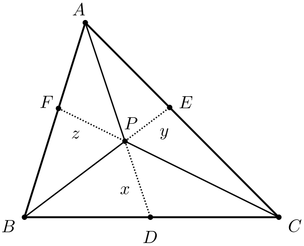


Coordenadas baricéntricas para la Olimpiada Matemática

Juan Ángel Serrano de Rodrigo

Departamento de Educación – Gobierno de Navarra

Zaragoza, 22 de noviembre de 2024

Contenidos

¿Por qué usar coordenadas baricéntricas?

«Si la única herramienta que se tiene es un martillo, supongo que es tentador tratar todo como si fuera un clavo.»

El martillo de Maslow.

¿Por qué usar coordenadas baricéntricas?

«Si la única herramienta que se tiene es un martillo, supongo que es tentador tratar todo como si fuera un clavo.»

El martillo de Maslow.

- Actualmente, las coordenadas baricéntricas son desconocidas por la mayor parte de participantes en olimpiadas y creadores de problemas.

¿Por qué usar coordenadas baricéntricas?

«Si la única herramienta que se tiene es un martillo, supongo que es tentador tratar todo como si fuera un clavo.»

El martillo de Maslow.

- Actualmente, las coordenadas baricéntricas son desconocidas por la mayor parte de participantes en olimpiadas y creadores de problemas.
- Las coordenadas baricéntricas explotan las configuraciones geométricas en las que aparecen triángulos de manera destacada.

¿Por qué usar coordenadas baricéntricas?

«Si la única herramienta que se tiene es un martillo, supongo que es tentador tratar todo como si fuera un clavo.»

El martillo de Maslow.

- Actualmente, las coordenadas baricéntricas son desconocidas por la mayor parte de participantes en olimpiadas y creadores de problemas.
- Las coordenadas baricéntricas explotan las configuraciones geométricas en las que aparecen triángulos de manera destacada.
- Técnicas «sintéticas» vs. técnicas «computacionales».

¿Por qué usar coordenadas baricéntricas?

«Si la única herramienta que se tiene es un martillo, supongo que es tentador tratar todo como si fuera un clavo.»

El martillo de Maslow.

- Actualmente, las coordenadas baricéntricas son desconocidas por la mayor parte de participantes en olimpiadas y creadores de problemas.
- Las coordenadas baricéntricas explotan las configuraciones geométricas en las que aparecen triángulos de manera destacada.
- Técnicas «sintéticas» vs. técnicas «computacionales».

¿Y si pudiéramos resolver un Problema 3 de geometría de la Fase Nacional de la OME sin saber apenas geometría?

Notaciones y convenciones

- Fijamos un triángulo de referencia $\triangle ABC$ con área $[ABC]$.

Notaciones y convenciones

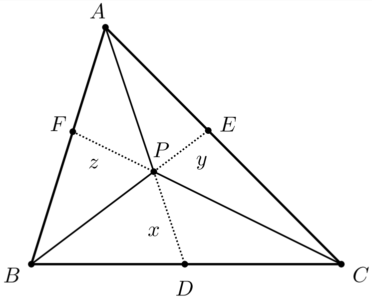
- Fijamos un triángulo de referencia $\triangle ABC$ con área $[ABC]$.
- $\overline{BC} = a,\ \overline{CA} = b,\ \overline{AB} = c.$

- Fijamos un triángulo de referencia $\triangle ABC$ con área $[ABC]$.
- $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$.

Definición (Coordenadas baricéntricas)

Asignamos a cada punto P del plano la terna (x, y, z) cumpliendo

$$\vec{P} = x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}, \quad x + y + z = 1.$$



- Las coordenadas de los vértices A, B, C son

$$A = (1,0,0), \quad B = (0,1,0), \quad C = (0,0,1).$$

Gobierno de Navarra Nafarroako Gobernua

- Las coordenadas de los vértices A, B, C son

$$A=(1,0,0), \quad B=(0,1,0), \quad C=(0,0,1).$$

- **Coordenadas de área:**

$$P=\left(\frac{[PBC]}{[ABC]},\frac{[PCA]}{[BCA]},\frac{[PAB]}{[CAB]}\right).$$

Gobierno de Navarra Nafarroako Gobernua

- Las coordenadas de los vértices A, B, C son

$$A = (1,0,0), \quad B = (0,1,0), \quad C = (0,0,1).$$

- **Coordenadas de área:**

$$P = \left(\frac{[PBC]}{[ABC]}, \frac{[PCA]}{[BCA]}, \frac{[PAB]}{[CAB]} \right).$$

- **Coordenadas no homogéneas:**

$$(x:y:z) = \left(\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z} \right) \qquad \text{con} \quad x+y+z \neq 0.$$

- Las coordenadas de los vértices A, B, C son

$$A=(1,0,0), \quad B=(0,1,0), \quad C=(0,0,1).$$

- **Coordenadas de área:**

$$P=\left(\frac{[PBC]}{[ABC]},\frac{[PCA]}{[BCA]},\frac{[PAB]}{[CAB]}\right).$$

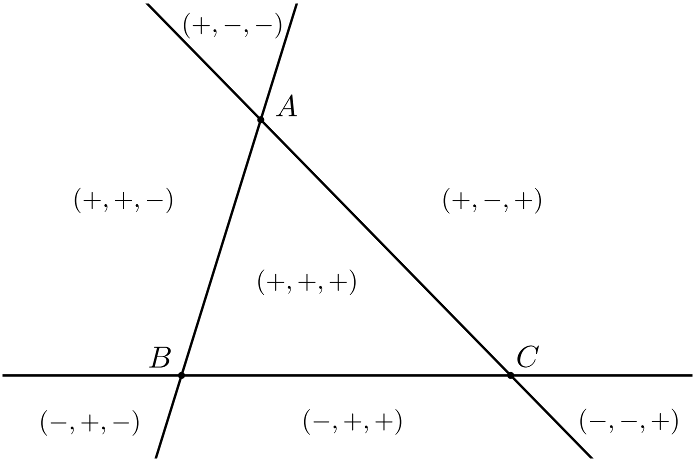
- **Coordenadas no homogéneas:**

$$(x:y:z)=\left(\frac{x}{x+y+z},\frac{y}{x+y+z},\frac{z}{x+y+z}\right) \qquad \text{con} \quad x+y+z\neq 0.$$

- **Notación de Conway:**

$$S_A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}, \quad S_B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2}, \quad S_C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}.$$

- P yace en el interior de $\triangle ABC \iff x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$



Teorema (Fórmula del área baricéntrica)

Sean P_1, P_2, P_3 puntos con coordenadas baricéntricas $P_i = (x_i, y_i, z_i)$. Entonces, el área con signo de $\triangle P_1P_2P_3$ es

$$\frac{[P_1P_2P_3]}{[ABC]} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Teorema (Fórmula del área baricéntrica)

Sean P_1, P_2, P_3 puntos con coordenadas baricéntricas $P_i = (x_i, y_i, z_i)$. Entonces, el área con signo de $\triangle P_1 P_2 P_3$ es

$$\frac{[P_1 P_2 P_3]}{[ABC]} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Teorema (Ecuación de la recta)

La ecuación de la recta está dada por la expresión

$$ux + vy + wz = 0$$

con u, v, w números reales (únicos salvo factor de escala).

