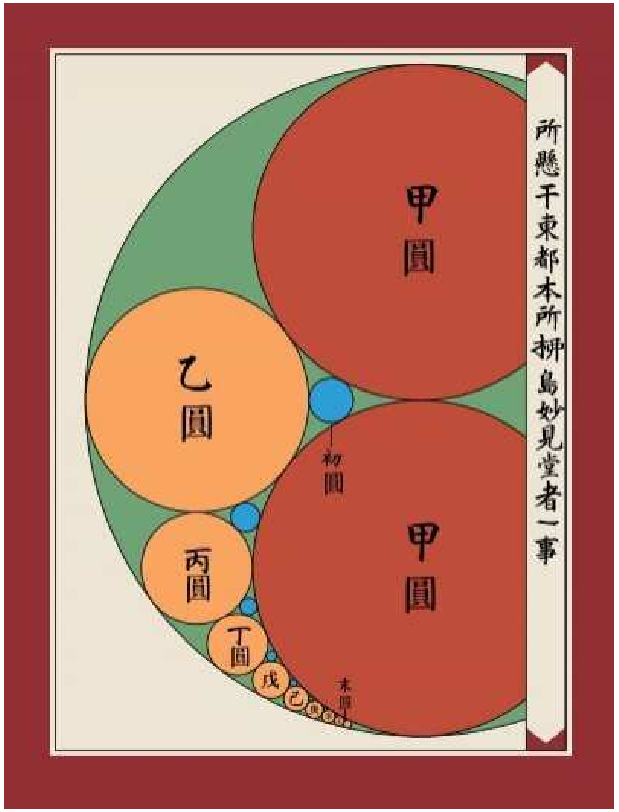
Figuras geométricas inscritas
Sangakus japoneses



Problem from the ¨Shinpeki Sanpo book (1789)

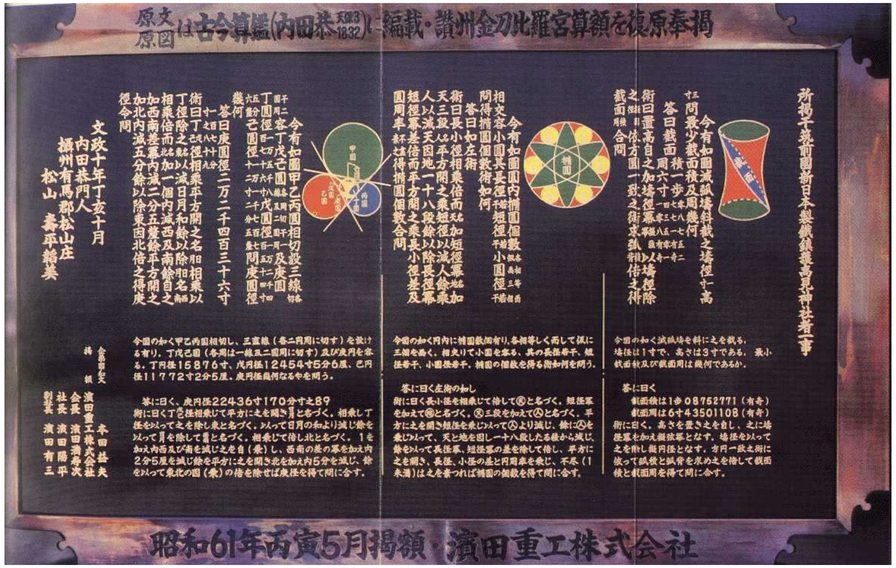
Josep Rochera
(IES Goya, profesor jubilado)

INTRODUCCIÓN

Históricamente, la Geometría era una de las partes que mejor se estudiaba de la matemática escolar pero, con el paso de los años, la renovación de los programas ha ido reduciendo su estudio cada vez más. En Secundaria se presentan los principales conceptos geométricos, entre los que se tratan brevemente los poliedros regulares y la esfera, con el cálculo de áreas y volúmenes de algunos cuerpos. En lo que sigue presentaremos varias formas de resolver problemas de figuras inscritas, en el plano y en el espacio, utilizando diversos métodos.

Curiosamente, éste fue un tema que se estudió bastante bien en el Japón de los siglos XVII a XIX, que de 1639 a 1854 se aisló del exterior. En esa época la matemática se desarrolló de forma independiente, como lo demuestran los sangakus, tablillas de madera grabadas con problemas geométricos que, a manera de exvotos, se colgaban bajo los techos de santuarios y templos.

Un sangaku es una tablilla matemática (de las palabras: *san* = matemática, y *gaku* = tablilla), que contiene problemas geométricos pintados sobre una tabla de madera, como:



Magnífica tabla con tres problemas y su explicación

En éstas sólo se ofrecían los resultados de una manera escueta, pero no las demostraciones de las mismas, sin especificar el autor o autores.

A partir de 1854, con la apertura forzada del país impuesta por los Estados Unidos, se crean diversas escuelas matemáticas por todo el país y la tradición de los Sangakus fue desapareciendo paulatinamente, hasta el punto que, en la década de los 70 del siglo XX, era desconocida incluso por los matemáticos del país. Desde los años 80 se fueron recogiendo y estudiando las tablas, retirándolas de los templos para preservarlas.

Para más información, consultar:

- https://www.centrojapones.es/wp-content/uploads/2021/03/Sangaku.pdf
  Interesante y sencilla presentación en español sobre los Sangakus. Muy recomendable.
- https://es.wikipedia.org/wiki/Sangaku
  Artículo con historia, ejemplos y enlaces sobre Sangakus.
- https://maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-japanese-temple-mathematics
  Algunos jemplos de Sangakus y traducción del texto de algún problema.
- https://sites.math.rutgers.edu/~sussmann/papers/res-japanese-temple-geometry.ps.gz
  El enlace descarga un archivo comprimido PostScript (artículo de **SCIENTIFIC AMERICAN**). Se descomprime con 7zip (p. ej.), que crea una carpeta con un archivo ps en su interior (doble clic para abrir).

