora el criterio dado por el teorema 14 para comprobar que $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OI}$. La igualdad a verificar es

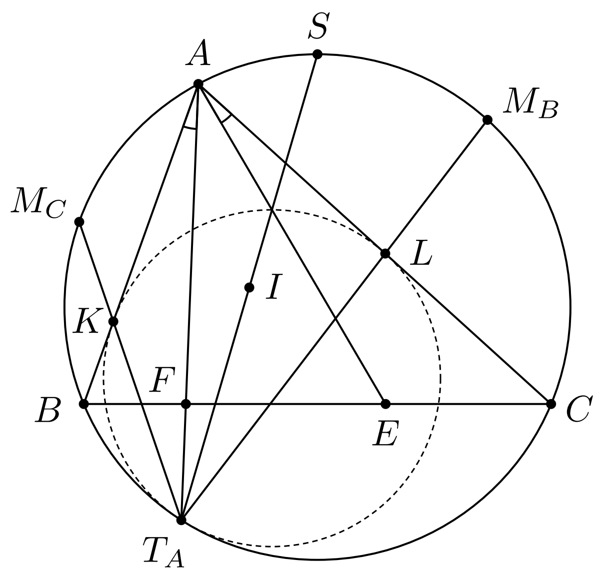
$$a^2(z_1y_2 + y_1z_2) + b^2(x_1z_2 + z_1x_2) + c^2(y_1x_2 + x_1y_2) = 0.$$

Sustituyendo y simplificando algunos factores, se obtiene

$$\begin{aligned} a^2\left[\frac{a-b}{a+b+c}+\frac{c-a}{a+b+c}\right]+b\left[\frac{a(b-c)}{a+b+c}+\frac{(a-b)a}{a+b+c}\right]+c\left[\frac{(c-a)a}{a+b+c}+\frac{a(b-c)}{a+b+c}\right] \\ =a^2\cdot\frac{-b+c}{a+b+c}+b\cdot\frac{a^2-ac}{a+b+c}+c\cdot\frac{ab-a^2}{a+b+c} \\ =\frac{a}{a+b+c}\cdot(-ab+ac+ab-bc+bc-ac)=0. \end{aligned}$$

Por tanto, $\overline{PQ}\perp\overline{OI}$ y hemos terminado. □

Lema 7.42. *Sea ABC un triángulo con circunferencia circunscrita Ω y denotamos mediante T_A el punto de tangencia entre la circunferencia inscrita A-mixtilínea y Ω. Definimos T_B y T_C análogamente. Demuestra que las rectas AT_A, BT_B, CT_C, IO son concurrentes, donde I y O denotan el incentro y el circuncentro del triángulo ABC.*



Demostración. Denotamos mediante E el punto de contacto entre la circunferencia A-excrita y el lado $\overline{BC}$. Sea F el punto de corte entre la recta AT_A y el lado $\overline{BC}$. Por el lema 4.40 ([1], pág. 69) sabemos que las cevianas $\overline{AE}$ y $\overline{AF}$ son isogonales. Usando coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC, tenemos

$$E=(0:a-b+c:a+b-c),\quad F=\left(0:\frac{b^2}{a-b+c}:\frac{c^2}{a+b-c}\right).$$

Por tanto, las cevianas AT_A, BT_B, CT_C pueden parametrizarse como

$$AT_A:\left(r\ :\ \frac{b^2}{a-b+c}\ :\ \frac{c^2}{a+b-c}\right)\quad \text{con } r\in\mathbb{R},$$

$$BT_B:\left(\frac{a^2}{-a+b+c}\ :\ s\ :\ \frac{c^2}{a+b-c}\right)\quad \text{con } s\in\mathbb{R},$$

$$CT_C:\left(\frac{a^2}{-a+b+c}\ :\ \frac{b^2}{a-b+c}\ :\ t\right)\quad \text{con } t\in\mathbb{R}.$$

Es claro que el punto de concurrencia P es el conjugado isogonal del punto de Nagel del triángulo ABC. Sus coordenadas baricéntricas son

$$P = \left(\frac{a^2}{-a+b+c} \ : \ \frac{b^2}{a-b+c} \ : \ \frac{c^2}{a+b-c}\right).$$

Para finalizar, basta comprobar que los puntos I, O y P son colineales, donde

$$I = (a : b : c), \quad O = (a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C).$$

Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 S_A & b^2 S_B & c^2 S_C \\ \frac{a^2}{-a+b+c} & \frac{b^2}{a-b+c} & \frac{c^2}{a+b-c} \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ S_A & S_B & S_C \\ \frac{1}{-a+b+c} & \frac{1}{a-b+c} & \frac{1}{a+b-c} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{abc}{K} \begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ S_A & S_B & S_C \\ (a-b+c)(a+b-c) & (-a+b+c)(a+b-c) & (-a+b+c)(a-b+c) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{abc}{K} \begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ S_A & S_B & S_C \\ 2bc - S_A & 2ca - S_B & 2ab - S_C \end{vmatrix},$$

donde la constante K es una abreviatura de la expresión

$$K = (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

Observamos que, en el último determinante, la tercera fila es combinación lineal de las dos primeras, ya que $F_3 = 2F_1 - F_2$. Concluimos que el determinante es idénticamente cero, por lo que los puntos I, O, P están alineados. Esto termina el problema. $\square$

Problema 7.43 (TST Diciembre USA para la IMO 2012). En el triángulo acutángulo ABC, $\angle A < \angle B$ y $\angle A < \angle C$. Sea P un punto variable sobre el lado BC. Los puntos D y E yacen sobre los lados AB y AC, respectivamente, de forma que $BP = PD$ y $CP = PE$. Demuestra que, a medida que P se desplaza a lo largo del lado BC, la circunferencia circunscrita del triángulo ADE pasa por un punto fijo distinto de A.