- En particular, $AB : z = 0, \quad BC : x = 0, \quad CA : y = 0.$

- En particular, $AB : z = 0, \quad BC : x = 0, \quad CA : y = 0.$
- La ecuación de una ceviana que pasa por A es $vy + wz = 0$.

- En particular, $AB : z = 0, \quad BC : x = 0, \quad CA : y = 0.$
- La ecuación de una ceviana que pasa por A es $vy + wz = 0$.
- Coordenadas de los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$:

- En particular, $AB : z = 0, \quad BC : x = 0, \quad CA : y = 0.$
- La ecuación de una ceviana que pasa por A es $vy + wz = 0$.
- Coordenadas de los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = (1 : 1 : 0), \quad \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (0 : 1 : 1), \quad \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = (1 : 0 : 1).$$

- En particular, $AB : z = 0, \quad BC : x = 0, \quad CA : y = 0.$
- La ecuación de una ceviana que pasa por A es $vy + wz = 0$.
- Coordenadas de los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = (1 : 1 : 0), \quad \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (0 : 1 : 1), \quad \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = (1 : 0 : 1).$$

Teorema (Cevianas baricéntricas)

Sea $P = (x_1 : y_1 : z_1)$ un punto cualquiera distinto de A. Entonces, los puntos sobre la recta AP (distintos de A) pueden parametrizarse como

$$(t : y_1 : z_1) \quad \text{donde } t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad t + y_1 + z_1 \neq 0.$$

- En particular, $AB : z = 0, \quad BC : x = 0, \quad CA : y = 0.$
- La ecuación de una ceviana que pasa por A es $vy + wz = 0$.
- Coordenadas de los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = (1:1:0), \quad \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (0:1:1), \quad \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = (1:0:1).$$

Teorema (Cevianas baricéntricas)

Sea $P = (x_1 : y_1 : z_1)$ un punto cualquiera distinto de A. Entonces, los puntos sobre la recta AP (distintos de A) pueden parametrizarse como

$$(t : y_1 : z_1) \quad \text{donde } t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad t + y_1 + z_1 \neq 0.$$

¡Usad cevianas siempre que podáis!

Ejercicio 1

Sabemos que el punto P se encuentra sobre el lado $\overline{BC}$ a distancia p del vértice B. ¿Cuáles son sus coordenadas baricéntricas?

Ejercicio 1

Sabemos que el punto P se encuentra sobre el lado $\overline{BC}$ a distancia p del vértice B. ¿Cuáles son sus coordenadas baricéntricas?

Solución. Las coordenadas son $P = \left(0, 1 - \frac{p}{b}, \frac{p}{b}\right) = (0 : b - p : p)$.

Ejercicio 2

Calcula la ecuación de la mediana del triángulo ABC que pasa por C.

Ejercicio 1

Sabemos que el punto P se encuentra sobre el lado $\overline{BC}$ a distancia p del vértice B. ¿Cuáles son sus coordenadas baricéntricas?

Solución. Las coordenadas son $P = \left(0, 1 - \frac{p}{b}, \frac{p}{b}\right) = (0 : b - p : p)$.

Ejercicio 2

Calcula la ecuación de la mediana del triángulo ABC que pasa por C.

Solución. La mediana pasa por $C = (0:0:1)$ y $M = (1:1:0)$. Sustituyendo en la ecuación general $ux + vy + wz = 0$, obtenemos $w = 0$, $u + v = 0 \implies v = -u$. Por tanto, la ecuación resulta

$$ux - uy = 0 \quad \implies \quad x - y = 0.$$

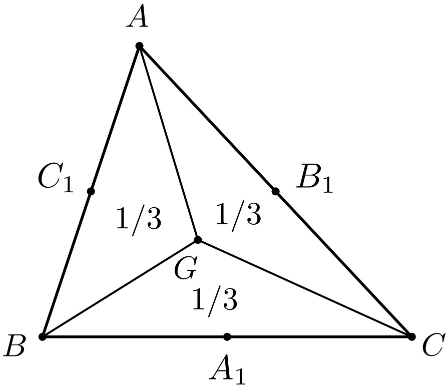
Baricentro

Las coordenadas del **baricentro** son $G = (1 : 1 : 1)$.

Baricentro

Las coordenadas del **baricentro** son $G = (1 : 1 : 1)$.

$$[GBC] = [GCA] = [GAB] \quad \Longrightarrow \quad G = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = (1 : 1 : 1).$$



Incentro

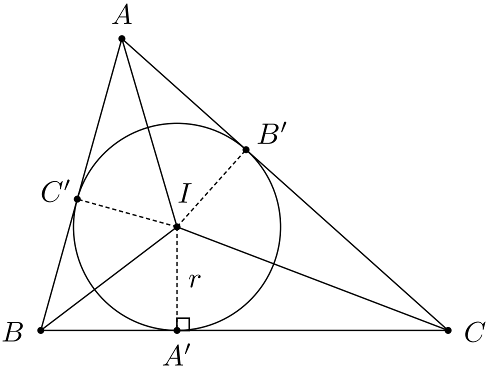
Las coordenadas del **incentro** son $I = (a : b : c)$.

Gobierno de Navarra Nafarroako Gobernua

Incentro

Las coordenadas del **incentro** son $I = (a : b : c)$.

- $[IBC] = [ICA] = [IAB]$ son proporcionales a ra, rb, rc.
- $I = (ra : rb : rc) = (a : b : c)$.



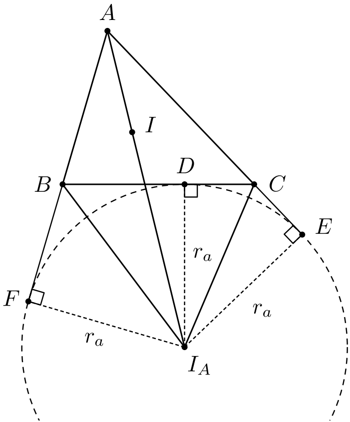
Excentros

Las coordenadas del **excentro** I_A son $I_A = (-a : b : c)$.

