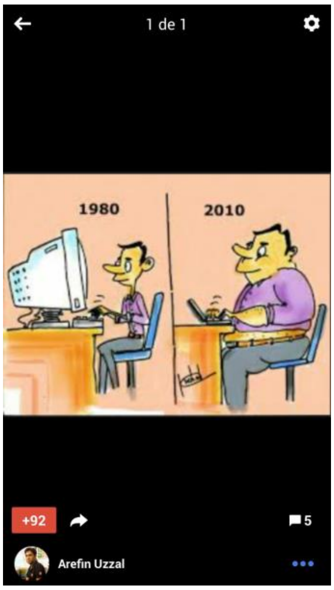
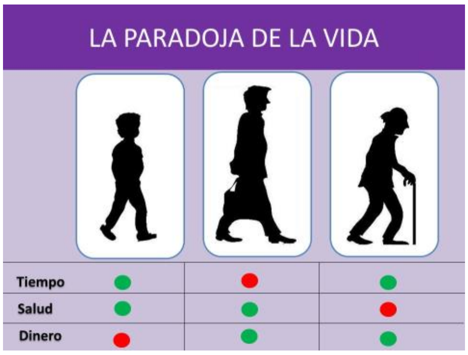
PARADOJAS

Fernando Herrero Buj. IES Félix de Azara. Zaragoza. 2023





PARADOJAS

1. DEFINICIÓN Y EJEMPLOS.

Una **paradoja** es una afirmación en apariencia verdadera que lleva a una contradicción lógica o a una situación que contradice el sentido común.

El término paradoja viene del griego (*para* y *doxos*) y significa *más allá de lo creíble (lo contrario a lo esperado).*

No todas las paradojas encajan con exactitud en una única categoría. Algunas paradojas sólo parecen serlo, ya que lo que afirman es realmente cierto o falso, pero contrario a lo que esperamos, otras se autocontradicen, por lo que se consideran verdaderas paradojas, y por último las hay que dependen de su interpretación para ser o no paradójicas.

Tienen mucho que ver con la lógica y no sólo aparecen en Matemáticas, en la política aparecen con frecuencia, y también en la literatura, algunos poetas las suelen utilizar.

Vamos a ver algunos ejemplos de paradojas en distintos ámbitos. El reto que se nos plantea, en cada caso, es decidir si la afirmación es cierta o falsa y justificar dicha respuesta, o si la situación que se nos narra es posible o imposible según en qué condiciones se plantee. Algunos de los problemas propuestos no parecen contradictorios, la contradicción aparente surge al intentar resolverlos, la solución es la que no encaja en nuestros esquemas.

a. Las paradojas de Zenón

Son muy conocidas las paradojas planteadas por el filósofo griego Zenón de Elea (siglo V antes de Cristo) para demostrar la imposibilidad del movimiento.

- El movimiento es imposible
- Aquiles no alcaza a la tortuga

b. Dos padres y dos hijos

Dos padres y dos hijos se van de viaje, suben al coche, pero si observamos atentamente a la llegada sólo bajan tres personas y no queda nadie dentro ¿Es posible?

c. ¿Sólo un 1%?

Una sandía fresca tiene 10 kg de masa, de la que el 99% es agua. Partimos la sandía y la dejamos al sol sin darnos cuenta de que puede evaporarse parte del agua. Efectivamente, pasado un tiempo, comprobamos que la proporción de agua sólo es del 98 %. ¿Cuánto pesa ahora la sandía?

d. Geografía

- Una persona se ha comprado una casa de planta cuadrada con una ventana en cada una de las cuatro paredes y de modo que todas las ventanas den al sur ¿Es posible?

- Una persona sale de paseo en dirección norte y camina 2000 m, gira hacia el este y camina otros 2000 m y por último gira hacia el sur y camina otros 2000 m ¿Es posible que haya llegado nuevamente al punto de partida?

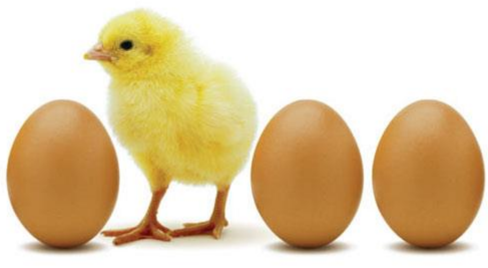
e. La herencia.