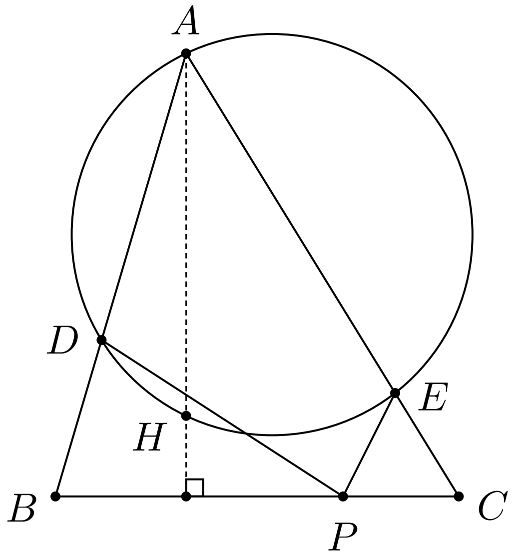
Solución. Usamos coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC. Escribimos $P = (0 : p : q)$ con $p + q = a$, de forma que $BP = q$ y $CP = p$. Aplicando el teorema del seno a los triángulos isósceles PDB y PCE, obtenemos

$$\frac{BD}{\operatorname{sen}(180^\circ - 2B)} = \frac{BP}{\operatorname{sen} B} \quad \Longrightarrow \quad BD = 2q\cos B,$$

$$\frac{CE}{\operatorname{sen}(180^\circ - 2C)} = \frac{CP}{\operatorname{sen} C} \quad \Longrightarrow \quad CE = 2p\cos C.$$

Con esto, las coordenadas baricéntricas de D y E resultan

$$D = (2q\cos B : c - 2q\cos B : 0) \quad \text{y} \quad E = (2p\cos C : 0 : b - 2p\cos C)\,.$$



Para simplificar la notación, en lo que sigue escribiremos

$$\cos B = \frac{S_B}{ca} \quad \text{y} \quad \cos C = \frac{S_C}{ab}.$$

Calculamos ahora la ecuación de la circunferencia (ADE), que denotamos mediante α. Dado que A pertenece a dicha circunferencia, $u = 0$. Sustituyendo las coordenadas del punto D se obtiene la igualdad

$$-c^2 \cdot 2q\,\frac{S_B}{ca} \cdot \left(c - 2q\,\frac{S_B}{ca}\right) + \left(c - 2q\,\frac{S_B}{ca}\right) v\,c = 0.$$

Simplificando y despejando v, queda

$$v = 2q\,\frac{S_B}{a}.$$

Trabajando de igual modo con las coordenadas del punto E, hallamos

$$w = 2p\,\frac{S_C}{a}.$$

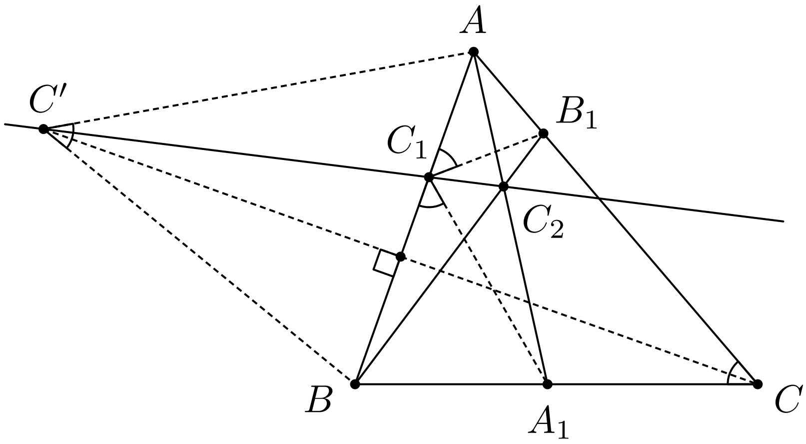
Así, la ecuación buscada resulta

$$\alpha : -a^2yz - b^2zx - c^2xy + \frac{2}{a}\,(qS_B\,y + pS_C\,z)\,(x+y+z) = 0.$$

Nuestra conjetura es que el punto fijo de α es el ortocentro $H = (S_{BC} : S_{CA} : S_{AB})$, donde $S_{BC} = S_BS_C$, etcétera. Para comprobar esto, basta ver que H verifica la anterior ecuación independientemente de los valores de p y q. En efecto,

$$\begin{aligned}
&- a^2S_A^2S_BS_C - b^2S_AS_B^2S_C - c^2S_AS_BS_C^2 + \frac{2}{a}\,(qS_{ABC} + pS_{ABC})\,(S_{BC} + S_{CA} + S_{AB}) \\
&= -S_{ABC} \cdot \left(a^2S_A + b^2S_B + c^2S_C\right) - 2S_{ABC}(S_{BC} + S_{CA} + S_{AB}) \\
&= -S_{ABC} \cdot \left(2S^2 - 2S^2\right) = 0.
\end{aligned}$$

Concluimos que H es el punto fijo de la circunferencia α, como queríamos probar. □



Problema 7.44 (Sharygin 2013). Sea C_1 un punto arbitrario sobre el lado AB de $\triangle ABC$. Los puntos A_1 y B_1 se hallan sobre las semirrectas BC y AC de modo que se cumple $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1 = \angle ACB$. Las rectas AA_1 y BB_1 se cortan en el punto C_2. Demuestra que todas las rectas C_1C_2 tienen un punto en común.

Solución. Usamos coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC. Escribimos $C_1 = (p : q : 0)$, con $p + q = c$. Vamos a utilizar las relaciones angulares para expresar las coordenadas de A_1 y B_1 en términos de p y q. Observar que se tienen las semejanzas

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1BC_1 \sim \triangle AB_1C_1,$$

de donde se deducen las relaciones

$$\frac{A_1B}{p} = \frac{c}{a} \implies A_1B = \frac{cp}{a}, \qquad \frac{B_1A}{q} = \frac{c}{b} \implies B_1A = \frac{cq}{b}.$$

Por tanto, se tiene

$$A_1 = \left(0 : a - \frac{cp}{a} : \frac{cp}{a}\right), \qquad B_1 = \left(b - \frac{cq}{b} : \frac{cq}{b}\right).$$

Vamos a calcular ahora las coordenadas del punto $C_2 = (x : y : z)$ como intersección de las cevianas AA_1 y BB_1. Se tienen las relaciones

$$\frac{x}{z} = \frac{b^2 - cq}{cq} \quad \text{y} \quad \frac{y}{z} = \frac{a^2 - cp}{cp},$$

de modo que

$$C_2 = \left(\frac{b^2 - cq}{cq} : \frac{a^2 - cp}{cp} : 1\right) = \left(\frac{b^2}{q} - c : \frac{a^2}{p} - c : c\right).$$

Nuestra conjetura es que el punto común a todas las rectas C_1C_2 es el simétrico del vértice C respecto del lado $\overline{AB}$, que denotamos mediante C'. Para calcularlo, hallamos en primer lugar las coordenadas del pie de la perpendicular desde C sobre el lado $\overline{BC}$, que llamamos $D = (x, 1 - x, 0)$. Por el teorema 14 aplicado a los vectores de desplazamiento $\overrightarrow{CD} = (x, 1 - x, -1)$ y $\overline{AB} = (-1, 1, 0)$, resulta

$$a^2 \cdot (-1) + b^2 \cdot 1 + c^2[(-1) \cdot (1 - x) + x] = 0$$

$$b^2 - a^2 + c^2 \cdot (2x - 1) = 0,$$

de donde puede despejarse x para obtener

$$x = \frac{a^2+c^2-b^2}{2c^2} \quad \Longrightarrow \quad D = \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c^2}, \frac{b^2+c^2-a^2}{2c^2}, 0\right).$$