Excentros

Las coordenadas del **excentro** I_A son $I_A = (-a : b : c)$.

- $I_A = (-ar_a : br_a : cr_a) = (-a : b : c)$.
- $I_B = (ar_b : -br_b : cr_b) = (a : -b : c)$.
- $I_C = (ar_c : br_c : -cr_c) = (a : b : -c)$.

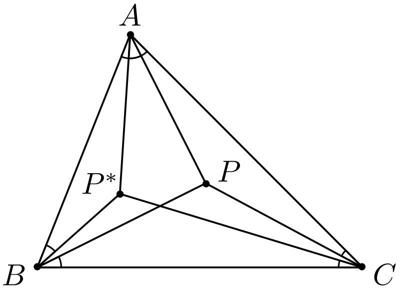


Gobierno de Navarra Nafarroako Gobernua

Conjugados isogonales

Dado $\triangle ABC$ y P no colineal con ningún lado, existe un único punto P^* cumpliendo las igualdades

$$\measuredangle BAP = \measuredangle P^* AC, \quad \measuredangle CBP = \measuredangle P^* BA, \quad \measuredangle ACP = \measuredangle P^* CB.$$



Gobierno de Navarra · Nafarroako Gobernua

Conjugados isogonales

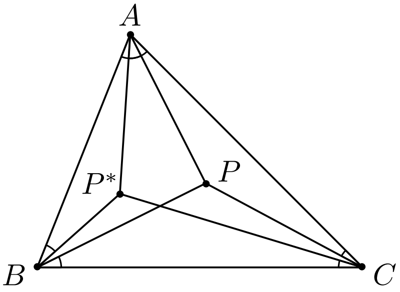
Dado $\triangle ABC$ y P no colineal con ningún lado, existe un único punto P^* cumpliendo las igualdades

$$\measuredangle BAP = \measuredangle P^* AC, \quad \measuredangle CBP = \measuredangle P^* BA, \quad \measuredangle ACP = \measuredangle P^* CB.$$

Teorema (Razones isogonales)

Sean D y E puntos sobre $\overline{BC}$ tales que $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$ son isogonales.

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{BE}{EC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$



Gobierno de Navarra Nafarroako Gobernua

Conjugado isogonal

Dado $P(x:y:z)$, se tiene $P^* = \left(\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z}\right)$.

Conjugado isogonal

Dado $P(x : y : z)$, se tiene $P^* = \left(\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z}\right)$.

- Sea $P^* = (x^* : y^* : z^*)$ el conjugado isogonal.

Conjugado isogonal

Dado $P(x:y:z)$, se tiene $P^* = \left(\frac{a^2}{x}:\frac{b^2}{y}:\frac{c^2}{z}\right)$.

- Sea $P^* = (x^* : y^* : z^*)$ el conjugado isogonal.
- Sean $D = (0, d, 1-d)$ y $E = (0, e, 1-e)$ los puntos sobre $\overline{BC}$.

Gobierno de Navarra Nafarroako Gobernua

Conjugado isogonal

Dado $P(x:y:z)$, se tiene $P^* = \left(\dfrac{a^2}{x} : \dfrac{b^2}{y} : \dfrac{c^2}{z}\right)$.

- Sea $P^* = (x^* : y^* : z^*)$ el conjugado isogonal.
- Sean $D = (0, d, 1-d)$ y $E = (0, e, 1-e)$ los puntos sobre $\overline{BC}$.

$$\frac{z^*}{y^*} \cdot \frac{z}{y} = \frac{1-d}{d} \cdot \frac{1-e}{e} = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{BE}{EC} = \frac{c^2}{b^2} \implies z^* : y^* = \frac{c^2}{z} : \frac{b^2}{y}$$

Conjugado isogonal

Dado $P(x:y:z)$, se tiene $P^* = \left(\dfrac{a^2}{x} : \dfrac{b^2}{y} : \dfrac{c^2}{z}\right)$.

- Sea $P^* = (x^* : y^* : z^*)$ el conjugado isogonal.
- Sean $D = (0, d, 1-d)$ y $E = (0, e, 1-e)$ los puntos sobre $\overline{BC}$.

$$\frac{z^*}{y^*} \cdot \frac{z}{y} = \frac{1-d}{d} \cdot \frac{1-e}{e} = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{BE}{EC} = \frac{c^2}{b^2} \quad \Longrightarrow \quad z^* : y^* = \frac{c^2}{z} : \frac{b^2}{y}$$

Por tanto,

$$P^* = \left(t : y^* : \frac{\frac{c^2}{z}}{\frac{b^2}{y}} \cdot y^*\right) = \left(t : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z}\right) \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Punto simediano

Las coordenadas del **punto simediano** K son $K = (a^2 : b^2 : c^2)$.

Punto simediano

Las coordenadas del **punto simediano** K son $K = (a^2 : b^2 : c^2)$.

- K es el conjugado isogonal del baricentro $G = (1 : 1 : 1)$.

Punto simediano

Las coordenadas del **punto simediano** K son $K = (a^2 : b^2 : c^2)$.

- K es el conjugado isogonal del baricentro $G = (1 : 1 : 1)$.
- Por tanto,

$$K = \left(\frac{a^2}{1} : \frac{b^2}{1} : \frac{c^2}{1} \right) = (a^2 : b^2 : c^2).$$

Ortocentro

Las coordenadas del **ortocentro** son $H = (\tan A : \tan B : \tan C)$.

Circuncentro

Las coordenadas del **circuncentro** son $O = (\operatorname{sen} 2A : \operatorname{sen} 2B : \operatorname{sen} 2C)$.

Ortocentro

Las coordenadas del **ortocentro** son $H = (\tan A : \tan B : \tan C)$.

Circuncentro

Las coordenadas del **circuncentro** son $O = (\operatorname{sen} 2A : \operatorname{sen} 2B : \operatorname{sen} 2C)$.

Estas coordenadas pueden reescribirse en función de a, b, c:

$$H = (S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B), \qquad O = (a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C).$$

Ortocentro

Las coordenadas del **ortocentro** son $H = (\tan A : \tan B : \tan C)$.

Circuncentro

Las coordenadas del **circuncentro** son $O = (\operatorname{sen} 2A : \operatorname{sen} 2B : \operatorname{sen} 2C)$.

Estas coordenadas pueden reescribirse en función de a, b, c:

$$H = (S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B), \qquad O = (a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C).$$

(Las demostraciones están en los apuntes)

Ejercicio 3

Llamamos simedianas a las rectas trazadas desde los vértices que pasan por el punto simediano $K = (a^2 : b^2 : c^2)$. Halla las coordenadas baricéntricas del punto de corte entre la simediana que pasa por A y la mediana que pasa por B.