En las páginas que siguen, veremos algunos ejemplos de sangakus relativamente sencillos que resolveremos con métodos diversos.

En general, para resolverlos se debe intentar reducir su dificultad simplificando las figuras, considerando triángulos formados por puntos notables de las figuras, o bien reduciendo un problema de geometría del espacio a uno del plano utilizando secciones de la figura (intersecciones de ésta con determinados planos) en las que aplicaremos herramientas que cononozcamos.

En cualquier caso, se requiere un mínimo de ingenio y algo de práctica para determinar qué triángulos o figuras geométricas debemos considerar.

PRELIMINARES

Para la resolución de los problemas de figuras inscritas utilizaremos herramientas matemáticas tan sencillas como semejanza de triángulos, teorema de Pitágoras, relaciones trigonométricas y utilización de la simetría. También se pueden usar otros métodos más potentes, como la inversión geométrica, que no veremos.

Debemos fijarnos especialmente en los centros de las circunferencias y polígonos (esferas y poliedros en el espacio) que aparezcan y en sus puntos de intersección con otras figuras. A veces resultará útil descomponer una figura en partes y recomponerla para obtener otra figura más sencilla de resolver.

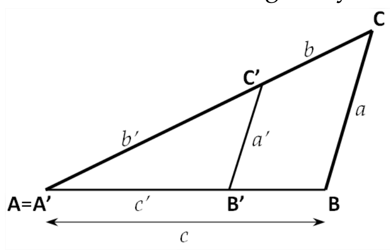
A continuación resumimos los resultados que utilizaremos sin detenernos a comentar nada más. Con letras mayúsculas se representará puntos y ángulos, mientras que para los lados y aristas se usarán minúsculas en cursiva.

P1 SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS. PROPORCIONALIDAD DE SUS LADOS

Dos triángulos ABC, A′B′C′ son semejantes si tienen los mismos ángulos y los lados son proporcionales dos a dos.

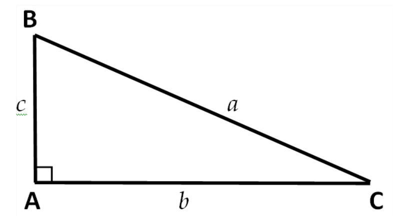
A=A′ B=B′ C=C′

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$



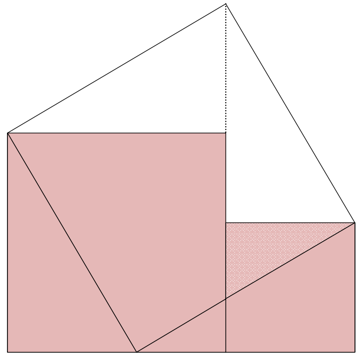
P2 TEOREMA DE PITÁGORAS

ABC es rectángulo en A sii $a^2 = b^2 + c^2$ (sii = "*si y sólo si*").



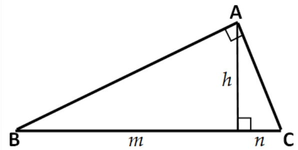
El teorema de Pitágoras se suele utilizar sólo para aplicar la igualdad, pero también se puede emplear para demostrar que un triángulo es rectángulo comprobando que sus lados verifican la relación.

Se conocen más de 300 demostraciones diferentes del teorema de Pitágoras. Una de las más conocidas y sencillas es:



Otras dos muy sencillas se pueden ver buscando *"juan bragado perigal"*.

P3 TEOREMA DE LA ALTURA



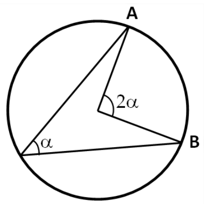
Si ABC es rectángulo en A, h =altura sobre la hipotenusa, y m, n segmentos en que la divide:

$$h = \sqrt{m \cdot n}$$

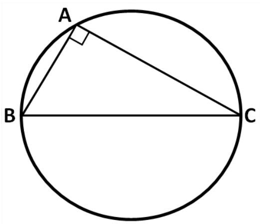
Aunque no es muy usual, en algunos casos su utilización simplifica bastante los cálculos.

P4 ÁNGULOS INSCRITO Y CENTRAL DE UN ARCO EN UNA CIRCUNFERENCIA

El ángulo inscrito es la mitad que el ángulo central.



P5 ÁNGULO INSCRITO DE UN DIÁMETRO



El ángulo inscrito que abarca un diámetro es recto (90°).

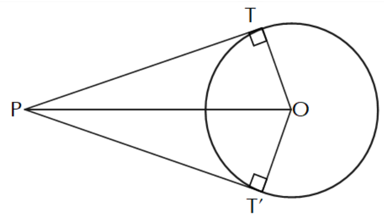
Este es un caso particular del anterior pero, por su importancia y utilidad, lo damos por separado.

P6 TANGENTE PERPENDICULAR AL RADIO DE UNA CIRCUNFERENCIA. ESFERAS

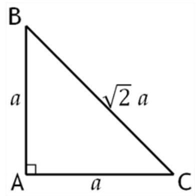
El radio de una circunferencia es perpendicular a la tangente en el punto de contacto.