Ahora, dado que $D = \frac{1}{2}(C + C')$, deducimos

$$C' = 2D - C = \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{c^2}, \frac{b^2+c^2-a^2}{c^2}, -1\right).$$

Para terminar, debemos comprobar que los puntos C_1, C_2 y C' son colineales independientemente del valor de p y q. Para ello, calculamos el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} p & q & 0 \\ \frac{b^2}{q} - c & \frac{a^2}{p} - c & c \\ \frac{a^2+c^2-b^2}{c^2} & \frac{b^2+c^2-a^2}{c^2} & -1 \end{vmatrix} =$$

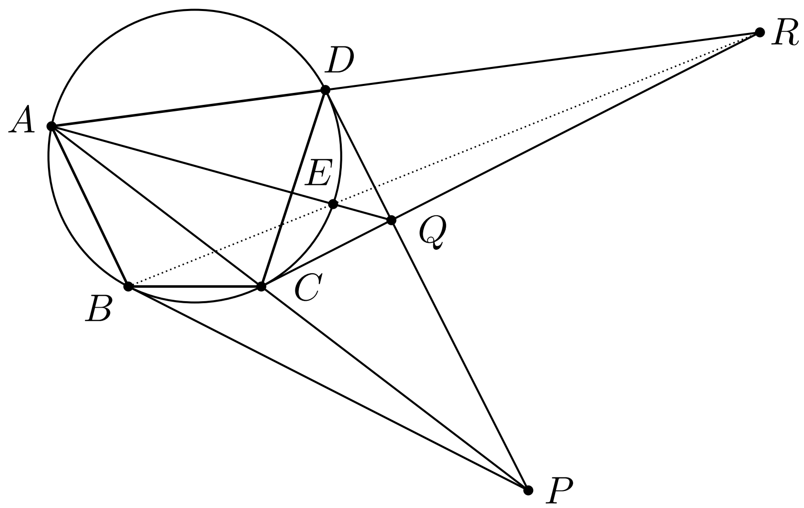
$$= -c \cdot \left[\frac{p(b^2+c^2-a^2)}{c^2} - q\frac{a^2+c^2-b^2}{c^2}\right] - (a^2 - cp - b^2 + cq)$$

$$= \frac{-b^2p - \cancel{c^2p} + a^2p + a^2q + \cancel{c^2q} - b^2q - a^2c + \cancel{c^2p} + b^2c - \cancel{c^2q}}{c}$$

$$= \frac{(p+q)(a^2-b^2) + c(b^2-a^2)}{c} = 0.$$

La última igualdad se sigue ya que $p + q = c$. □

Problema 7.45 (APMO 2013/5). Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia ω, y sea P un punto sobre la prolongación de AC tal que $\overline{PB}$ y $\overline{PD}$ son tangentes a ω. La recta tangente en C corta a $\overline{PD}$ en Q y a la recta AD en R. Sea E el segundo punto de corte entre $\overline{AQ}$ y ω. Demuestra que B, E, R son colineales.



Solución. Usamos coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo DBC. Denotamos las longitudes de los lados del triángulo mediante $a = BC$, $b = CD$, $c = DB$. Con esta notación, las ecuaciones de las tangentes a ω en los vértices D, B, C son, respectivamente,

$$b^2z + c^2y = 0, \quad c^2x + a^2z = 0, \quad a^2y + b^2x = 0.$$

Comenzamos calculando las coordenadas del punto P como intersección de las tangentes en D y B. Obtenemos las relaciones

$$\frac{y}{z} = \frac{-b^2}{c^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{z} = \frac{-a^2}{c^2},$$

de donde resultan las coordenadas

$$P = \left(\frac{-a^2}{c^2} : \frac{-b^2}{c^2} : 1 \right) = \left(-a^2 : -b^2 : c^2 \right).$$

Las coordenadas del punto Q pueden calcularse de manera análoga a las de P, como intersección de las tangentes a ω en D y C. El resultado es $Q = (a^2 : -b^2 : c^2)$.

A continuación hallamos la ecuación de la recta PC. Dado que C pertenece a dicha recta, $w = 0$. Sustituyendo las coordenadas de P en la ecuación general,

$$ux - \frac{a^2}{b^2}uy = 0 \quad \Longrightarrow \quad b^2x - a^2y = 0.$$

Con lo anterior, podemos calcular las coordenadas del punto A como el punto de corte entre la circunferencia ω y la recta PC. Despejando x en la ecuación de la recta y sustituyendo en la de ω, queda

$$\begin{aligned} -a^2\cancel{y}z - b^2z\,\frac{a^2\cancel{y}}{b^2} - c^2\,\frac{a^2y}{b^2}\,\cancel{y} &= 0 \\ -\cancel{a^2}z - \cancel{a^2}z - \frac{c^2\cancel{a^2}}{b^2}y &= 0 \\ \frac{z}{y} &= \frac{-c^2}{2b^2}. \end{aligned}$$

Así, deducimos que las coordenadas de A son

$$A = \left(\frac{a^2}{b^2} : 1 : \frac{-c^2}{2b^2} \right) = \left(2a^2 : 2b^2 : -c^2 \right).$$

Esto nos lleva a calcular la ecuación de la recta AD. Sabemos que $u = 0$, y sustituyendo las coordenadas de A obtenemos

$$2b^2v - c^2w = 0 \quad \Longrightarrow \quad w = \frac{2b^2}{c^2}v,$$

con lo que la ecuación buscada es

$$\cancel{v}y + \frac{2b^2}{c^2}\cancel{v}z = 0 \quad \Longrightarrow \quad c^2y + 2b^2z = 0.$$

Estamos en situación de poder calcular las coordenadas del punto R como intersección de la recta AD y la tangente a ω en C. Los cálculos son análogos a los ya realizados y dan como resultado $R = (-2a^2 : 2b^2 : -c^2)$. Así, podemos deducir de manera sencilla la ecuación de la recta BR, dada por

$$c^2x - 2a^2z = 0.$$

El último paso que nos falta antes de hallar las coordenadas del punto E es conocer la ecuación de la recta AQ. Puede hacerse de modo sencillo calculando el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a^2 & 2b^2 & -c^2 \\ a^2 & -b^2 & c^2 \end{vmatrix} = x\left(2b^2c^2 - b^2c^2\right) - y\left(2a^2c^2 + a^2c^2\right) + z\left(-2a^2b^2 - 2a^2b^2\right)$$

$$= b^2c^2x - 3a^2c^2y - 4a^2b^2z = 0.$$

Con todo lo anterior, vamos a calcular las coordenadas del punto E como intersección de las rectas BR y AQ. Despejamos x en la ecuación de la primera recta,

$$c^2x - 2a^2z = 0 \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{2a^2}{c^2}\,z,$$

de modo que, al sustituir en la segunda,

$$\begin{aligned} b^2\cancel{c^2}\,\frac{2\cancel{a^2}}{\cancel{c^2}}\,z - 3\cancel{a^2}c^2y - 4\cancel{a^2}b^2z &= 0 \\ 2b^2z - 3c^2y - 4b^2z &= 0 \\ \frac{y}{z} &= \frac{-2b^2}{3c^2}. \end{aligned}$$