Ejercicio 3

Llamamos simedianas a las rectas trazadas desde los vértices que pasan por el punto simediano $K = (a^2 : b^2 : c^2)$. Halla las coordenadas baricéntricas del punto de corte entre la simediana que pasa por A y la mediana que pasa por B.

Solución. Las cevianas del enunciado se parametrizan como

$$AK \equiv (t : b^2 : c^2), \quad BM \equiv (1 : s : 1) \quad \text{con } t, s \in \mathbb{R}.$$

De aquí obtenemos las relaciones

$$\frac{y}{z} = \frac{b^2}{c^2}, \quad \frac{x}{z} = \frac{1}{1} \quad \Longrightarrow \quad P = \left(z : \frac{b^2}{c^2} z : z\right) = \left(1 : \frac{b^2}{c^2} : 1\right) = (c^2 : b^2 : c^2).$$

Por tanto, $P = (c^2 : b^2 : c^2)$.

Ejercicio 4

Halla las coordenadas baricéntricas de la intersección entre la bisectriz interior que pasa por A y la simediana que pasa por B.

Ejercicio 4

Halla las coordenadas baricéntricas de la intersección entre la bisectriz interior que pasa por A y la simediana que pasa por B.

Solución. Las cevianas del enunciado se parametrizan como

$$AI \equiv (t : b : c), \quad BK \equiv (a^2 : s : c^2) \quad \text{con } t, s \in \mathbb{R}.$$

De aquí obtenemos las relaciones

$$\frac{y}{z} = \frac{b}{c}, \quad \frac{x}{z} = \frac{a^2}{c^2} \quad \Longrightarrow \quad Q = \left(\frac{a^2}{c^2} z : \frac{b}{c} z : z\right) = \left(\frac{a^2}{c^2} : \frac{b}{c} : 1\right) = (a^2 : bc : c^2).$$

Por tanto, $Q = (a^2 : bc : c^2)$.

Teorema (Colinealidad)

Consideramos puntos P_1, P_2, P_3 con $P_i = (x_i : y_i : z_i)$. Los puntos son colineales si y solo si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Teorema (Colinealidad)

Consideramos puntos P_1, P_2, P_3 con $P_i = (x_i : y_i : z_i)$. Los puntos son colineales si y solo si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Nota. ¡Las coordenadas no necesitan ser homogéneas!

Teorema (Colinealidad)

Consideramos puntos P_1, P_2, P_3 con $P_i = (x_i : y_i : z_i)$. Los puntos son colineales si y solo si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Nota. ¡Las coordenadas no necesitan ser homogéneas!

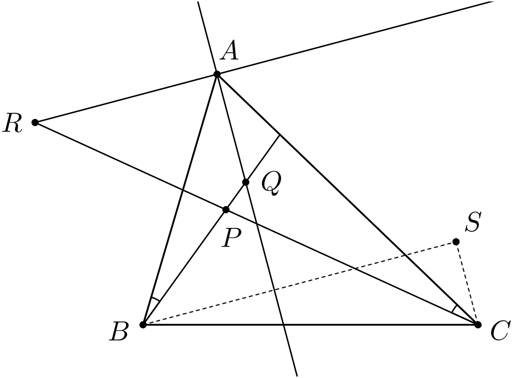
Teorema (Concurrencia)

Sean tres rectas $\ell_i : u_i x + v_i y + w_i z = 0$ con $i = 1, 2, 3$. Las rectas son concurrentes o todas ellas paralelas si y solo si

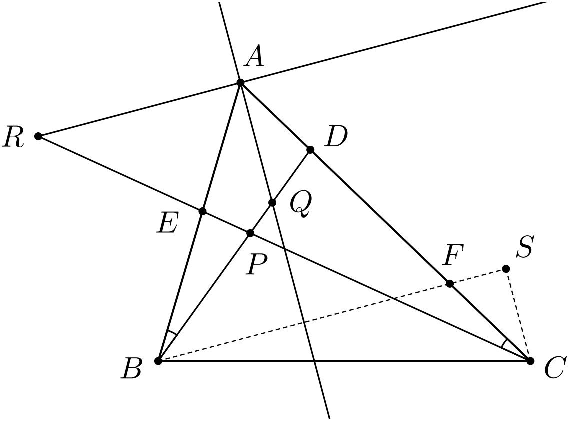
$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

OME Fase Nacional 2024/3

Sean ABC un triángulo escaleno y P un punto interior tal que $\angle PBA = \angle PCA$. Las rectas PB y PC cortan a las bisectrices interior y exterior de A en los puntos Q y R, respectivamente. Sea S el punto tal que CS es paralela a AQ y BS es paralela a AR. Demuestra que Q, R, S están alineados.

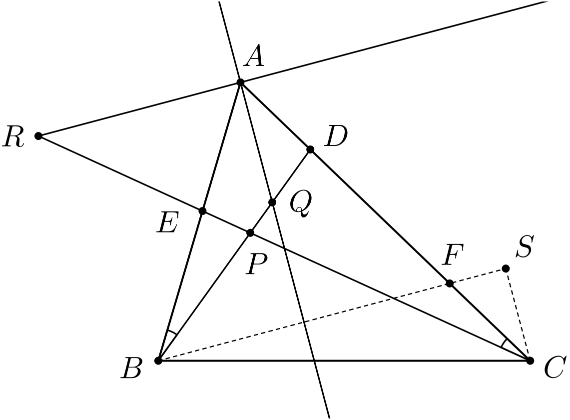


- Sean D y E los puntos de corte de PB y PC con $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.

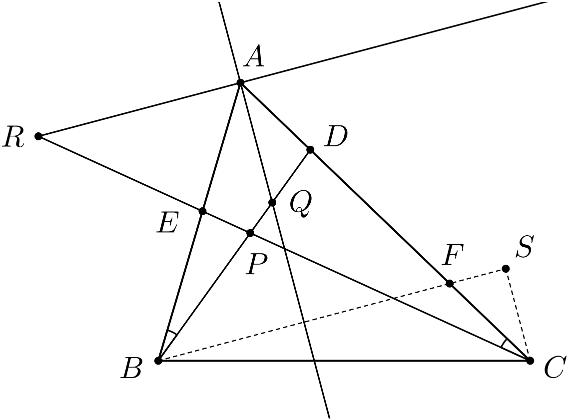


- Sean D y E los puntos de corte de PB y PC con $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.
- $\triangle BDA$ y $\triangle CEA$ son semejantes, por lo que

$$\frac{AE}{AD} = \frac{b}{c} \quad \Longrightarrow \quad AE = AD \cdot \frac{b}{c}.$$



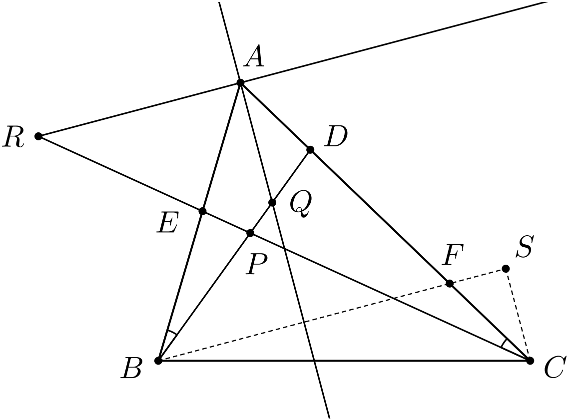
- Fijamos $D = (q : 0 : p)$ con $p + q = b$.