Un ganadero dejó al morir 11 vacas que debían repartirse entre sus tres hijos de modo que el mayor recibiera la mitad, el segundo la cuarta parte y el tercero la sexta parte. Mientras los hijos discutían sobre como hacer el reparto para que no hubiera que derramar mucha sangre de vaca, un vecino enterado del tema se acerco con una de sus vacas y les dijo: “os presto esta vaca para que podáis repartir mejor”. Efectivamente se repartieron la mitad(6), la cuarta(3) y la sexta parte(2) de las doce sin usar violencia alguna y comprobaron al acabar que sobraba una vaca que tranquilamente se volvió a llevar el vecino ¿Cómo es posible?

f. La velocidad

Inés ha salido en bicicleta para subir a una cima que se encuentra a 10 km de su casa. Como es cuesta arriba, sólo ha podido sacar un promedio de 10 km/h. ¿A qué velocidad debe bajar para que le salga un promedio de 25 km/h en la totalidad del paseo?

g. La serpiente que se come a sí misma. El huevo o la gallina



2. **UN ENUNCIADO Y SU CONTRARIO.**

¿Siempre que un enunciado es falso su contrario es verdadero? ¿Pueden ser ciertos o falsos un enunciado y su contrario?

Esta frase consta de siete palabras Es claramente un enunciado falso, ya que consta de seis palabras. Por tanto, su contrario debería ser verdadero. ¿Es esto correcto?

¡Es falso! La oración contraria: *Esta frase no consta de siete palabras*, está formada exactamente por siete palabras. ¿Cómo resolver estos raros dilemas? ¿Podríamos modificarlas para que las dos fueran verdaderas?

a. ¿Quién tiene razón?

Estamos en pleno curso y podemos observar las distintas interpretaciones de los datos de las evaluaciones, en los que cada uno suele buscar la perspectiva más favorable a sus intereses.

Nos vamos a fijar en una situación próxima: los resultados obtenidos al acabar 3º de ESO en un Instituto en dos años seguidos, hemos separado al alumnado según fueran repetidores o hicieran 3º por primera vez. Los datos aparecen en la siguiente tabla (nos os asustéis, son datos inventados):

	2021		2022	
	MATRICULADOS	APROBADOS	MATRICULADOS	APROBADOS
NO REPETIDORES	88	48	60	32
REPETIDORES	12	12	40	36
TOTAL	100	60	100	68

Hasta aquí los datos. Los mismos para todos. Lo que difieren son las interpretaciones. He aquí algunas:

El director: *"El año 2022 marca un avance del 13 % en el número de aprobados entre nuestro alumnado de 3º. Es una buena demostración del buen trabajo que han realizado a lo largo del año nuestro profesorado y alumnos y alumnas. Les felicito a todos por ello"*

Una profesora del centro: "*Le agradezco al director su comentario, pero no hay que lanzar las campanas al vuelo, puesto que la tasa de aprobados no ha crecido más que un 8%"*

Una alumna de 3º: "*Como siempre los profesores miran las cosas de una forma extraña. Se sea repetidor o no este año las cosas han ido peor para el alumnado. No creo que sea cosa de felicitaciones*"

Un alumno repetidor: "*Tampoco creo que sea para ponerse como dice el compañero, porque la verdad es que repitiendo este año tenía un 35´5 % más de posibilidades de aprobar que el curso pasado*"

Otro alumno repetidor: "*Desde luego que no. Este año repitiendo, tenías un 10% menos de posibilidades que en el 2021*"

Es evidente que los comentarios no sólo difieren algo, sino que parecen absolutamente contradictorios. Analízalos y decide quién o quiénes, de todos ellos, tienen razón. (Situaciones similares se dan también en otros ámbitos, basta recordar las declaraciones de los distintos líderes políticos después de conocerse los resultados de las elecciones: todos parecen haber ganado)

b. Los tres enunciados falsos.

Tenemos aquí tres enunciados falsos. ¿Serías capaz de descubrirlos?

a) 2 + 2 = 4 b) 3 x 6 =17 c) 8/4 = 2 d) 13 – 6 = 5 e) 5 + 4 = 9

c. Una de las dos.

He aquí dos afirmaciones. Una de ellas es falsa. ¿Cuál?