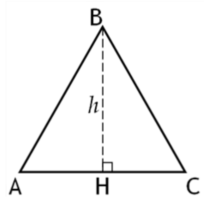
Si T es un punto de tangencia: $\widehat{PTO} = 90°$

Si PT′ es la otra tangente: $\overline{PT} = \overline{PT'}$ por ser los triángulos PTO y PT′O rectángulos con la misma hipotenusa y un cateto ($\overline{PT} = \overline{PT'} = r$)



Para esferas, el radio es perpendicular al plano tangente. Así, si dos esferas son tangentes (solo tienen un punto en común), su plano tangente es perpendicular a la línea que pasa por sus centros.





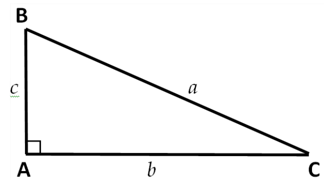
P7 TRIÁNGULOS RECTÁNGULO E ISÓSCELES, Y EQUILÁTERO

Con cierta frecuencia hay que calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos a , y la altura de un triángulo equilátero, por lo que conviene memorizar sus valores: $\sqrt{2}\,a$ y $\frac{\sqrt{3}}{2}\,a$.

P8 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Si ABC es rectángulo en A, se tiene que:

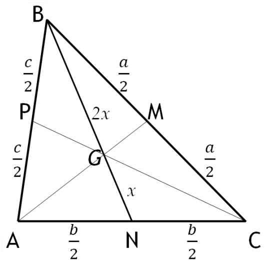
$$sen\ C = \frac{c}{a} \quad , \quad cos\ C = \frac{b}{a} \quad , \quad tan\ C = \frac{c}{b}$$



P9 BARICENTRO DE UN TRIÁNGULO

De cuando en cuando se utiliza la propiedad de que la distancia del baricentro a un vértice es el doble que al punto medio del lado opuesto. Así, si G es el baricentro de ABC y BN es una mediana:

$$\overline{BG} = 2\,\overline{GN}$$



P10 SIMETRÍA

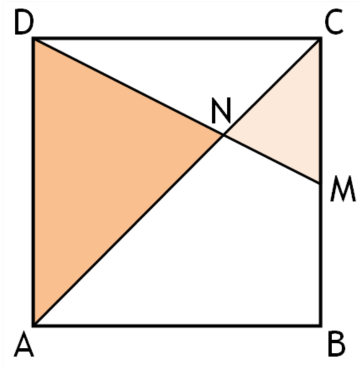
Conviene siempre buscar simetrías en las figuras, pues en caso de haberlas la solución puede ser (no siempre) bastante sencilla. Veremos un ejemplo más adelante.

Geometría del plano

Semejanza

1.1 Triángulos en un cuadrado (X Olimpiada Matemática Nacional 2º ESO, 1999)

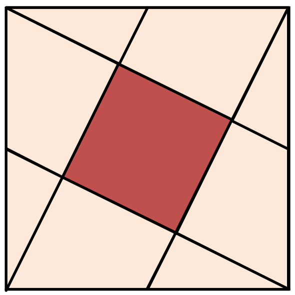
En el cuadrado ABCD de lado unidad se consideran AC y DM, donde M es el punto medio del lado BC.

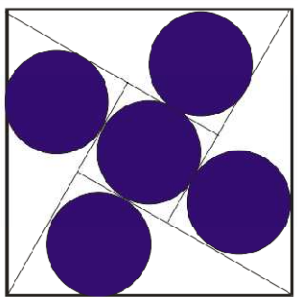


- Calcule la razón entre las superficies del cuadrilátero ABMN y el triángulo CDN.
- ¿Cuál sería la razón si M fuese el punto de BC tal que $\overline{BC} = 3\,\overline{BM}$?
- ¿Y si M cumpliese: $\overline{BC} = n\,\overline{BM}$?

1.2 Razón entre cuadrados

En un cuadrado se han trazado los segmentos que unen los vértices con los puntos medios de sus lados, formándose un cuadrado central (más oscuro), calcule la razón entre las áreas del cuadrado del centro con el total.



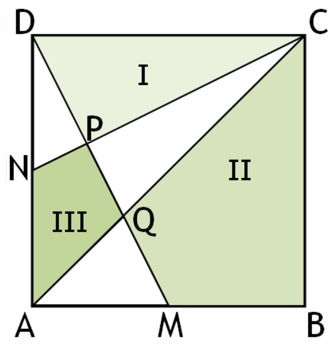


Sangaku "cinco círculos"

El dibujo de la derecha es un Sangaku, para resolverlo utilizar P6.

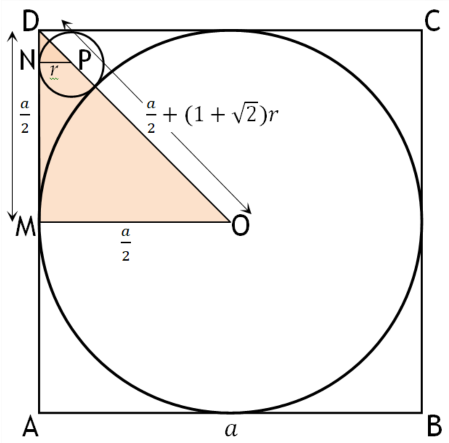
1.3 Regiones de un cuadrado (XIII Olimpiada Matemática Nacional 2º ESO, 2002)

En el cuadrado ABCD, M y N son los puntos medios de los lados AB y AD, y P, Q son las intersecciones de CN y AC con DM. Determine el área de las regiones sombreadas.



1.4 Dos circunferencias inscritas en un cuadrado

Se considera un cuadrado de lado a, halle el radio r de la circunferencia de la esquina en función de a.