Así, las coordenadas son

$$E = \left(\frac{2a^2}{c^2} : \frac{-2b^2}{3c^2} : 1\right) = \left(6a^2 : -2b^2 : 3c^2\right).$$

Para terminar el problema, basta comprobar que el punto E yace sobre la circunferencia ω. Para ello, sustituimos sus coordenadas en la ecuación, obteniendo

$$-a^2\cdot(-6b^2c^2) - b^2\cdot 18a^2c^2 - c^2\cdot(-12a^2b^2) = 6a^2b^2c^2 - 18a^2b^2c^2 + 12a^2b^2c^2 = 0,$$

con lo que hemos terminado. □

Problema 7.46 (USAMO 2005/3). Sea ABC un triángulo acutángulo, y sean P y Q dos puntos sobre su lado BC. Construimos un punto C_1 de tal forma que el cuadrilátero convexo $APBC_1$ es cíclico, $\overline{QC_1} \parallel \overline{CA}$, y C_1 y Q yacen en lados opuestos respecto a la recta AB. Construimos un punto B_1 de tal forma que el cuadrilátero convexo $APCB_1$ es cíclico, $\overline{QB_1} \parallel \overline{BA}$, y B_1 y Q yacen en lados opuestos respecto a la recta AC. Demuestra que los puntos B_1, C_1, P y Q yacen sobre una circunferencia.

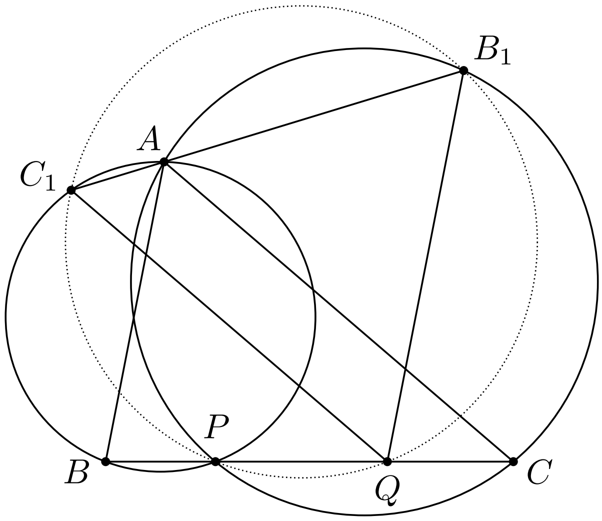
Solución. Sea C_1' el punto de intersección entre la recta B_1A y la circunferencia (APB). Se tienen las relaciones angulares

$$\angle B_1QP = \angle C_1AP = 180^\circ - \angle PBA = 180^\circ - \angle PC_1'B_1,$$

por lo que el cuadrilátero PQB_1C_1' es cíclico. Ahora bien,

$$\angle C_1'QP = \angle C_1'B_1P = \angle C,$$

por lo que $C_1' = C_1$ y hemos terminado. □



Problema 7.47 (Lista corta 2011/G2). Sea $A_1A_2A_3A_4$ un cuadrilátero no cíclico. Para $1 \leq i \leq 4$, sean O_i y r_i el circuncentro y el circunradio del triángulo $A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ (donde $A_{i+4} = A_i$). Demuestra que

$$\frac{1}{O_1A_1^2 - r_1^2} + \frac{1}{O_2A_2^2 - r_2^2} + \frac{1}{O_3A_3^2 - r_3^2} + \frac{1}{O_4A_4^2 - r_4^2} = 0.$$

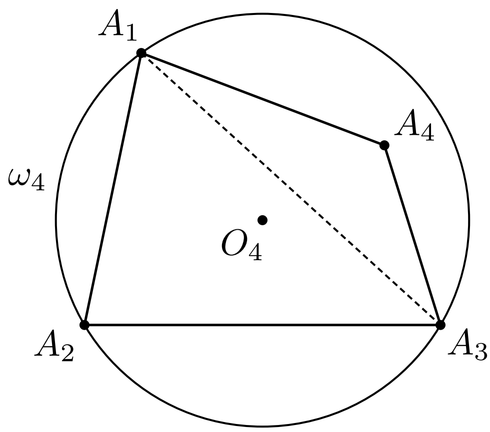
Solución. Utilizamos coordenadas baricéntricas respecto del triángulo $A_1A_2A_3$. Así, las coordenadas de los puntos involucrados son

$$A_1 = (1, 0, 0), \quad A_2 = (0, 1, 0), \quad A_3 = (0, 0, 1), \quad A_4 = (p, q, r),$$

con $p + q + r = 1$. Además, para $1 \leq i \leq 4$, denotamos mediante ω_i la circunferencia circunscrita del triángulo $A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ (dondde $A_{i+4} = A_i$). Observar que

$$O_iA_i^2 - r_i^2 = \mathrm{Pot}_{\omega_i}(A_i),$$

por lo que vamos a calcular estas cantidades en primer lugar.



Para la circunferencia $\omega_1 = (A_2A_3A_4)$, se tiene $v = w = 0$ dado que A_2 y A_3 pertenecen a ella. Por tanto, su ecuación resulta

$$\omega_1 : -a^2yz - b^2zx - c^2xy + ux(x + y + z) = 0.$$

Sustituyendo las coordenadas de A_4 y despejando u, queda

$$-a^2qr - b^2rp - c^2pq + up = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{a^2qr + b^2rp + c^2pq}{p}.$$

Así, deducimos que

$$\mathrm{Pot}_{\omega_1}(A_1) = \frac{a^2qr + b^2rp + c^2pq}{p}.$$

Un cálculo análogo permite comprobar

$$\mathrm{Pot}_{\omega_2}(A_2) = \frac{a^2qr + b^2rp + c^2pq}{q}, \quad \mathrm{Pot}_{\omega_3}(A_3) = \frac{a^2qr + b^2rp + c^2pq}{r},$$

$$\mathrm{Pot}_{\omega_4}(A_4) = -a^2pq - b^2rp - c^2pq.$$

Por tanto, la expresión a calcular resulta

$$\frac{1}{O_1A_1^2 - r_1^2} + \frac{1}{O_2A_2^2 - r_2^2} + \frac{1}{O_3A_3^2 - r_3^2} + \frac{1}{O_4A_4^2 - r_4^2}$$
$$= \frac{1}{a^2qr + b^2rp + c^2pq}\,(p + q + r - 1) = 0.$$

La última igualdad se sigue dado que $p + q + r = 1$. □

Problema 7.48 (Rumanía TST 2010). Sea ABC un triángulo escaleno, sea I su incentro, y sean A_1, B_1, C_1 los puntos de contacto de las circunferencias excritas con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Demuestra que las circunferencias circunscritas de los triángulos AIA_1, BIB_1 y CIC_1 tienen un punto común distinto de I.