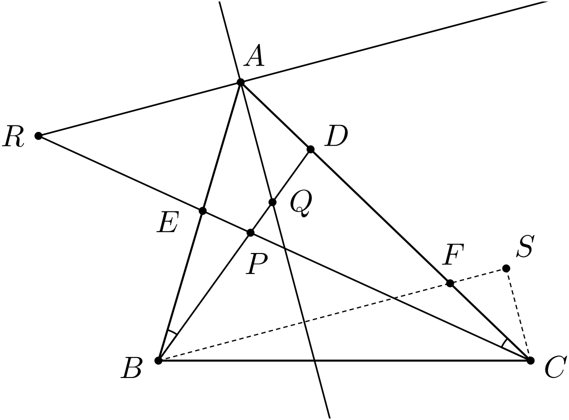
Gobierno de Navarra Nafarroako Gobernua

- Fijamos $D = (q : 0 : p)$ con $p + q = b$.
- Las coordenadas del punto E son

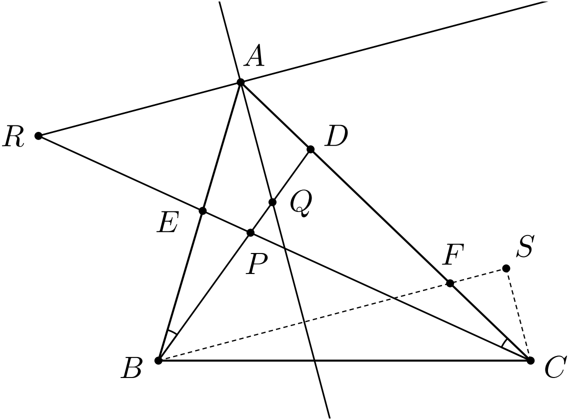
$$E = \left(c - \frac{pb}{c} : \frac{pb}{c} : 0\right).$$



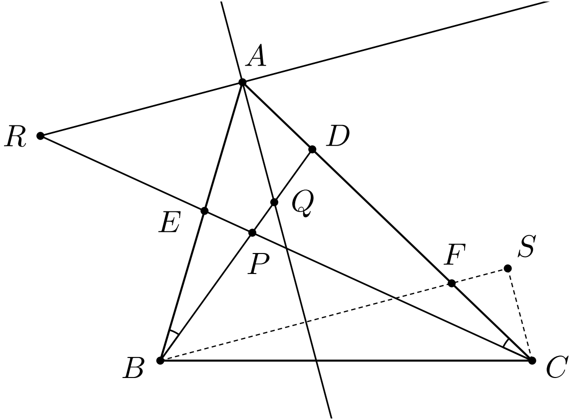
- ¿Coordenadas del punto $Q = (x : y : z)$?



- ¿Coordenadas del punto $Q = (x : y : z)$?
- Bisectriz interior de A: $(t : b : c)$ con $t \in \mathbb{R}$.



- ¿Coordenadas del punto $Q = (x : y : z)$?
- Bisectriz interior de A: $(t : b : c)$ con $t \in \mathbb{R}$.
- Ceviana BD: $(q : s : p)$ con $s \in \mathbb{R}$.



- ¿Coordenadas del punto $Q = (x : y : z)$?
- Bisectriz interior de A: $(t : b : c)$ con $t \in \mathbb{R}$.
- Ceviana BD: $(q : s : p)$ con $s \in \mathbb{R}$.
- Se deducen las relaciones

$$\frac{y}{z} = \frac{b}{c}, \qquad \frac{x}{z} = \frac{q}{p}.$$

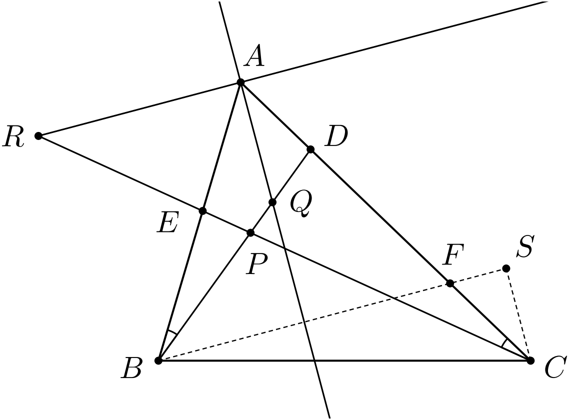
- ¿Coordenadas del punto $Q = (x : y : z)$?
- Bisectriz interior de A: $(t : b : c)$ con $t \in \mathbb{R}$.
- Ceviana BD: $(q : s : p)$ con $s \in \mathbb{R}$.
- Se deducen las relaciones

$$\frac{y}{z} = \frac{b}{c}, \qquad \frac{x}{z} = \frac{q}{p}.$$

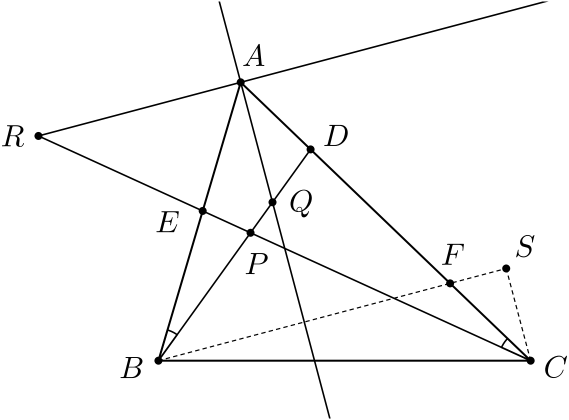
- Las coordenadas de Q resultan

$$Q = \left(\frac{q}{p} : \frac{b}{c} : 1\right) = (qc : pb : pc) = (bc - pc : pb : pc).$$

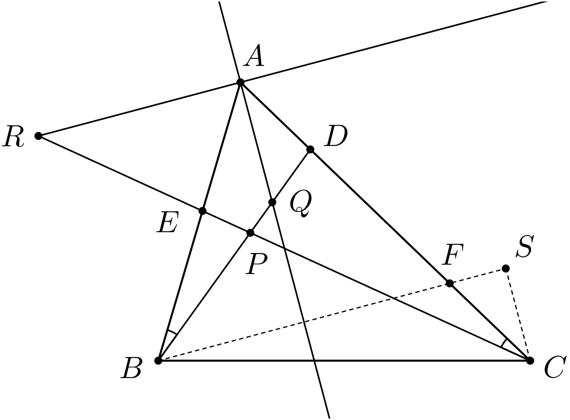
- ¿Coordenadas del punto $R = (x : y : z)$?