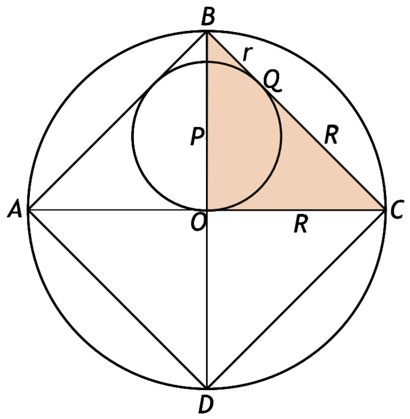
De DNP tenemos $DP = \sqrt{2}\, r$, y de DMO $DO = \sqrt{2}\,\frac{a}{2}$, por lo que:

$$\sqrt{2}\,\frac{a}{2} = \frac{a}{2} + \left(1+\sqrt{2}\right) r \qquad \text{y} \qquad r = \frac{(\sqrt{2}-1)}{2\,(1+\sqrt{2})}\,a$$

Teorema de Pitágoras

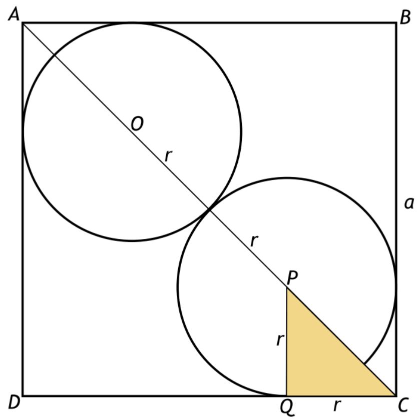
1.5 Cuadrado entre circunferencias

Halle la relación entre el radio de la circunferencia pequeña y el de la grande (ABCD es un cuadrado). Justifique los datos contenidos en la figura.



1.6 Dos circunferencias dentro de un cuadrado

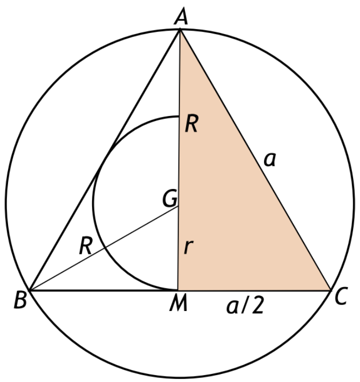
Inscribir en un cuadrado dos circunferencias del mismo radio que sean tangentes (EJERCICIO).



Propiedades del baricentro

1.7 Circunferencias inscrita y circunscrita a un triángulo equilátero

Relación entre los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita a un triángulo equilátero.



Por simetría, el centro de las circunferencias, G, es el baricentro de ABC, luego:

$$R = AG = 2\ AMB = 2\ r$$

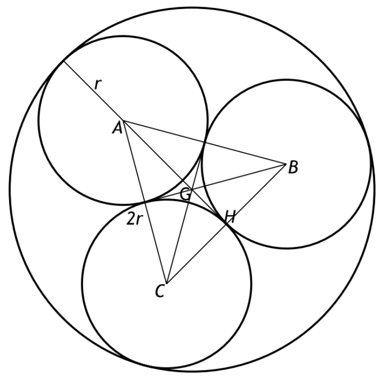
Además, de ACM: $h = AM = R+r = 3\ r$.

De aquí (altura de un triángulo equilátero y propiedad del baricentro):

$$r = \frac{h}{3} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a \quad \text{y} \quad R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

1.8 Tres circunferencias tangentes a una cuarta

Circunferencia circunscrita a tres circunferencias tangentes del mismo radio. (EJERCICIO).

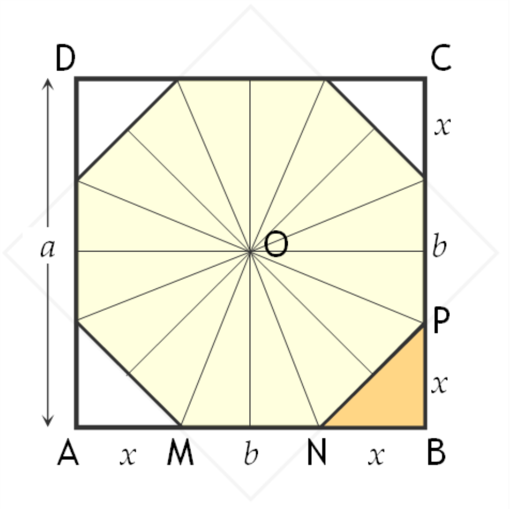


VARIABLES AUXILIARES

En muchas ocasiones la utilización de variables auxiliares simplifica los cálculos. Un ejemplo puede ser:

1.9 OCTÓGONO REGULAR INSCRITO EN UN CUADRADO

Lado y área del octógono regular inscrito en un cuadrado de lado a.



Sea b el lado del octógono y x (variable auxiliar) el cateto de los triángulos de las esquinas:

$$a = b + 2x \quad , \quad b = \sqrt{2}\,x$$

de donde: $a = b + 2 \cdot \frac{b}{\sqrt{2}} = \left(1+\sqrt{2}\right)b$

y: $b = \frac{a}{1+\sqrt{2}}$

El área del octógono es fácil de calcular por la diferencia:

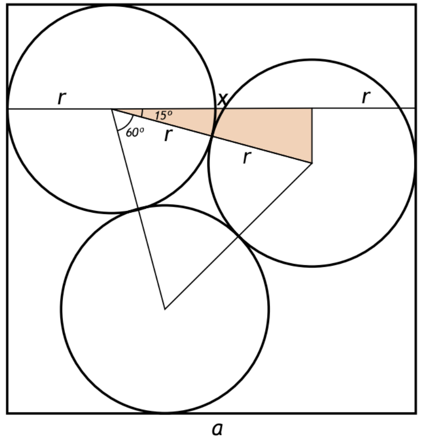
$$S_{octógono} = S_{ABCD} - 4S_{NBP}$$

Nota: Es muy fácil dibujar un octógono con dos cuadrados iguales, girando 45° uno de ellos.

