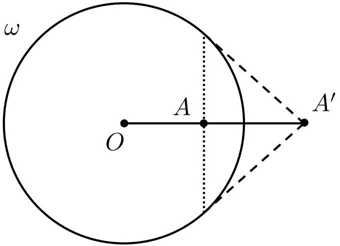


La inversión como estrategia de resolución de problemas

Juan Ángel Serrano de Rodrigo

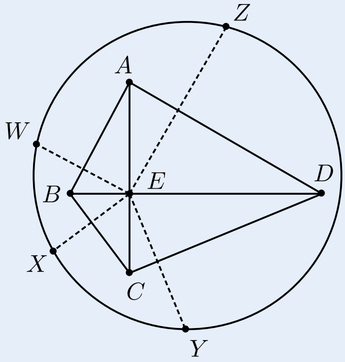
Departamento de Educación – Gobierno de Navarra

Zaragoza, 3 de noviembre de 2023

Contenidos

Problema (USAMO 1993/2).

Sea $ABCD$ un cuadrilátero cuyas diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son perpendiculares y se cortan en E. Demuestra que los puntos simétricos de E respecto de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ son cocíclicos.



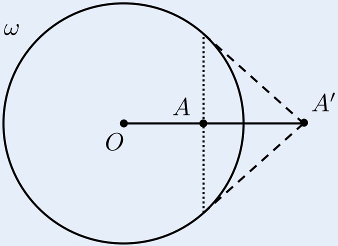
Gobierno de Navarra Nafarroako Gobernua

Inversión

Sea ω una circunferencia con centro O y radio r. una **inversión** respecto a ω es una transformación cumpliendo:

- El centro O de la circunferencia se envía a P_∞.
- El punto P_∞ se envía a O.
- Cualquier otro punto A se envía al punto A' sobre OA tal que

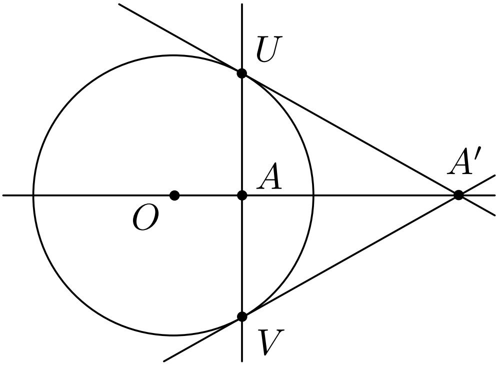
$$OA \cdot OA' = r^2.$$



Gobierno de Navarra · Nafarroako Gobernua

Propiedad 1.

Un punto $A \in \omega$ si y sólo si $A = A'$. En general, $(A')' = A$.

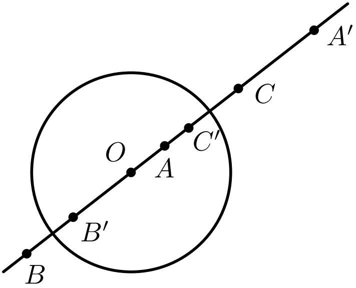


Gobierno de Navarra Nafarroako Gobernua

Propiedad 2.

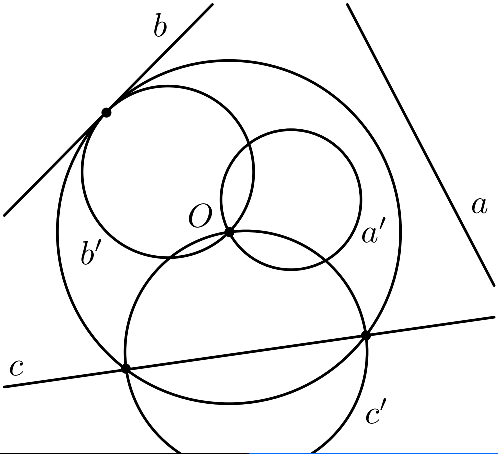
Una recta que pasa por O se transforma por inversión en la misma recta

Nota: no punto a punto.



Propiedad 3.