- ¿Coordenadas del punto $R = (x : y : z)$?
- Ceviana AI_C: $(t : b : -c)$ con $t \in \mathbb{R}$.



- ¿Coordenadas del punto $R = (x : y : z)$?
- Ceviana AI_C: $(t : b : -c)$ con $t \in \mathbb{R}$.
- Ceviana CE: $\left(\dfrac{c^2 - pb}{c} : \dfrac{pb}{c} : s\right)$ con $s \in \mathbb{R}$.



- ¿Coordenadas del punto $R=(x:y:z)$?
- Ceviana AI_C: $(t:b:-c)$ con $t\in\mathbb{R}$.
- Ceviana CE: $\left(\dfrac{c^2-pb}{c}:\dfrac{pb}{c}:s\right)$ con $s\in\mathbb{R}$.
- Se deducen las relaciones

$$\frac{z}{y}=\frac{-c}{b},\qquad \frac{x}{y}=\frac{c^2-pb}{pb}.$$

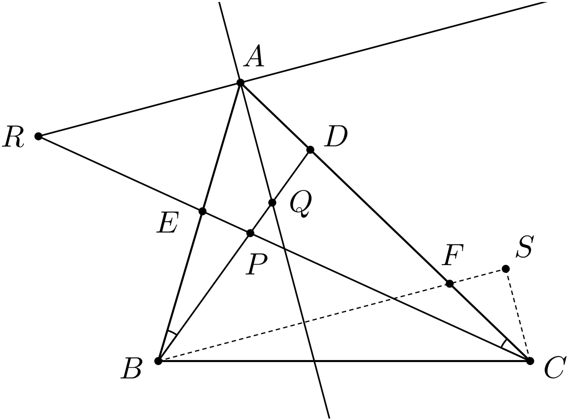
- ¿Coordenadas del punto $R = (x : y : z)$?
- Ceviana AI_C: $(t : b : -c)$ con $t \in \mathbb{R}$.
- Ceviana CE: $\left(\dfrac{c^2 - pb}{c} : \dfrac{pb}{c} : s\right)$ con $s \in \mathbb{R}$.
- Se deducen las relaciones

$$\frac{z}{y} = \frac{-c}{b}, \qquad \frac{x}{y} = \frac{c^2 - pb}{pb}.$$

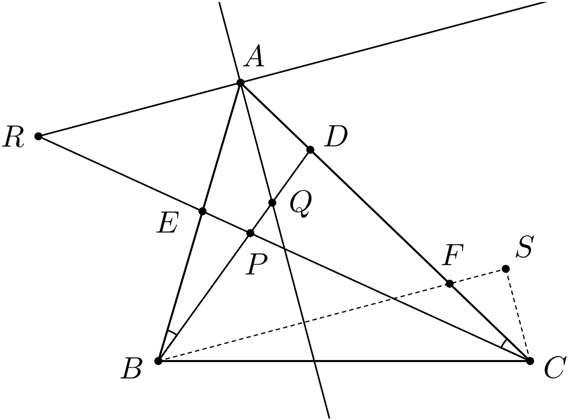
- Las coordenadas de R resultan

$$R = \left(c^2 - pb : pb : -pc\right).$$

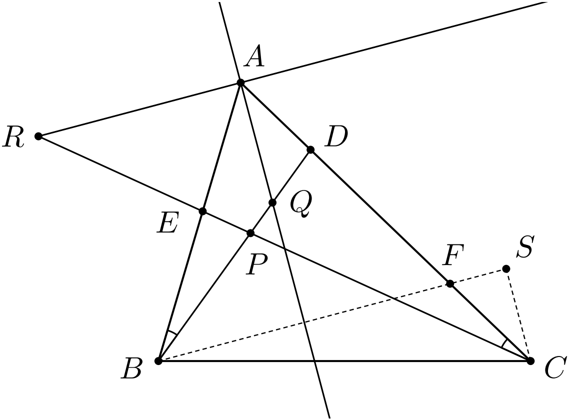
- ¿Coordenadas del punto $S = (x : y : z)$?



- ¿Coordenadas del punto $S = (x : y : z)$?
- Sea $F = BS \cap AC$.

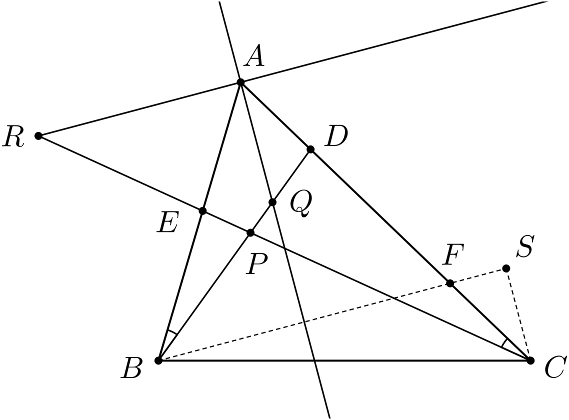


- ¿Coordenadas del punto $S = (x : y : z)$?
- Sea $F = BS \cap AC$.
- ¡F es el simétrico de B respecto de la bisectriz interior! ¡$AF = c$!

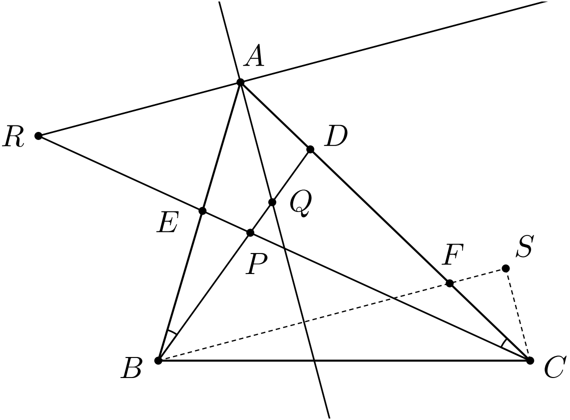


- ¿Coordenadas del punto $S = (x : y : z)$?
- Sea $F = BS \cap AC$.
- ¡F es el simétrico de B respecto de la bisectriz interior! ¡$AF = c$!
- $F = \left(1 - \dfrac{c}{b} : 0 : \dfrac{c}{b}\right) = (b - c : 0 : c)$.