TRIGONOMETRÍA

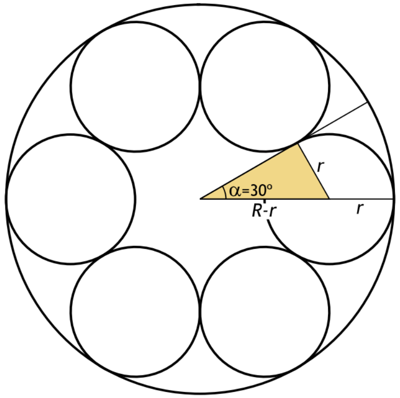
1.10 TRES CIRCUNFERENCIAS INSCRITAS EN UN CUADRADO

Inscribir tres circunferencias del mismo radio r en un cuadrado de lado a.



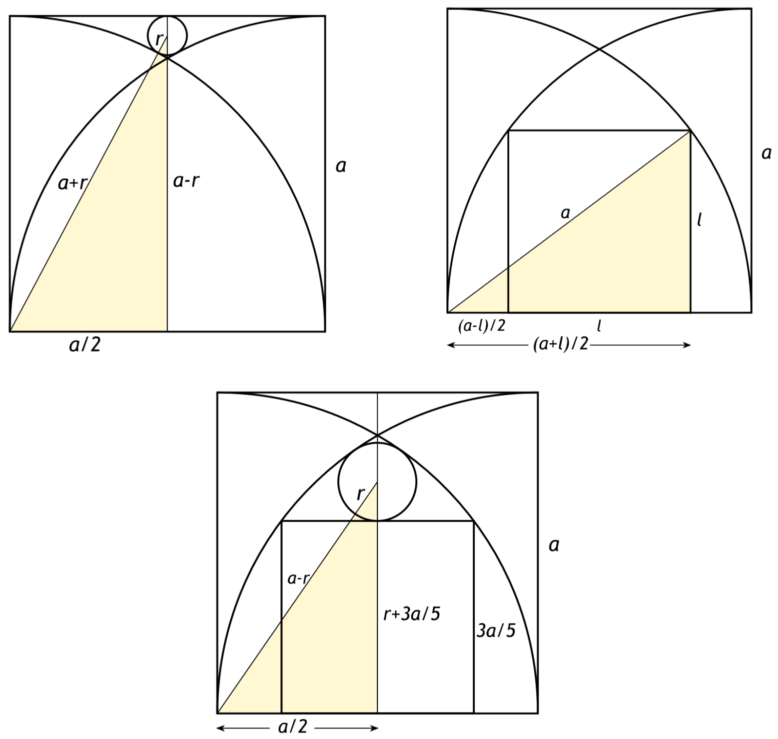
1.11 CIRCUNFERENCIAS TANGENTES ENTRE SÍ E INSCRITAS EN OTRA

Radio r de seis circunferencias tangentes entre sí e inscritas en otra de radio R.

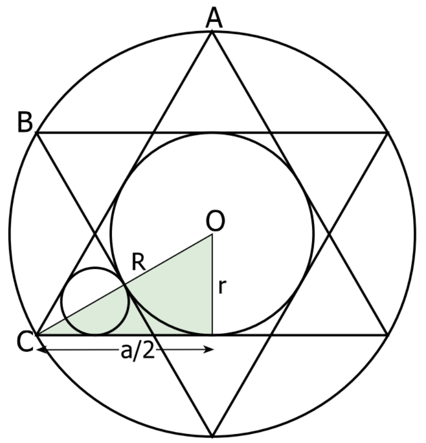


Generalizar al caso de n circunferencias interiores.

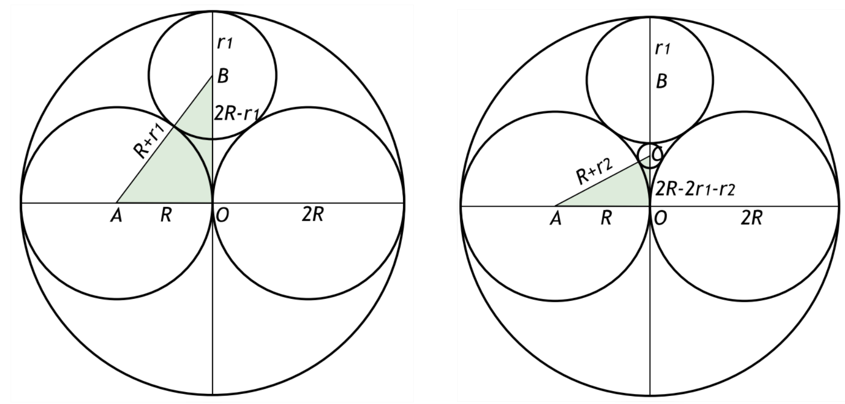
1.12 Cuadrados y circunferencias inscritos