La primera es cierta: hay dos afirmaciones, ella misma y la segunda. Si la segunda fuese falsa, ella misma tendría que decir que no hay ninguna falsa (al ser falsa) y si fuese verdadera, ¿dónde está la falsa? Por lo que nos introducimos en una clara contradicción.

d. Paradoja del mentiroso

Ésta es, sin duda, una de las paradojas más famosas que se conocen. Se atribuye al cretense Epiménides haber hecho la siguiente afirmación:

Todos los cretenses son mentirosos.

¿Decía Epiménides la verdad?. Para responder a esta pregunta, primero hemos de suponer que los mentirosos siempre mienten, y los no mentirosos, o veraces, nunca mienten.

Una versión simplificada de la paradoja del mentiroso es la siguiente:

Esta frase es falsa.

Se puede ver claramente que esta frase contiene la paradoja del mentiroso. La diferencia aquí es que esta frase se refiere a ella misma mientras que Epiménides lo hace indirectamente.

e. La isla de los caballeros y los escuderos

Relacionados con estas paradojas hay numerosos problemas relativos a cierta isla en la que habitaban “caballeros” que siempre decían la verdad y “escuderos” que siempre mentían. Os propongo los siguientes:

a) Tres de los habitantes de la isla A, B y C están en la calle y un extranjero que pasaba por allí le preguntó a A: “¿Eres caballero o escudero?”, A respondió pero el extranjero no entendió bien la respuesta, entonces preguntó a B: “¿Qué ha dicho?” y B le respondió: “A ha dicho que es escudero” y el tercer hombre C puntualizó: “No creas a B, está mintiendo”. La pregunta es: ¿Qué son B y C?

b) Hay ahora sólo dos individuos A y B, y A le dice a B “Uno al menos de nosotros es escudero” ¿Qué son A Y B?

c) Vuelven a estar tres: A, B y C, se oye a A decir:”Los tres somos escuderos”. En cambio B dice: “Uno y sólo uno de nosotros es caballero”. ¿Qué son A, B y C?

3. MÁS PARADOJAS

a. La **paradoja del abuelo** es una paradoja física muy utilizada en la ciencia ficción, ya que tiene su base en los viajes en el tiempo. Es muy conocida y se ha utilizado en muchas obras, como por ejemplo **Terminator**, **Regreso al futuro** o **Futurama**.

Suponiendo el caso de que una persona pudiera viajar hacia atrás en el tiempo, retrocediera varios años y matase a su **abuelo** antes de que tuviera descendencia (*concretamente al padre del viajero del tiempo*), este no habría nacido ni hubiera tenido **hijos**, por lo cual el viajero del tiempo tampoco nacería ni le sería posible viajar en el tiempo para matar a su abuelo.

b. Paradoja de Russell. La paradoja de Russell se basa en la definición de conjunto. La mencionaremos brevemente. Podemos definir cualquier conjunto mediante una propiedad, los elementos que la verifican pertenecen a él y los que no la verifican no pertenecen. Pero ¿y si definimos el conjunto A de los conjuntos que no se contienen a si mismos? ¿Contendrá a A?

Una versión de esta paradoja, algo más sencilla, es la paradoja del barbero: «el barbero de esta ciudad tiene la orden de afeitar sólo a todos los hombres que no se afeitan a sí mismos, ¿se afeita a sí mismo? ¿Qué debe hacer con su barba para cumplir la orden?»

c. Paradoja del Quijote

Aparece en el capítulo LI del libro segundo del Quijote, se cuenta que, para entrar a la isla había un guardia que preguntaba a cada visitante para qué iba a la isla. Si respondía con verdad, el guardia le dejaba pasar y no había ningún tipo de problema. Sin embargo, si el visitante respondía con mentira, era ahorcado. Un día llegó un visitante y a la pregunta respondió:

He venido aquí para ser ahorcado

Los guardias quedaron confusos, pues no sabían qué debían hacer.

- Si el visitante decía la verdad, debían dejarle pasar. Pero puesto que dijo la verdad, debía ser ahorcado, pues si no, habría mentido.
- Si el visitante había mentido, debían ahorcarle. Como había mentido, no podía ser ahorcado, pues si no, habría dicho la verdad y debían dejarle pasar a la isla.

Los guardias consultaron al gobernador de la isla y decidió ser clemente, ya que, hiciera lo que hiciera, quebrantaría la ley. Y dejó en libertad al visitante.