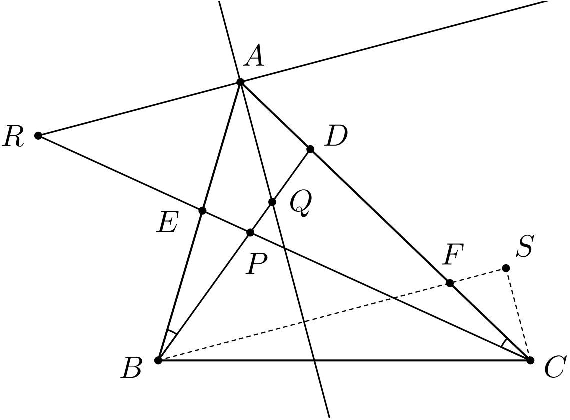
- Análogamente, sea $K = CS \cap AB$.



- Análogamente, sea $K = CS \cap AB$.
- ¡K es el simétrico de C respecto de la bisectriz exterior! ¡$AK = b$!



- Análogamente, sea $K = CS \cap AB$.
- ¡K es el simétrico de C respecto de la bisectriz exterior! ¡$AK = b$!
- $K = \left(1 - \frac{-b}{c} : \frac{-b}{c} : 0\right) = (b + c : -b : 0)$.



Gobierno de Navarra Nafarroako Gobernua

- Análogamente, sea $K = CS \cap AB$.
- ¡K es el simétrico de C respecto de la bisectriz exterior! ¡$AK = b$!
- $K = \left(1 - \dfrac{-b}{c} : \dfrac{-b}{c} : 0\right) = (b + c : -b : 0)$.
- Usamos las cevianas BF y CK para hallar S.

- Análogamente, sea $K = CS \cap AB$.
- ¡K es el simétrico de C respecto de la bisectriz exterior! ¡$AK = b$!
- $K = \left(1 - \frac{-b}{c} : \frac{-b}{c} : 0\right) = (b + c : -b : 0)$.
- Usamos las cevianas BF y CK para hallar S.

$$\frac{z}{x} = \frac{c}{b-c}, \quad \frac{y}{x} = \frac{-b}{b+c}.$$

Por tanto,

$$S = \left(1 : \frac{-b}{b+c} : \frac{c}{b-c}\right) = (b^2 - c^2 : -b(b-c) : c(b+c)).$$

- Para finalizar, «basta» comprobar que se anula el determinante

- Para finalizar, «basta» comprobar que se anula el determinante

$$\begin{vmatrix} bc-pc & pb & pc \\ c^2-pb & pb & -pc \\ b^2-c^2 & -b^2+bc & c^2+bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b+c)(c-p) & 2pb & 0 \\ c^2-pb & pb & -pc \\ b^2-c^2 & -b^2+bc & c^2+bc \end{vmatrix} =$$

- Para finalizar, «basta» comprobar que se anula el determinante

$$\begin{vmatrix} bc-pc & pb & pc \\ c^2-pb & pb & -pc \\ b^2-c^2 & -b^2+bc & c^2+bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b+c)(c-p) & 2pb & 0 \\ c^2-pb & pb & -pc \\ b^2-c^2 & -b^2+bc & c^2+bc \end{vmatrix} =$$

$$c\begin{vmatrix} (b+c)(c-p) & 2pb & 0 \\ c^2-pb & pb & -p \\ b^2-c^2 & -b^2+bc & b+c \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} (b+c)(c-p) & 2pb & 0 \\ c^2-pb & 0 & -p \\ b^2-c^2 & 2bc & b+c \end{vmatrix} =$$

- Para finalizar, «basta» comprobar que se anula el determinante

$$\begin{vmatrix} bc-pc & pb & pc \\ c^2-pb & pb & -pc \\ b^2-c^2 & -b^2+bc & c^2+bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b+c)(c-p) & 2pb & 0 \\ c^2-pb & pb & -pc \\ b^2-c^2 & -b^2+bc & c^2+bc \end{vmatrix} =$$

$$c\begin{vmatrix} (b+c)(c-p) & 2pb & 0 \\ c^2-pb & pb & -p \\ b^2-c^2 & -b^2+bc & b+c \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} (b+c)(c-p) & 2pb & 0 \\ c^2-pb & 0 & -p \\ b^2-c^2 & 2bc & b+c \end{vmatrix} =$$

$$2bc\begin{vmatrix} (b+c)(c-p) & p & 0 \\ c^2-pb & 0 & -p \\ b^2-c^2 & c & b+c \end{vmatrix} = 2bc\begin{vmatrix} (b+c)(c-p) & p & 0 \\ c(c-p) & 0 & -p \\ 0 & c & b+c \end{vmatrix} =$$

$$2bc(c-p)\begin{vmatrix} b+c & p & 0 \\ c & 0 & -p \\ 0 & c & b+c \end{vmatrix} = 2bc(c-p)\left[pc(b+c)-pc(b+c)\right] = 0.$$

$$2bc(c-p)\begin{vmatrix} b+c & p & 0 \\ c & 0 & -p \\ 0 & c & b+c \end{vmatrix} = 2bc(c-p)\left[pc(b+c)-pc(b+c)\right] = 0.$$

Por tanto, los puntos Q, R, S están alineados y hemos terminado.

$$2bc(c-p)\begin{vmatrix} b+c & p & 0 \\ c & 0 & -p \\ 0 & c & b+c \end{vmatrix} = 2bc(c-p)\left[pc(b+c)-pc(b+c)\right] = 0.$$

Por tanto, los puntos Q, R, S están alineados y hemos terminado.

¿Geometría?

- $\triangle BDA$ y $\triangle CEA$ son semejantes.

$$2bc(c-p)\begin{vmatrix} b+c & p & 0 \\ c & 0 & -p \\ 0 & c & b+c \end{vmatrix} = 2bc(c-p)\left[pc(b+c)-pc(b+c)\right]=0.$$

Por tanto, los puntos Q, R, S están alineados y hemos terminado.

¿Geometría?

- $\triangle BDA$ y $\triangle CEA$ son semejantes.
- La bisectriz exterior por A pasa por el C-excentro.

