Problemas Olímpicos IV

Problema 1 (OME 2014, Fase Local)**.** Sean a y b números positivos. Probar que

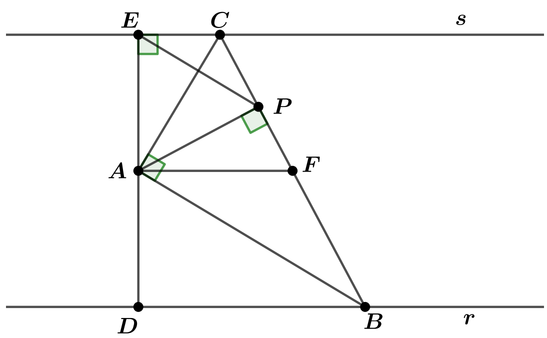
$$a + b \geq \sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}. \tag{1}$$

Solución. Notar que ambos lados de la desigualdad (1) son cantidades positivas. Luego, elevando al cuadrado y simplificando, la desigualdad (1) es equivalente a

$$\frac{a^2 + b^2}{2} + ab \geq 2\sqrt{\frac{ab(a^2 + b^2)}{2}},$$

que se deduce inmediatamente usando la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica. □

Problema 2 (OME 2015, Fase Local)**.** Sean r y s dos rectas paralelas, y A un punto fijo a igual distancia de ambas rectas. Para cada punto B de la recta r, sea C el punto de la recta s tal que $\angle BAC = 90°$, y sea P el pie de la perpendicular desde A sobre la recta BC. Demuestra que, independientemente de qué punto B de la recta r tomemos, el punto P está sobre una circunferencia fija.



Solución. Sea F la intersección de la recta paralela a r (y a s) que pasa por A con la recta BC (ver la figura de arriba). Notar que F es el punto medio del segmento BC. Además, como el triángulo BAC es rectángulo en A, tenemos que $FA = FB = FC$. Por otro lado, el cuadrilátero $APCE$ es cíclico de diámetro AC. Luego

$$\angle FDA = 90° - \angle ACF = 90° - \angle FAC = \angle CAE = \angle CPE.$$

Por tanto, las rectas AB y EP son paralelas. Entonces los triángulos $\triangle ECP$ y $\triangle AFB$ son semejantes, luego $\angle PEC = \angle CPE$. Por tanto,

$$\angle CAE = \angle CPE = \angle PEC = \angle PAC.$$

Entonces los triángulos $\triangle ACE$ y $\triangle ACF$ son iguales, y en particular $AP = AE$, que es constante. Luego P siempre está en la circunferencia de centro A y radio AE. $\square$

Problema 3 (OME 2016, Fase Local)**.** En la primera fila de un tablero 5×5 se colocan 5 fichas que tienen una cara blanca y otra negra, mostrando todas la cara blanca. Cada ficha se puede mover de una casilla a cualquiera de las contiguas (horizontal o verticalmente) dándole la vuelta en cada movimiento. Además, varias fichas pueden ocupar la misma casilla. ¿Se puede conseguir mediante una secuencia de movimientos que las 5 fichas queden en la última fila, en casillas distintas y que todas ellas muestren la cara negra?

Solución. Ponemos coordenadas en el tablero: (i, j) con $i, j \in \{1, \ldots, 5\}$. Como las fichas cambian de color al pasar a una casilla contigua, esto significa que cambian de color cuando cambia la paridad de la suma de sus coordenadas. Por ejemplo, la ficha de la casilla $(1, 1)$ (blanca), cuando esté en la casilla (i, j) será blanca si $i + j$ es par, y negra si $i + j$ es impar. Por tanto, si se pudiese conseguir que las cinco fichas terminasen en las cinco casillas de la fila superior, todas de color negro, entonces la ficha de la casilla $(1, 1)$ debería terminar o bien en la casilla $(5, 2)$ o bien en la casilla $(5, 4)$. Pero lo mismo sucede con las fichas de las casillas iniciales $(1, 3)$ y $(1, 5)$. Por el principio del palomar, esto es imposible. $\square$

Problema 4 (OME 2017, Fase Local)**.** Probar que hay infinitos números primos cuyo resto al dividirlos entre 3 es 2.

Solución. Haremos un razonamiento al absurdo. Supongamos que existen sólo un número finito de primos congruentes con $2 \pmod 3$, digamos $p_1, \ldots, p_n$. Sea $A := p_1 \cdots p_n$. Notar que o bien $A \equiv 1 \pmod 3$ o bien $A \equiv 2 \pmod 3$.

Supongamos primero que $A \equiv 1 \pmod 3$. Entonces $A + 1 \equiv 2 \pmod 3$. Luego, entre los factores primos de $A + 1$, debe haber alguno que sea congruente con $2 \pmod 3$, es decir, algún p_j. Sin embargo, como p_j divide a A, no puede dividir a $A + 1$, lo cual es una contradicción.

Si $A \equiv 2 \pmod 3$, podemos hacer un razonamiento análogo trabajando con $A + 3$. Por tanto, en ambos casos llegamos a una contradicción y obtenemos que existen infinitos primos congruentes con $2 \pmod 3$. $\square$

Problema 5 (OME 2018, Fase Local)**.** Sea n un número natural. Probar que si la última cifra de 7^n es 3, la penúltima es 4.

Solución. Es inmediato comprobar que $7^n \equiv 3 \pmod{10}$ si y sólo si $n = 3 + 4k$, para algún entero no negativo k. De hecho, $7^4 \equiv 1 \pmod{100}$. Entonces,

$$7^n = 7^{3+4k} = 7^3 \cdot (7^4)^k \equiv 43 \cdot 1^k = 43 \pmod{100},$$

luego queda probado el enunciado. $\square$

Problema 6 (OME 2019, Fase Local)**.** Consideramos un triángulo ABC y un punto D en el lado AC. Si $\overline{AB} = \overline{DC} = 1, \angle DBC = 30^\circ$ y $\angle ABD = 90^\circ$, calcula el valor de $\overline{AD}$.

Solución. Ponemos $x := AD$, y denotamos por h a la altura por B del triángulo $\triangle ADB$. Entonces

$$\frac{xh}{2} = (ADB) = \frac{1 \cdot BD}{2}.$$

(Usamos la notación (ADB) para referirnos al área del triángulo $\triangle ADB$.) Luego $x = BD/h$. Por otro lado,

$$\frac{h}{2} = (DCB) = \frac{1}{2}\sin(30^\circ) \cdot BD \cdot BC = \frac{1}{4}BD \cdot BC.$$

Luego $BD/h = 2/BC$. Por tanto, $x = 2/BC$. Notar que

$$(ABC) = \frac{1}{2}BC\sin(120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}BC = \frac{\sqrt{3}}{2x}. \tag{2}$$

Como $\cos\angle DAB = 1/x$, tenemos que $\sin\angle DAB = \sqrt{x^2-1}/x$. Por tanto,

$$(ABC) = \frac{1}{2}\sin\angle DAB \cdot 1 \cdot (x+1) = \frac{\sqrt{x^2-1}\,(x+1)}{2x}. \tag{3}$$

Juntando (2) y (3), obtenemos

$$\sqrt{x^2-1}\,(x+1) = \sqrt{3}.$$

Elevando al cuadrado y simplificando, llegamos a

$$(x+2)(x^3-2) = 0.$$

Por tanto, la solución es $x = \sqrt[3]{2}$. $\square$