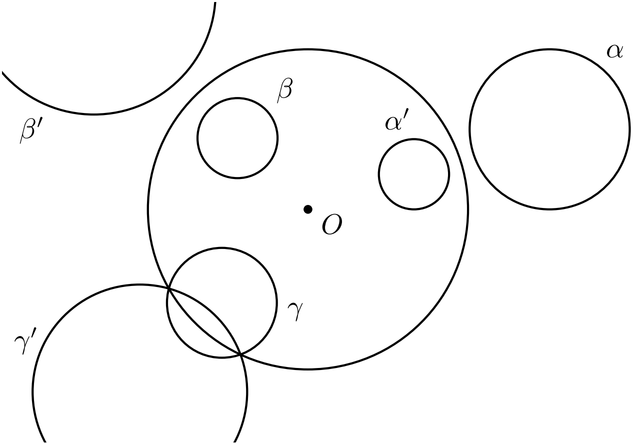
El inverso de una recta a que no pasa por O es una circunferencia a' que pasa por O. Además, la recta por O perpendicular a a pasa por el centro de a'. El recíproco también se cumple.



Gobierno de Navarra Nafarroako Gobernua

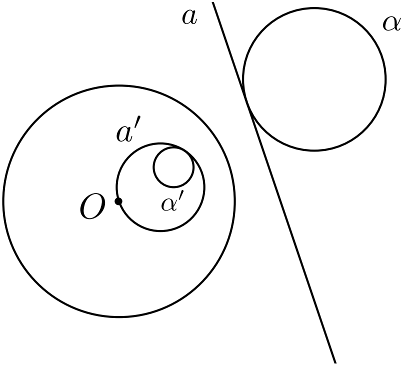
Propiedad 4.

El inverso de una circunferencia α que no pasa por O es otra circunferencia α' que tampoco pasa por O.



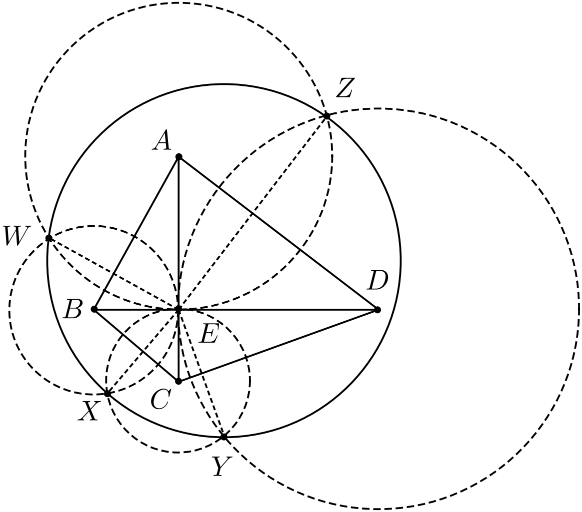
Propiedad 5.

La inversión preserva tangencias e intersecciones.



Nota: Si una circunferencia α se transforma en α', el inverso del centro de α **no** es, en general, el centro de α'.

- ¿Dónde están las circunferencias?
- $AW = AE = AZ$.



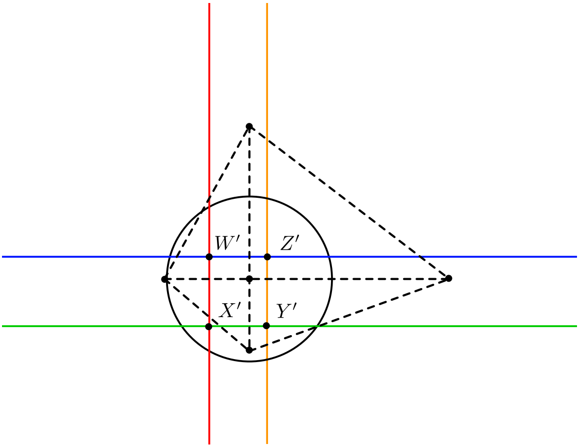
1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero con diagonales perpendiculares en E.
2. Sea ω_A una circunferencia con centro en A que pasa por E.
3. Se definen análogamente ω_B, ω_C, ω_D.
4. Sea W la intersección de ω_A y ω_E distinta de E.
5. Se definen análogamente X, Y, Z.
6. Probar que $WXYZ$ es cíclico.

Recordar

La inversión permite transformar circunferencias en rectas.

Invertimos respecto a una circunferencia centrada en E de radio 1.

Resolución del problema



- $WXYZ$ es cíclico $\iff$ $W'X'Y'Z'$ es cíclico.
- ¡Pero $W'X'Y'Z'$ es un rectángulo, así que es obviamente cíclico!

Demostración.