Solución. Usamos coordenadas baricéntricas respecto al triángulo ABC. Calculamos en primer lugar la ecuación de la circunferencia AIA_1; las coordenadas de los puntos son

$$A = (1, 0, 0), \quad I = (a : b : c), \quad A_1 = (0 : a - b + c : a + b - c).$$

Observar en primer lugar que $u_1 = 0$. Sustituyendo las coordenadas de I, obtenemos

$$-a^2bc - b^2ca - c^2ab + (v_1b + w_1c)(a + b + c) = 0$$
$$(a + b + c)(-abc + v_1b + w_1c) = 0$$
$$v_1b + w_1c = abc.$$

Por otro lado, al sustituir las coordenadas de A_1, resulta

$$-a^2(a - b + c)(a + b - c) + [v_1(a - b + c) + w_1(a + b - c)] \cdot 2a = 0$$
$$-a(a - b + c)(a + b - c) + 2(a + c)v_1 + 2(a + b)w_1 - 2abc = 0.$$

Desarrollando, queda la ecuación

$$2(a + c)v_1 + 2(a + b)w_1 = a\left(a^2 - b^2 - c^2 + 4bc\right).$$

Resolvemos el sistema de dos ecuaciones en v_1 y w_1, con lo que

$$u_1 = 0, \qquad v_1 = \frac{ac(a - 3b + c)(a + b - c)}{2(c - b)(a + b + c)}, \qquad w_1 = \frac{ab(a + b - 3c)(a - b + c)}{2(b - c)(a + b + c)}.$$

Las soluciones de los respectivos sistemas para (BIB_1) y (CIC_1) son

$$u_2 = \frac{bc(-3a+b+c)(a+b-c)}{2(c-a)(a+b+c)}, \qquad v_2 = 0, \qquad w_2 = \frac{ab(a+b-3c)(-a+b+c)}{2(a-c)(a+b+c)}.$$

$$u_3 = \frac{cb(-3a+b+c)(a-b+c)}{2(b-a)(a+b+c)}, \qquad v_3 = \frac{ca(a-3b+c)(-a+b+c)}{2(a-b)(a+b+c)}, \qquad w_3 = 0.$$

Sabemos por el lema 22 que el eje radical de las circunferencias (AIA_1) y (BIB_1) está dado por la ecuación

$$(u_1 - u_2)x + (v_1 - v_2)y + (w_1 - w_2)z = 0.$$

Calculamos por separado el coeficiente $w_1 - w_2$, que resulta

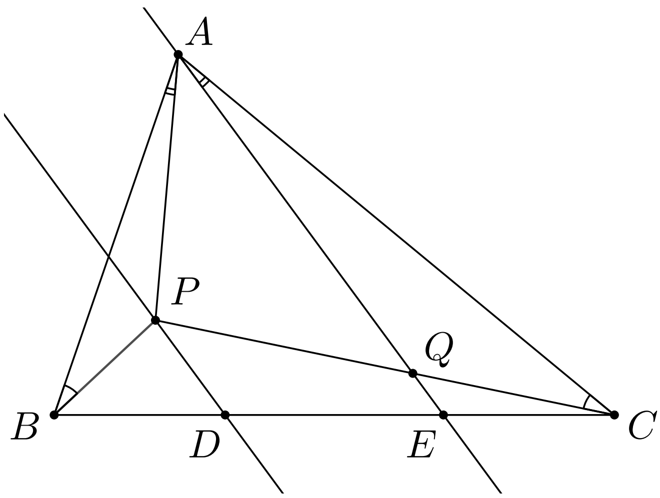
$$\begin{aligned} w_1 - w_2 &= \frac{ab(a+b-3c)(a-b+c)}{2(b-c)(a+b+c)} - \frac{ab(a+b-3c)(-a+b+c)}{2(a-c)(a+b+c)} \\ &= \frac{ab(a-b)(a+b-3c)(a+b-c)}{2(b-c)(a-c)(a+b+c)}. \end{aligned}$$

Simplificando factores, el eje radical de (AIA_1) y (BIB_1) tiene por ecuación

$$bc(-3a+b+c)(b-c)\,x + ca(a-3b+c)(c-a)\,y + ab(a-b)(a+b-3c)\,z = 0.$$

Observar que esta expresión es cíclica en a, b y c, por lo que el eje radical de las circunferencias (BIB_1) y (CIC_1) tiene la misma ecuación. Concluimos que las tres circunferencias son coaxiales, con lo que, por el lema 2.13 ([1], pág. 31), todas tienen un segundo punto en común. Esto termina el problema. $\square$

Problema 7.49 (ELMO 2012/5). Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB < AC$, y sean D y E puntos sobre el lado BC tales que $BD = CE$ y con D entre B y E. Supongamos que existe un punto P en el interior de ABC tal que $\overline{PD} \parallel \overline{AE}$ y cumpliendo $\angle PAB = \angle EAC$. Demuestra que $\angle PBA = \angle PCA$.