1.13 Circunferencias inscritas en una estrella pitagórica

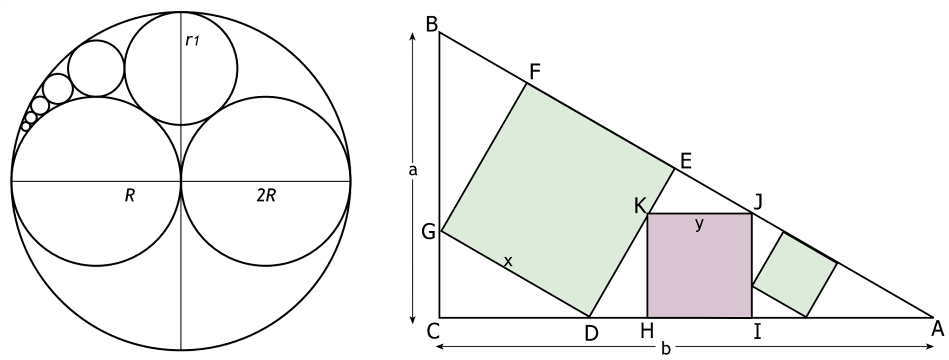


1.14 Circunferencias inscritas en otra



1.15 Sucesión de figuras inscritas

La continuación del ejercicio anterior da lugar a una sucesión infinita de circunferencias inscritas, que es un famoso Sangaku (ver la imagen de la portada). La resolución de este problema es bastante más compleja y requiere la utilización del concepto de inversión geométrica.

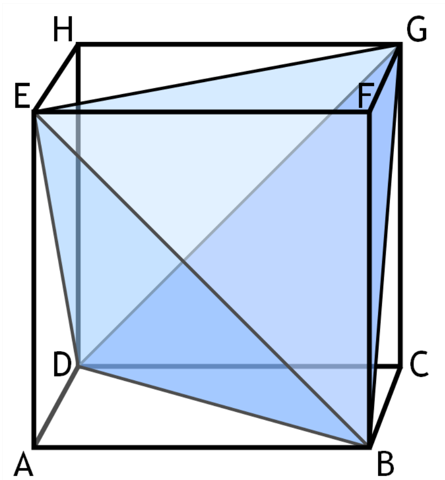


Otro problema mucho menos complejo es el de una sucesión de cuadrados inscritos en un triángulo rectángulo. Para resolverlo, fijémonos que los triángulos ABC, ADE, AIJ,… son todos ellos semejantes, por lo que se aplica la semejanza de triángulos.

2. Geometría del espacio

2.1 TETRAEDRO REGULAR INSCRITO EN UN CUBO

Arista, área total y volumen de un tetraedro regular inscrito en un cubo de arista a.



Sin observar la figura puede tenderse a pensar que la base del tetraedro está en la del cubo, y que el vértice superior es el centro de la cara superior del cubo, pero en ese caso el tetraedro no sería regular, al no ser todas sus aristas iguales, ni sus caras triángulos equiláteros.

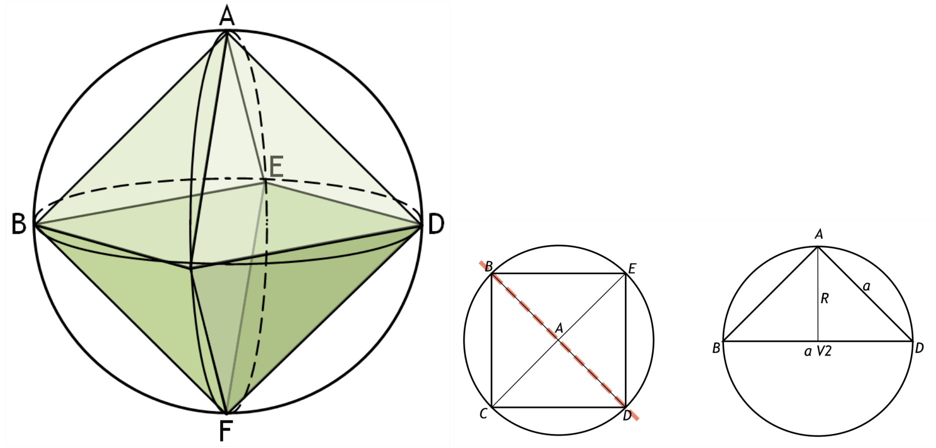
Cuando nos damos cuenta de que las aristas del tetraedro pedido son las diagonales de las caras del cubo, la solución es sencilla considerando los triángulos equiláteros de cada cara. La arista del tetraedro es: $b = a\sqrt{2}$.

El área: $S_{total} = 4\frac{b\cdot h}{2} = 2bh = 2a\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}a = 2\sqrt{3}\,a^2$

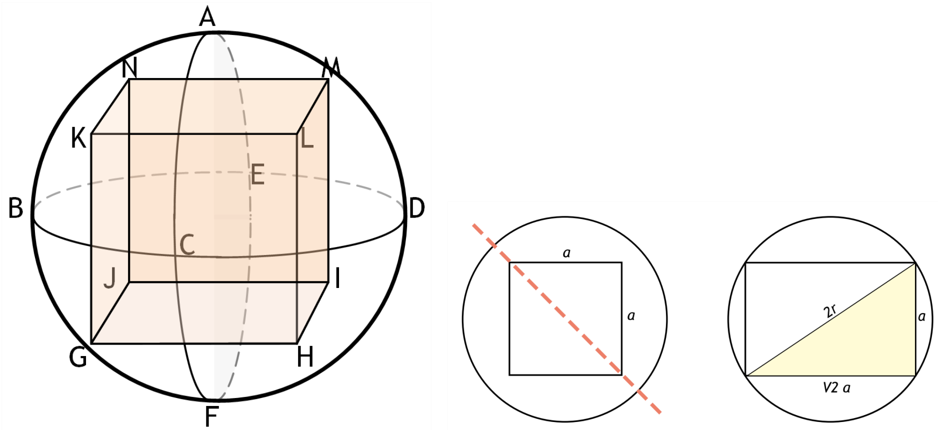
Y el volumen: $V_{tetraedro} = V_{cubo} - 4\,V_{pirámide\ esquina} = a^3 - 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot a = \frac{1}{3}\,a^3$

El cénit de un lugar es el punto intersección de la vertical que pasa por encima de la cabeza del observador, con la esfera celeste. Para resolver problemas de geometría del espacio, conviene considerar la visión que se tendría de la figura vista desde el cénit para, a continuación, levantar el alzado (corte de la figura con un plano vertical) por la línea que más nos interese. Se entenderá bien con unos ejemplos.