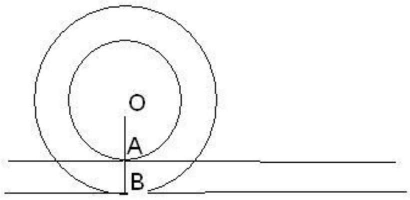
d. Paradoja del cumpleaños. En un grupo con 23 personas, la probabilidad de que al menos dos personas cumplan años el mismo día es de más del 50%. De hecho, si hay 50 personas, la probabilidad es casi del 100% .

Esta paradoja sorprende mucho por una especie de **ilusión mental**, ya que el sentido común dicta lo contrario que la demostración matemática.

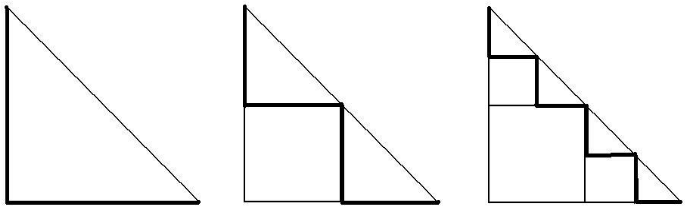
4. DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS Y PARADOJAS.

¿Podemos fiarnos de lo que vemos? Algunos razonamientos contienen trampas, pero, los dibujos y los gráficos ¿son de fiar? Algunas veces, si nos dejamos llevar por lo que parece que el gráfico nos indica, podemos llegar a contradicciones o paradojas:

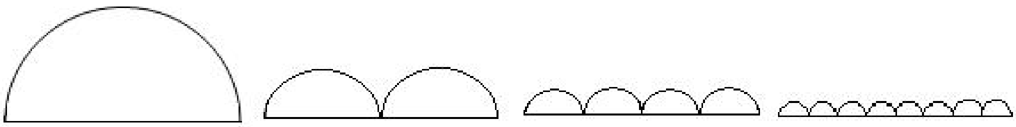
a) Para medir la longitud de una rueda se puede marcar con pintura un punto de la misma, hacerla rodar en línea recta y medir la distancia entre dos marcas consecutivas que haya dejado la pintura al desplazarse. Pero este sencillo método de medida puede llevar a aparentes paradojas: **Todas las circunferencias tiene la misma longitud**.



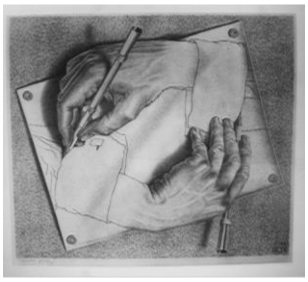
b) La diagonal de un cuadrado es igual al doble de su lado.

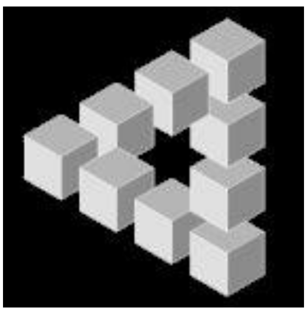


c) La semicircunferencia mide lo mismo que el diámetro.

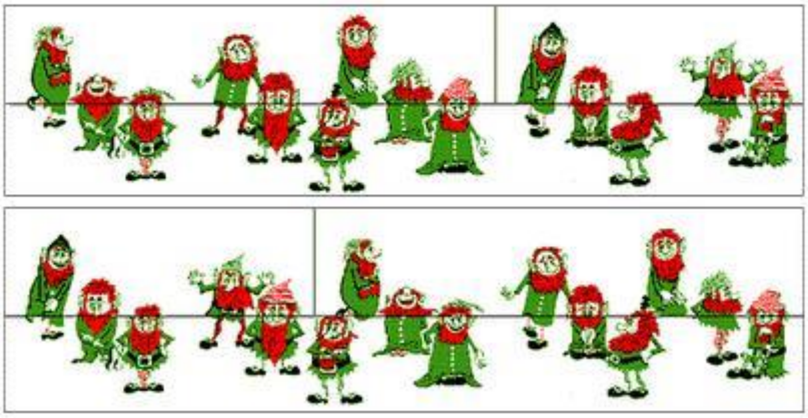


d) Las figuras imposibles en general y las de Escher en particular.