Solución. Sea Q el punto de corte entre las rectas AE y CP. Nuestro objetivo es probar que los triángulos PAB y QAC son semejantes, lo que implica el resultado. Para ello, teniendo en cuenta que $\angle PAB = \angle QAC$, basta demostrar que se cumple la igualdad

$$\frac{[PAB]}{[QAC]} = \left(\frac{c}{b}\right)^2.$$

Usamos coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC. Observar que se tiene $D = (0 : p : q)$ y $E = (0 : q : p)$, con $p + q = a$. La ceviana AE se expresa mediante $(t : q : p)$, con $t \in \mathbb{R}$, por lo que la ceviana AP, que es su conjugada isogonal, queda

$$AP : \left(t : \frac{b^2}{q} : \frac{c^2}{p}\right) \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Vamos a hallar la ecuación de la recta paralela a AE que pasa por D. Es sencillo comprobar que la ecuación de la recta AE es $py - qz = 0$. Observar ahora que, si escribimos $ux + vy + wz = 0$ para expresar la ecuación general de una recta paralela a AE, entonces se tiene que cumplir

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & p & -q \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -(p+q)u + qv + pw = 0.$$

Dado que, además, D pertenece a esta recta, se tiene

$$pv + qw = 0 \quad \Longrightarrow \quad w = \frac{-p}{q}\, v.$$

Sustituimos esta expresión en la primera ecuación,

$$\begin{aligned} -(p+q)\, u + qv + p\,\frac{-p}{q}\, v &= 0 \\ (p+q)\, u &= \frac{(q^2 - p^2)\, v}{q} \\ u &= \frac{q-p}{q}\, v. \end{aligned}$$

Así, la ecuación de la recta paralela a AE que pasa por D es

$$\begin{aligned} \frac{q-p}{q}\cancel{v}x + \cancel{v}y - \frac{p}{q}\cancel{v}z &= 0 \\ (q-p)\, x + q\, y - p\, z &= 0. \end{aligned}$$

Calculamos ahora las coordenadas del punto P como punto de intersección entre esta última recta y la ceviana AP. Obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned} (q-p)\, t + q\,\frac{b^2}{q} - p\,\frac{c^2}{p} &= 0 \\ t &= \frac{c^2 - b^2}{q - p}, \end{aligned}$$

de modo que se deduce

$$P = \big((c^2 - b^2)pq : b^2 p(q-p) : c^2 q(q-p)\big)\,.$$

Usando las expresiones de las cevianas CP y AE, calculamos las coordenadas del punto $Q = (x : y : z)$. Se tienen las relaciones

$$\frac{x}{y} = \frac{(c^2 - b^2)\, p\, q}{b^2\, p\,(q-p)}, \quad \frac{z}{y} = \frac{p}{q},$$

de manera que

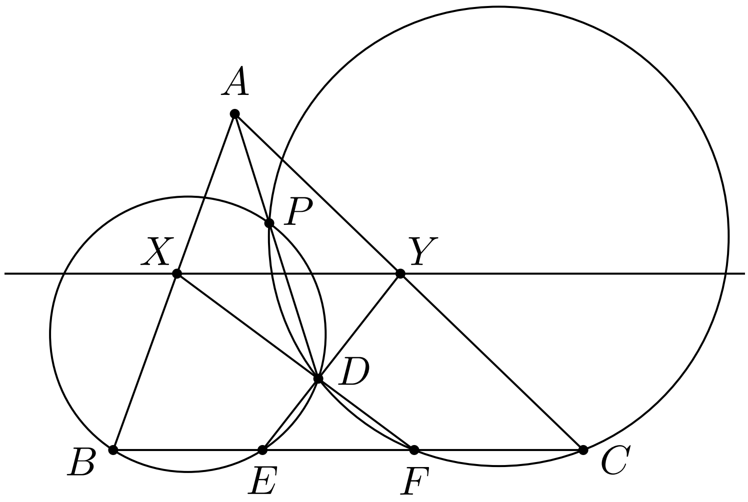
$$Q = \left(q^2(c^2-b^2) : b^2q(q-p) : b^2p(q-p)\right).$$

Finalmente, por la definición de las coordenadas baricéntricas de los puntos P y Q como coordenadas de área, se debe cumplir

$$\frac{[PAB]}{[QCA]} = \frac{c^2q(q-p)}{b^2q(q-p)} = \left(\frac{c}{b}\right)^2,$$

como queríamos demostrar. □

Problema 7.50 (USA TST 2004/4). Sea ABC un triángulo. Escogemos un punto D en su interior. Sea ω_1 una circunferencia que pasa por B y D, y ω_2 una circunferencia que pasa por C y D de manera que el otro punto de intersección entre las dos circunferencias yace sobre $\overline{AD}$. Sean E y F los puntos de intersección de las circunferencias ω_1 y ω_2 con el lado BC, respectivamente. Denotamos mediante X el punto de intersección entre las rectas DF y AB, y sea Y el punto de intersección entre DE y AC. Demuestra que $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$.



Solución. Usamos coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC. Si escribimos $D = (p, q, r)$ con $p + q + r = 1$, la ecuación de la ceviana AD resulta

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ p & q & r \end{vmatrix} = -ry + qz = 0.$$

Por otro lado, las circunferencias ω_1 y ω_2 tienen ecuaciones

$$\omega_1 : -a^2yz - b^2zx - c^2xy + (u_1x + w_1z)(x + y + z) = 0,$$

$$\omega_2 : -a^2yz - b^2zx - c^2xy + (u_2x + v_2y)(x + y + z) = 0.$$

Dado que la ceviana AD, de ecuación $-ry + qz = 0$, es el eje radical de ω_1 y ω_2, por el teorema 22 se deducen las igualdades

$$u_1 = u_2, \quad v_2 = r, \quad w_1 = q.$$

Calculamos ahora las coordenadas de E y F como intersección de las circunferencias ω_1 y ω_2 con el lado $\overline{BC}$, respectivamente. Para el primero, resulta

$$-a^2y\cancel{z} + q\cancel{z}(y + z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{y}{z} = \frac{q}{a^2 - q} \quad \Longrightarrow \quad E = (0 : q : a^2 - q).$$

Análogamente, para el punto F,

$$-a^2\cancel{y}z + r\cancel{y}(y+z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{z}{y} = \frac{r}{a^2 - r} \quad \Longrightarrow \quad F = (0 : a^2 - r : r).$$

A continuación, vamos a hallar la ecuación de la recta ED, así como su intersección con el lado $\overline{AC}$, que nos permitirá escribir las coordenadas del punto Y.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ 0 & q & a^2 - q \end{vmatrix} = \big[q(a^2 - q) - qr\big]\, x - p(a^2 - q)\, y + pq\, z = 0.$$

Haciendo $y = 0$ en la anterior expresión, deducimos

$$\big(a^2 - q - r\big)\, x + p\, z = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{z} = \frac{-p}{a^2 - q - r} \quad \Longrightarrow \quad Y = (-p : 0 : a^2 - q - r).$$