2.2 OCTAEDRO INSCRITO EN UNA ESFERA

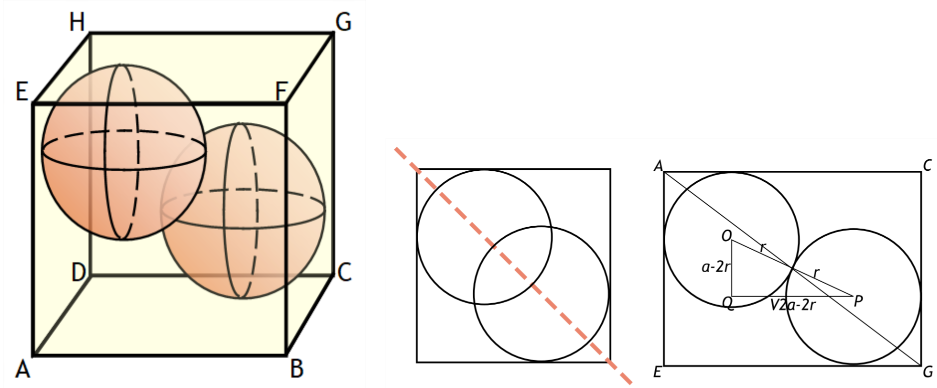


2.3 CUBO INSCRITO EN UNA ESFERA



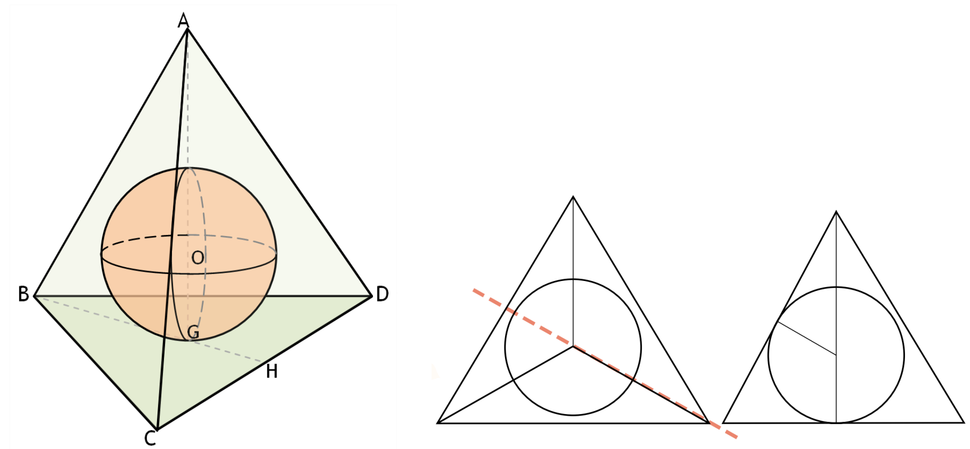
2.4 Dos esferas inscritas en un cubo

Radio de dos esferas del mismo radio, tangentes exteriores, e inscritas en un cubo.



2.5 Esfera inscrita en tetraedro regular

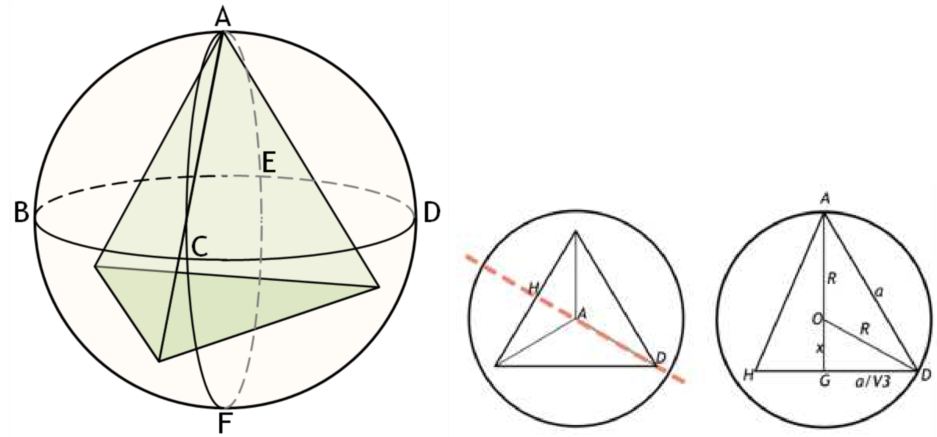
Esfera inscrita en un tetraedro regular de arista a.