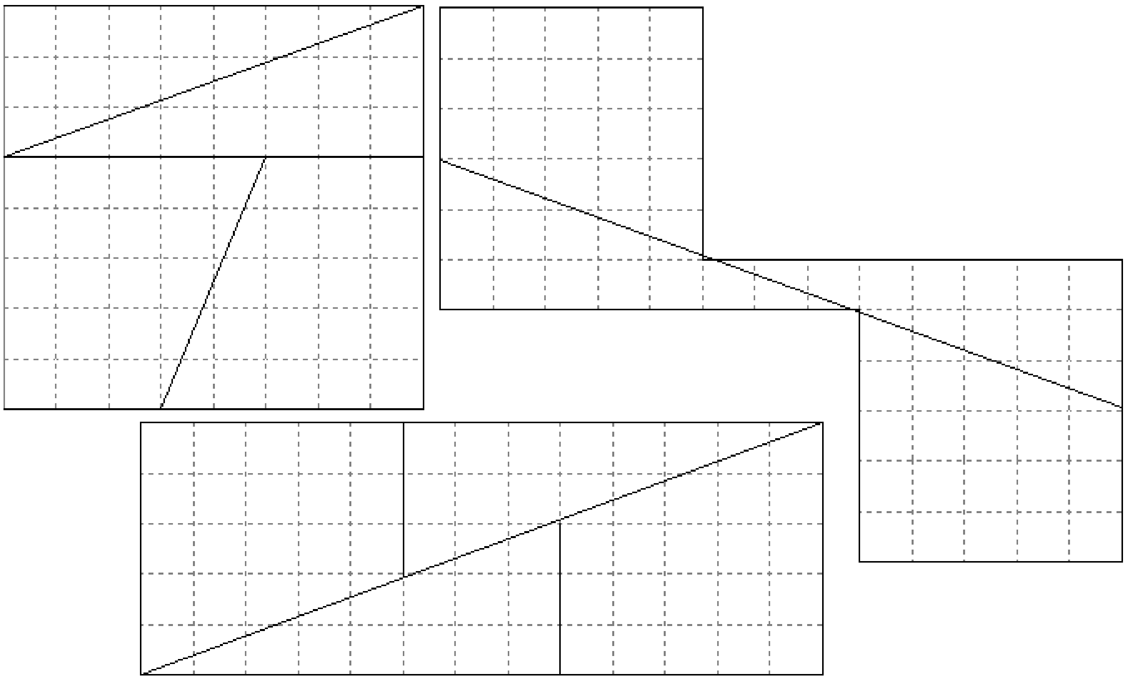




e) Observa los siguientes dibujos, se pueden descomponer en las mismas piezas y, sin embargo, el número de individuos es distinto ¿Tiene alguna explicación?



f) ¿Es posible que si descomponemos una figura geométrica y la volvemos a componer obtengamos una superficie mayor? ¿Y menor? Observa las siguientes superficies compuestas por las mismas figuras y calcula el área de cada una. ¿Cómo se explica?



Esto no debe hacernos desistir de la visión gráfica de los problemas ni desconfiar de nuestra intuición. Pero será conveniente asegurarnos de la solidez de los argumentos en que se sustentan las conclusiones.

5. ALGUNAS FRASES PARADÓGICAS.

- ¿Puede un ser omnipotente construir una fortaleza indestructible que ni el mismo pueda destruir?
- ¿Puede perderse un imperdible?
- ¿Existe algún sinónimo de la palabra sinónimo?
- ¿Qué pasa con tu puño si abres la mano?

- ¿Qué cuentan las ovejas para no dormirse?
- ¿Por qué separado se escribe todo junto y todo junto se escribe separado?
- ¿Por qué matamos a quienes han matado a otros? ¿Para demostrar que matar está mal?
- Sólo los genios somos modestos.
- Paradoja de Teseo . Cuando se han reemplazado todas las partes de un barco, ¿sigue siendo el mismo barco?
- Quien bien te quiere te hará llorar
- ¡Oh, soledad, que a fuerza de andar sola se siente de sí misma compañera!
- Si quieres paz prepárate para la guerra
- Solo sé que no sé nada
- Seamos realistas, pidamos lo imposible
- Prohibido prohibir
- Es de mala suerte ser supersticioso
- Así es mi vida. Cuando al fin tengo lo que más quería, sale algo mejor
- Todos somos iguales, pero unos más iguales que otros
- Pobre hombre, sólo tiene dinero.
- Gracias a Dios soy ateo

-Yo te amo para comenzar a amarte, para recomenzar el infinito y para no dejar de amarte nunca: por eso no te amo todavía. (Pablo Neruda)