Un cálculo análogo muestra que $X = (p : q + r - a^2 : 0)$. Finalmente, para XY,

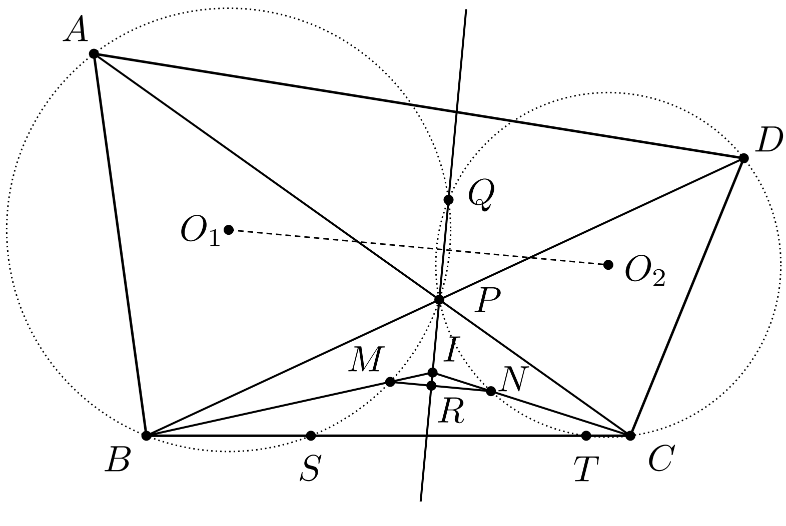
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q + r - a^2 & 0 \\ -p & 0 & a^2 - q - r \end{vmatrix} = -(a^2 - q - r)^2\, x - p(a^2 - q - r)\, y + p(q + r - a^2)\, z = 0.$$

Simplificando, se obtiene

$$(a^2 - q - r)\, x + p\, y + p\, z = 0,$$

que es la ecuación de una recta paralela a $\overline{BC}$, y hemos terminado. $\square$

Problema 7.51 (USA TSTST 2012/2). Sea $ABCD$ un cuadrilátero con $AC = BD$. Las diagonales AC y BD se cortan en P. Denotamos mediante ω_1 y O_1 la circunferencia circunscrita y el circuncentro del triángulo ABP. Denotamos mediante ω_2 y O_2 la circunferencia circunscrita y el circuncentro del triángulo CDP. El segmento BC corta de nuevo a ω_1 y ω_2 en S y T (distintos de B y C), respectivamente. Sean M y N los puntos medios de los arcos menores $\widehat{SP}$ (que no contiene a B) y $\widehat{TP}$ (que no contiene a C). Demuestra que $\overline{MN} \parallel \overline{O_1O_2}$.



Solución. Usamos coordenadas baricéntricas respecto del triángulo PBC. Como notación para las longitudes tomamos $a = BC$, $b = PC$, $c = PB$. La condición $AC = BD$ se interpreta como $A = (r : 0 : b-r)$, $D = (r : c-r : 0)$, con $r \in \mathbb{R}^+$. Así, las circunferencias ω_1 y ω_2 tienen ecuaciones

$$\omega_1 : -a^2yz - b^2zx - c^2xy + brz(x+y+z) = 0,$$

$$\omega_2 : -a^2yz - b^2zx - c^2xy + cry(x+y+z) = 0.$$

De aquí se sigue que el eje radical de ω_1 y ω_2 tiene ecuación

$$brz - cry = 0 \quad \Longrightarrow \quad bz - cy = 0,$$

que coincide con la ecuación de la bisectriz interior de $\angle BPC$, $(t : b : c)$ con $t \in \mathbb{R}$. Dado que las rectas BM y CM se cortan en el incentro I, el cuadrilátero $BMNC$ es cíclico.

Llamando R al punto de corte entre PI y MN, obtenemos

$$\angle INR = 180^\circ - \angle RNC = \frac{1}{2}\angle B,$$

$$\angle RIN = 180^\circ - \angle NIP = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C,$$

de donde

$$\angle NRI = 180^\circ - \angle INR - \angle RIN = 90^\circ,$$

como queríamos demostrar. $\square$

Problema 7.52 (IMO 2004/5). En un cuadrilátero convexo $ABCD$, la diagonal BD no biseca ni el ángulo ABC ni el ángulo CDA. El punto P yace en el interior de $ABCD$ con $\angle PBC = \angle DBA$ y $\angle PDC = \angle BDA$. Demuestra que $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico si y sólo si $AP = CP$.

Solución (Evan Chen). Vamos a usar coordenadas baricéntricas sobre $\triangle PBD$. Llamamos $P = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $D = (0,0,1)$. Sea $A = (au : bv : cw)$. Dado que C es el conjugado isogonal de A respecto a $\triangle PBD$ por la condición sobre los ángulos, se sigue que el punto $C = \left(\frac{a}{u} : \frac{b}{v} : \frac{c}{w}\right)$.

Para abreviar, sean $S = au + bv + cw$ y $T = au^{-1} + bv^{-1} + cw^{-1}$. De este modo, $A = \left(\frac{au}{S}, \frac{bv}{S}, \frac{cw}{S}\right)$ y $C = \left(\frac{au^{-1}}{T}, \frac{bv^{-1}}{T}, \frac{cw^{-1}}{T}\right)$. Por lo tanto, tenemos

$$\overrightarrow{AP} = \left(1 - \frac{au}{S}, -\frac{bv}{S}, -\frac{cw}{S}\right) = \left(\frac{bv+cw}{S}, -\frac{bv}{S}, -\frac{cw}{S}\right)$$

y así, se puede calcular

$$\begin{aligned} PA^2 &= \frac{1}{S^2}\left[-a^2(bv)(cw) + b^2(cw)(bv+cw) + c^2(bv)(bv+cw)\right] \\ &= \frac{bc}{S^2}\left[-a^2vw + (bw+cv)(bv+cw)\right]. \end{aligned}$$

Al llevar a cabo cálculos análogos con C, resulta

$$\begin{aligned} PC^2 &= \frac{bc}{T^2}\left[-a^2(vw)^{-1} + \left(bw^{-1} + cv^{-1}\right)\left(bv^{-1} + cw^{-1}\right)\right] \\ &= \frac{bc}{T^2(vw)^2}\left[-a^2vw + (bw+cv)(bv+cw)\right]. \end{aligned}$$

Desearíamos simplificar el factor $-a^2vw + (bw + cv)(bv + cw)$ de ambos lados de $PA^2 = PC^2$, pero debemos comprobar primero que este factor no es cero. Esto se digue del hecho de que $PA \neq 0$ y $PC \neq 0$, ya que P yace en el interior de $ABCD$. Así, es seguro dividir, y por tanto $PA^2 = PC^2$ se cumple si y solo si $S^2 = T^2(vw)^2$.