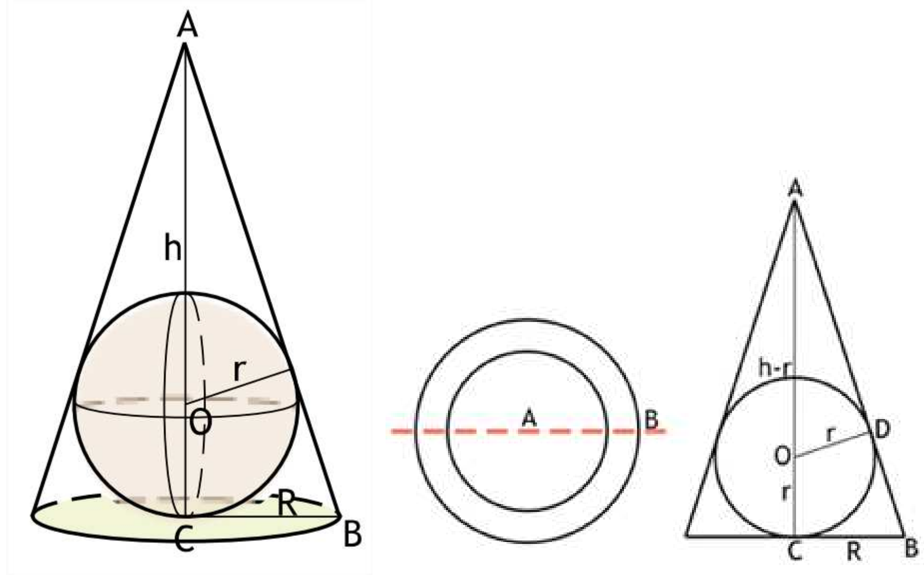
Fijémonos que el triángulo del alzado no es equilátero, pues un lado es una arista, mientras que los otros dos son medianas de las caras.

2.6 Tetraedro regular inscrito en esfera

Tetraedro regular de arista a inscrito en una esfera de radio R.

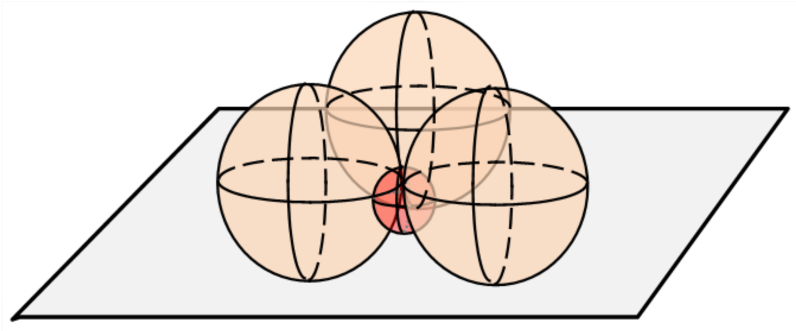


2.7 Esfera inscrita en un cono

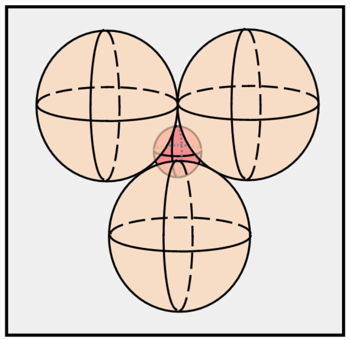


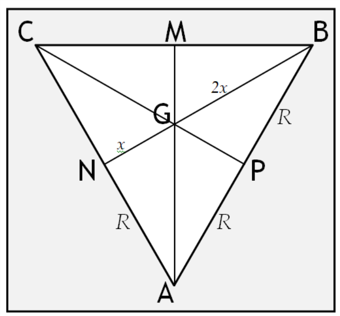
2.8 CUATRO ESFERAS TANGENTES SOBRE UN PLANO

Sobre una mesa hay tres esferas del mismo radio R y tangentes entre sí. En el hueco que determinan con la mesa, está inscrita una pequeño esfera tangente a las tres anteriores y con radio r. Halle r en función de R.



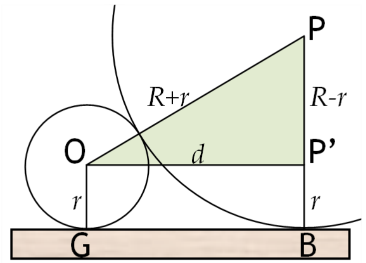
La vista cenital sería:





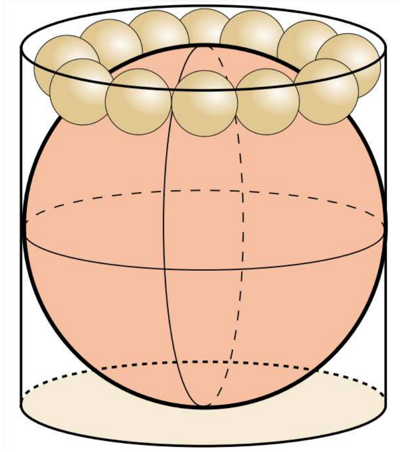
Donde A, B y C son los centros de las tres esferas de radio R.

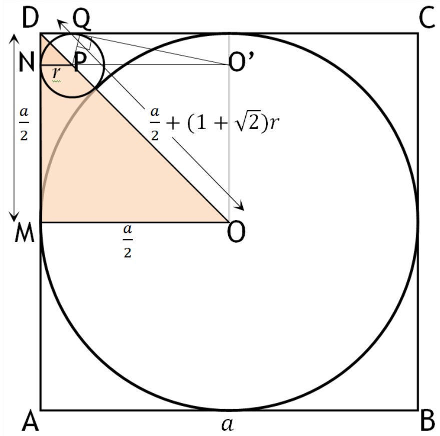
La vista del alzado a lo largo de GB es:



2.9 ESFERA INSCRITA EN UN CILINDRO CON BOLAS

Un cilindro está circunscrito a una esfera, en el espacio superior se inscriben unas bolas del mismo tamaño. Determine el radio de éstas y cuántas se podrán poner. ¿Son todas ellas tangentes entre sí?





Por el problema **1.4**: $r = \frac{\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})} a$.

En el triángulo O'PQ : $\operatorname{sen} 0' = \frac{r}{\frac{a}{2}-r}$, lo que da un valor para el ángulo (doble del calculado) bajo el que se ve una bola de 23'91° , con lo que caben 360°/23'91 = 15'05 bolas, por lo que sólo puede haber 15 bolas y no pueden ser todas tangentes entre sí.