Gobierno de Navarra Nafarroako Gobernua

$$2bc(c-p)\begin{vmatrix} b+c & p & 0 \\ c & 0 & -p \\ 0 & c & b+c \end{vmatrix} = 2bc(c-p)\left[pc(b+c)-pc(b+c)\right] = 0.$$

Por tanto, los puntos Q, R, S están alineados y hemos terminado.

¿Geometría?

- $\triangle BDA$ y $\triangle CEA$ son semejantes.
- La bisectriz exterior por A pasa por el C-excentro.
- F es simétrico de B respecto de la bisectriz interior.

$$2bc(c-p)\begin{vmatrix} b+c & p & 0 \\ c & 0 & -p \\ 0 & c & b+c \end{vmatrix} = 2bc(c-p)\left[pc(b+c)-pc(b+c)\right] = 0.$$

Por tanto, los puntos Q, R, S están alineados y hemos terminado.

¿Geometría?

- $\triangle BDA$ y $\triangle CEA$ son semejantes.
- La bisectriz exterior por A pasa por el C-excentro.
- F es simétrico de B respecto de la bisectriz interior.
- K es simétrico de C respecto de la bisectriz exterior.

Cuándo (no) usar coordenadas baricéntricas

Cuándo **sí** puede ser conveniente usar coordenadas baricéntricas...

Cuándo **sí** puede ser conveniente usar coordenadas baricéntricas...

- Problemas que involucran muchas **cevianas**.

Cuándo **sí** puede ser conveniente usar coordenadas baricéntricas...

- Problemas que involucran muchas **cevianas**.
- Problemas sobre puntos notables del triángulo.

Cuándo **sí** puede ser conveniente usar coordenadas baricéntricas...

- Problemas que involucran muchas **cevianas**.
- Problemas sobre puntos notables del triángulo.
- Intersecciones de rectas, colinealidad, concurrencia...

Cuándo **sí** puede ser conveniente usar coordenadas baricéntricas...

- Problemas que involucran muchas **cevianas**.
- Problemas sobre puntos notables del triángulo.
- Intersecciones de rectas, colinealidad, concurrencia...
- Problemas simétricos respecto a los vértices del triángulo.

Cuándo **sí** puede ser conveniente usar coordenadas baricéntricas...

- Problemas que involucran muchas **cevianas**.
- Problemas sobre puntos notables del triángulo.
- Intersecciones de rectas, colinealidad, concurrencia...
- Problemas simétricos respecto a los vértices del triángulo.
- Razones, longitudes, áreas.

Cuándo (no) usar coordenadas baricéntricas

Cuándo **sí** puede ser conveniente usar coordenadas baricéntricas...

- Problemas que involucran muchas **cevianas**.
- Problemas sobre puntos notables del triángulo.
- Intersecciones de rectas, colinealidad, concurrencia...
- Problemas simétricos respecto a los vértices del triángulo.
- Razones, longitudes, áreas.
- Problemas con «pocos» puntos.

Cuándo (no) usar coordenadas baricéntricas

Cuándo **sí** puede ser conveniente usar coordenadas baricéntricas...

- Problemas que involucran muchas **cevianas**.
- Problemas sobre puntos notables del triángulo.
- Intersecciones de rectas, colinealidad, concurrencia...
- Problemas simétricos respecto a los vértices del triángulo.
- Razones, longitudes, áreas.
- Problemas con «pocos» puntos.

Cuándo puede **no** ser conveniente usar coordenadas baricéntricas...

Cuándo (no) usar coordenadas baricéntricas

Cuándo **sí** puede ser conveniente usar coordenadas baricéntricas...

- Problemas que involucran muchas **cevianas**.
- Problemas sobre puntos notables del triángulo.
- Intersecciones de rectas, colinealidad, concurrencia...
- Problemas simétricos respecto a los vértices del triángulo.
- Razones, longitudes, áreas.
- Problemas con «pocos» puntos.

Cuándo puede **no** ser conveniente usar coordenadas baricéntricas...

- Muchas circunferencias (algunas excepciones).

Cuándo (no) usar coordenadas baricéntricas

Cuándo **sí** puede ser conveniente usar coordenadas baricéntricas...

- Problemas que involucran muchas **cevianas**.
- Problemas sobre puntos notables del triángulo.
- Intersecciones de rectas, colinealidad, concurrencia...
- Problemas simétricos respecto a los vértices del triángulo.
- Razones, longitudes, áreas.
- Problemas con «pocos» puntos.

Cuándo puede **no** ser conveniente usar coordenadas baricéntricas...

- Muchas circunferencias (algunas excepciones).
- Circunferencias que no pasan por vértices o lados del t.r.

Cuándo **sí** puede ser conveniente usar coordenadas baricéntricas...

- Problemas que involucran muchas **cevianas**.
- Problemas sobre puntos notables del triángulo.
- Intersecciones de rectas, colinealidad, concurrencia...
- Problemas simétricos respecto a los vértices del triángulo.
- Razones, longitudes, áreas.
- Problemas con «pocos» puntos.

Cuándo puede **no** ser conveniente usar coordenadas baricéntricas...

- Muchas circunferencias (algunas excepciones).
- Circunferencias que no pasan por vértices o lados del t.r.
- Circuncentros arbitrarios.

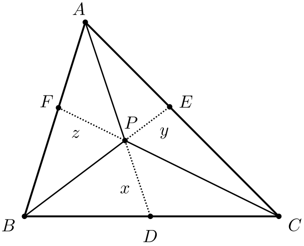
Cuándo **sí** puede ser conveniente usar coordenadas baricéntricas...

- Problemas que involucran muchas **cevianas**.
- Problemas sobre puntos notables del triángulo.
- Intersecciones de rectas, colinealidad, concurrencia...
- Problemas simétricos respecto a los vértices del triángulo.
- Razones, longitudes, áreas.
- Problemas con «pocos» puntos.

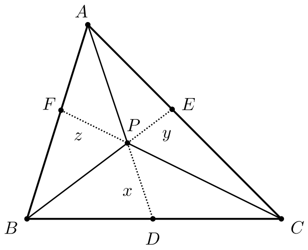
Cuándo puede **no** ser conveniente usar coordenadas baricéntricas...

- Muchas circunferencias (algunas excepciones).
- Circunferencias que no pasan por vértices o lados del t.r.
- Circuncentros arbitrarios.
- Condiciones sobre ángulos en general (salvo que puedas traducirlos).

- E. Chen, *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*, MAA, 2016.
- E. Chen, M. Schindler, *Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry*, 2012. Online en https://web.evanchen.cc/handouts/bary/bary-full.pdf
- Cut the knot: https://www.cut-the-knot.org/



¡MUCHAS GRACIAS!



¡MUCHAS GRACIAS!

¿Cuestiones, dudas, sugerencias...?

jserrander@educacion.navarra.es