Por otro lado, el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y solo si existe un γ tal que

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (x + y + z)(\gamma x) = 0$$

pasa tanto por A como por C (de hecho, la anterior es la familia de circunferencias que pasan por B y D). Sustituyendo los valores de $A = (au : bv : cw)$ y $C = (au^{-1} : bv^{-1} : cw^{-1})$, observamos que la condición es equivalente a

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{a^2(bv)(cw) + b^2(cw)(au) + c^2(au)(bv)}{au \cdot S}\\ &= \frac{a^2(bv^{-1})(cw^{-1}) + b^2(cw^{-1})(au^{-1}) + c^2(au^{-1})(bv^{-1})}{au^{-1} \cdot T}\end{aligned}$$

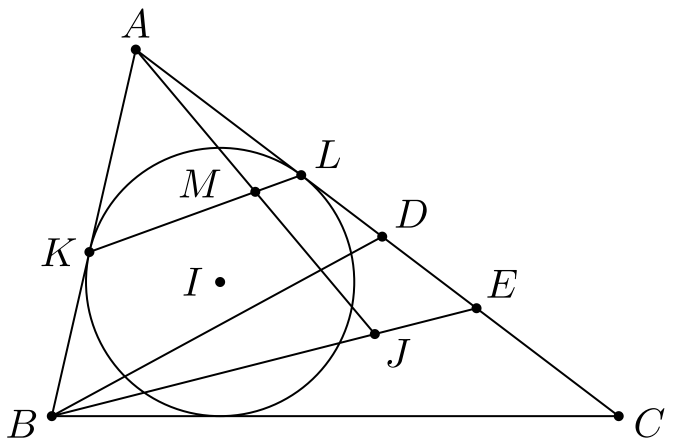
Esto puede reformularse como

$$abc \cdot \frac{uvw \cdot T}{au \cdot S} = abc \cdot \frac{(uvw)^{-1} \cdot S}{au^{-1} \cdot T},$$

lo que es claramente equivalente a $S^2 = T^2(vw)^2$.

Por tanto, $PA = PC$ si y solo si $ABCD$ es cíclico. □

Problema 7.53 (Lista corta 2006/G4). Sea ABC un triángulo con $\angle C < \angle A < 90°$. Escogemos un punto D sobre el lado AC de modo que $BD = BA$. La circunferencia inscrita de ABC es tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en los puntos K y L, respectivamente. Sea J el incentro del triángulo BCD. Demuestra que la recta KL biseca a $\overline{AJ}$.



Solución. Usamos coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC. Sea E el punto de corte entre la recta BJ y el lado $\overline{AC}$. Vamos a calcular en primer lugar las coordenadas baricéntricas del punto $D = (x, 0, z)$ con $x+z = 1$. Por la condición de la distancia aplicada al vector de desplazamiento $\overrightarrow{BD} = (x, -1, z)$, se tiene

$$\begin{aligned}-a^2 \cdot (-1) \cdot z - b^2zx - c^2 \cdot x \cdot (-1) &= c^2\\ a^2z - b^2zx + c^2x &= c^2\\ a^2(1-x) - b^2(1-x)x + c^2x &= c^2\\ b^2x^2 - (a^2 + b^2 - c^2)\,x + a^2 - c^2 &= 0.\end{aligned}$$

La anterior ecuación de segundo grado tiene dos soluciones para x, una de las cuales es $x = 1$, ya que $A = (1, 0, 0)$ es el otro punto que cumple la condición. Usando el «salto de Vieta», deducimos que la segunda solución es

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{b^2} - 1 = \frac{a^2 - c^2}{b^2}.$$

Así, las coordenadas del punto D son

$$D = \left(\frac{a^2 - c^2}{b^2},\ 0,\ \frac{b^2 + c^2 - a^2}{b^2} \right) = \left(\frac{a^2 - c^2}{b} : 0 : \frac{b^2 - a^2 + c^2}{b} \right).$$

Deducimos por tanto la longitud del segmento $\overline{DC}$, que resulta

$$DC = \frac{a^2 - c^2}{b}.$$

Vamos a hallar ahora las coordenadas baricéntricas del punto E. Por el teorema de la bisectriz, se tiene

$$\frac{DE}{EC} = \frac{c}{a} \quad \Longrightarrow \quad \frac{DC - EC}{EC} = \frac{c}{a} \quad \Longrightarrow \quad EC = \frac{a}{a + c} \cdot DC,$$

de modo que, sustituyendo el valor anterior, tenemos

$$EC = \frac{a}{a + c} \cdot \frac{a^2 - c^2}{b} = \frac{a(a - c)}{b}.$$

Con todo, las coordenadas baricéntricas de E son

$$E = \left(a(a - c) : 0 : b^2 - a(a - c) \right).$$

Lo anterior nos permite calcular las coordenadas baricéntricas de J como intersección de las cevianas CJ y BE. Tras realizar algunos cálculos, queda

$$J = \left(a(a - c) : b(a - c) : b^2 - a\,(a - c) \right) = \left(\frac{a(a - c)}{2b(s - c)}, \frac{b(a - c)}{2b(s - c)}, \frac{b^2 - a(a - c)}{2b(s - c)} \right).$$

Por tanto, las coordenadas del punto medio M sobre el segmento $\overline{AJ}$ son

$$M = \frac{1}{2}(A + J) = \left(2b(s - c) + a(a - c) : b(a - c) : b^2 - a(a - c) \right).$$

Para finalizar el problema, basta demostrar que los puntos K, L, M son colineales. Utilizamos la fórmula del determinante con las coordenadas correspondientes,

$$\begin{vmatrix} s - b & s - a & 0 \\ s - c & 0 & s - a \\ 2b(s - c) + a(a - c) & b(a - c) & b^2 - a(a - c) \end{vmatrix}.$$

Haciendo transformaciones, obtenemos

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} s - b & s - a & 0 \\ s - c & 0 & s - a \\ a(a - c) & b(a - c) & (b - a)(a - c) \end{vmatrix} &= (a - c) \begin{vmatrix} s - b & s - a & 0 \\ s - c & 0 & s - a \\ a & b & b - a \end{vmatrix} \\
&= (a - c) \begin{vmatrix} s - b & s - a & 0 \\ b & 0 & s - a \\ b & b & b - a \end{vmatrix} \\
&= (a - c) \begin{vmatrix} s - b & s - a & 0 \\ b & 0 & s - a \\ 0 & b & b - s \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

de donde, desarrollando el determinante, resulta la expresión

$$(a-c)\left[-b(s-a)(s-b)+b(s-a)(s-b)\right]=0,$$

con lo que hemos terminado. $\square$

Referencias

[1] E. Chen: *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*. MAA Problem Book Series. Mathematical Association of America, Washington DC, 2016.

[2] E. Chen y M. Schindler: *Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry*, 2011. Disponible online en https://web.evanchen.cc/handouts/bary/bary-full.pdf.

[3] H. S. M. Coxeter: *Introduction to Geometry*. John Wiley & Sons, New York, London, 1961.