-Vivo sin vivir en mí, y tan alta vida espero que muero porque no muero (Santa Teresa)

6. PARADOJAS NUMÉRICAS

Las paradojas numéricas se basan en la confianza que ofrecen las reglas de cálculo y a veces, deslizamos algunos errores sobre los que no se repara a primera vista:

a) 2 Euros = 332 pesetas
   4 Euros = 664 pesetas

por lo tanto (multiplicando miembro a miembro)

   8 Euros = 220448 pesetas

b) Si $a > b$, entonces $a^2 > b^2$
c) ¿Todo conjunto es mayor que sus subconjuntos? ¿En los números naturales, hay más números que cuadrados perfectos?
d) Si tengo dos conjuntos numéricos ¿puede suceder que al pasar un número de un conjunto al otro aumente la media aritmética de los dos?
e) Demostración de que $1 = 2$ ¿Dónde está el error?

Si $a = b$, *entonces* $a^2 = ab$, *y sumando* $-b^2$

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$
$$(a + b)\cdot(a - b) = b\cdot(a - b)$$
$$(a+b) = b$$
$$2b = b$$
$$2 = 1$$

f) Dos números cualesquiera a y b son iguales:
Sean los números a y b y sea c su media aritmética

$a + b = 2c$

$(a + b)\cdot(a - b) = 2c\,(a - b)$

$a^2 - b^2 = 2ca - 2cb$

sumando a los dos miembros: $b^2 - 2ac + c^2$

$a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2bc + c^2$

$(a - c)^2 = (b - c)^2$

$a - c = b - c,$

$a = b$

7. UNA DEMOSTRACIÓN POR REDUCCIÓN AL ABSURDO.

Este tipo de demostración se basa en la suposición de que es correcto lo contrario de lo que queremos demostrar, para llegar a una contradicción y deducir de ahí el resultado que se pretende. A continuación presentamos un ejemplo sobre números primos. Ya Euclides demostró que los números primos son infinitos.

Veamos que hay **infinitos** números primos. Lo haremos por el método de reducción al absurdo. **Supondremos que hay un número finito** de números primos y que p es el mayor de ellos, eso nos llevará a una contradicción.

Construyamos otro número $q = (1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots p) + 1$, resultado de multiplicar todos los números primos hasta el último p, y después sumarle 1. Evidentemente q no es divisible por ningún primo pues siempre daría como resto 1. Luego q es divisible sólo por 1 y por sí mismo, es decir, q es primo. Como q es mayor que p, se ha probado que p no es el mayor número primo en contra de lo supuesto.

8. LA BANDA DE MOEBIUS

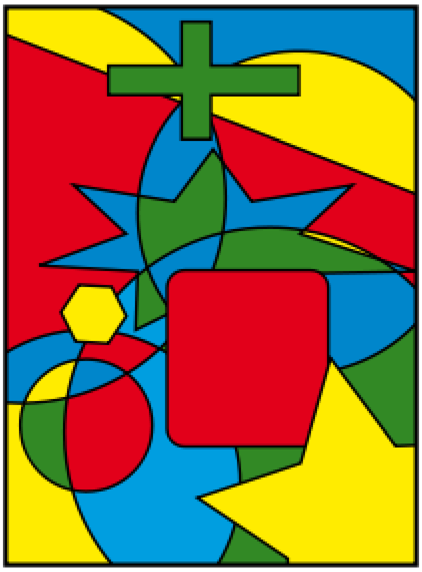
Una superficie con una sola cara y un único borde

Si cortamos a lo largo por el centro de la banda ¿Qué sale? ¿Y si cortáramos más cerca de un lado?

9. EL TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES

En teoría de grafos, el **teorema de los cuatro colores** (o teorema de la minimalidad cromática) es un teorema sobre la coloración de grafos que establece lo siguiente:

Dado cualquier mapa geográfico con regiones continuas, este puede ser coloreado con cuatro colores diferentes, de forma que no queden regiones *adyacentes* con el mismo color.



Asumiendo que las regiones adyacentes comparten no solo un punto, sino todo un segmento de borde (frontera) en común.

Tres colores son suficientes para mapas simples, pero en algunos casos es necesario un cuarto color adicional, esto es, cuando una región a colorear queda encerrada por un número impar de regiones que se tocan formando un ciclo

El *problema del mapa de cuatro colores* fue planteado, por primera vez, por el estudiante Francis Guthrie en 1852.