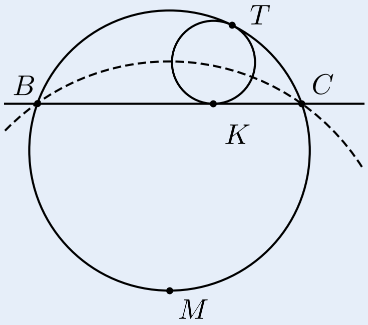
- Definimos las circunferencias ω_A, ω_B, ω_C, ω_D con centros A, B, C, D que pasan por E.
- Los puntos W, X, Y, Z son las segundas intersecciones de ω_A y ω_B, etc.
- Consideramos una inversión con centro E. Dicha inversión transforma ω_A, ω_B, ω_C, ω_D en cuatro rectas que son los lados de un rectángulo.
- Las imágenes de W, X, Y, Z forman un rectángulo, que en particular es cíclico. Transformando de vuelta, $WXYZ$ es cíclico.

- No hace falta dar los detalles de las transformaciones.
- No todos los problemas que pueden resolverse así son *tan* fáciles.

Gobierno de Navarra Nafarroako Gobernua

Problema 2.

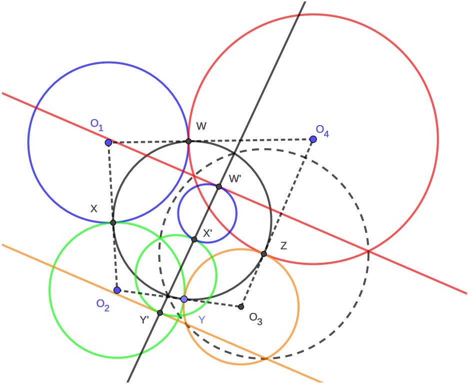
Sea $\overline{BC}$ una cuerda de una circunferencia Ω. Sea ω una circunferencia tangente a la cuerda $\overline{BC}$ en K y tangente interior a Ω en T. Entonces el rayo TK pasa por el punto medio M del arco $\widehat{BC}$ que no contiene a T. Además, MC^2 es la potencia de M con respecto a ω.



- Inversión respecto a la circunferencia Γ de centro M por B y C.
- La inversión intercambia BC con Ω.
- La circunferencia ω se transforma en ella misma.
- Los puntos K y T son inversos el uno del otro.
- En particular, M, K, T son colineales y $MK \cdot MT = MC^2$.

Problema 3.

Sean ω_1, ω_2, ω_3 y ω_4 cuatro circunferencias tangentes cíclicamente cada una a sus vecinas, de modo que ω_1 toca a ω_2 y ω_4, ω_2 toca también a ω_3, y esta última toca a ω_4. Demuestra que los cuatro puntos de tangencia son cocíclicos.



- Inversión con centro cualquiera de los puntos de tangencia.
- Las circunferencias tangentes en ese punto $\Longrightarrow$ rectas paralelas.
- Las otras dos circunferencias $\Longrightarrow$ dos circunferencias, cada una de ellas tangente a una de las rectas.
- Los puntos de tangencia X', Y', W' son colineales (¿Por qué?).

Demostración.

Utilizamos uno de los puntos de tangencia de las circunferencias ω_1, ω_2, ω_3 y ω_4 como centro de la inversión. Los otros tres puntos son obviamente cocíclicos. Sea Ω la circunferencia sobre la que se encuentran. Por la inversión, las imágenes de los tres puntos son colineales. Por tanto, la circunferencia Ω debe pasar por el centro de la inversión – el cuarto punto de tangencia.

¿Cuándo invertir?

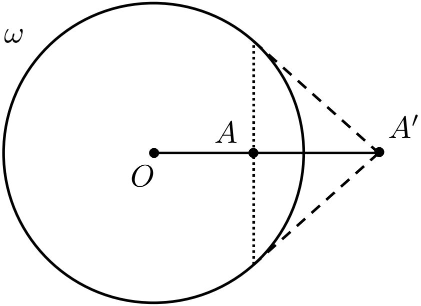
Cuándo **sí** es conveniente invertir...

- Circunferencias y rectas tangentes entre sí.
- ¿Varias circunferencias pasan por O? Invierte con centro O.
- ¡Configuraciones que se invierten en sí mismas!

Cuándo **no** es conveniente invertir...

- Muchos ángulos dispersos...
- Problemas que involucran rectas, pero no muchas circunferencias.

- H.S.M Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA, 1967.
- E. Chen, *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*, MAA, 2016.
- **Cut the knot:** https://www.cut-the-knot.org/



¡MUCHAS GRACIAS!

¿Cuestiones, dudas, sugerencias...?

jserrander@educacion.navarra.es