RALLYEMATHÉMATIQUE SANS FRONTIÈRES

SOLUCIONES

PRUEBA

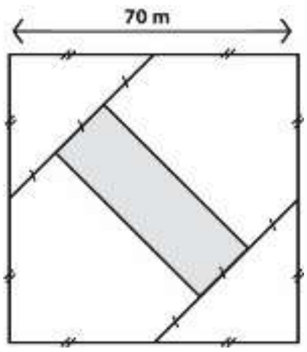
2010

1- Cifras y un número

a) Si el número tuviera una cifra su suma máxima sería 9
   Si el número tuviera dos cifras su suma máxima sería 9+9=18 (número 99)
   Si el número tuviera tres cifras su suma máxima sería 9+9+9=27 (más de 24) por lo que el número menor tendrá tres cifras.
   El número más pequeño de tres cifras se obtendrá con el menor dígito en la cifra de las centenas pero que nos permita obtener la suma 24.
   Si en la cifra de las unidades y decenas ponemos 9, en las centenas tendremos un 6 para obtener 24 (6+9+9=24)
   Por tanto, **el número menor es 699**

a) Para obtener el número mayor necesitamos el mayor dígito en la cifra de la izquierda. Podemos poner máximo de dos nueves porque con un tercero superaríamos 24. (numero 99- - -) Por otro lado, en las posiciones de la derecha el menor valor es el 0 (número 99-00) En la posición intermedia necesitaremos un 6 para obtener la suma 24.
   Por tanto**, el número mayor es 99600**

2 – La piscina



Observamos que los dos triángulos rectángulos que se obtienen en la parte superior izquierda e inferior derecha son isósceles midiendo sus lados iguales 35 m (mitad del lado del cuadrado)

También podemos observar que los lados pequeños del rectángulo gris miden un tercio de la hipotenusa de los triángulos que acabamos de nombrar y que los lados largos miden lo mismo que la hipotenusa.

Calculamos primero la hipotenusa del triángulo rectángulo por Pitágoras:

$$\sqrt{35^2 + 35^2} = 35\sqrt{2}$$

Las dimensiones serán:

Largura del rectángulo

$$\boldsymbol{\sqrt{35^2 + 35^2} = 35\sqrt{2} \approx 49,497\ m}$$

Anchura del rectángulo

$$\frac{\sqrt{35^2+35^2}}{3}=\frac{35\sqrt{2}}{3}\approx 16,499\ m$$

3 – À la recherche de trois notes / In search of the three marks

Si llamamos A a la nota de Arthur, B a la nota de Bernard y C Camille tenemos:

$$B \ < \ C \ < \ C+3=\mathrm{A}$$
$$B+C+(C+3)=38$$

De donde

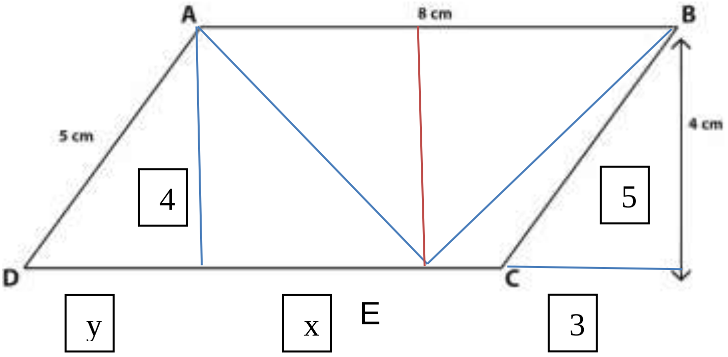
$$2C+B=35\ <3C$$

De la desigualdad se obtiene $C>\frac{35}{3}=11{,}67$ Por tanto, el menor valor posible de C es12 y B>10 según el enunciado, luego el valor de B será a partir de 11.
Si C fuera 12, B debería ser 11 y A=C+3 sería 15.
En este caso la suma de los tres sería 11+12+15=38 que es lo que buscábamos.
Los otros casos superarían esa suma.

La solución es:

A=15 (nota de Arthur)
B=11 (nota de Bernard)
C=12 (nota de Camille)

4 – En busca del punto perdido



Por Pitágoras: $y = \sqrt{25-16} = 3$

Al ser un paralelogramo tenemos un triángulo rectángulo a la derecha igual que el de lados 5, 4 y 3.

El triángulo AEB es isósceles al ser la condición AE=EB. Su altura (en rojo en el dibujo) cae en la mitad de la base AB que mide 8, luego la altura divide en dos segmentos de medida 4. De ahí obtenemos :

$$x = 4$$

Así, la distancia pedida es $DE = y + x = 3 + 4 = \mathbf{7\ cm}$

Tomamos uno cualquiera de los triángulos rectángulos obtenidos a partir de AEB de catetos h=4 y x=4 y aplicando Pitágoras:

$$AE = EB = \sqrt{16+16} = \mathbf{4\sqrt{2}\ cm} \approx \mathbf{5{,}66\ cm}$$

5 – A cada cual su sitio

a) Como los números son del 1 al 9 sin repetir, la suma pedida es :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 9 = \frac{1+9}{2} \cdot 9 = \mathbf{45}$$

b) Como la suma de todas las filas y columnas ha de ser la misma y hay 3 de cada,

Cada fila o columna sumará $\frac{45}{3} = 15$

La suma de la diagonal será por tanto 15:

$x + (2x+1) + (2x+4) = 15$ de donde $\boldsymbol{x = 2}$

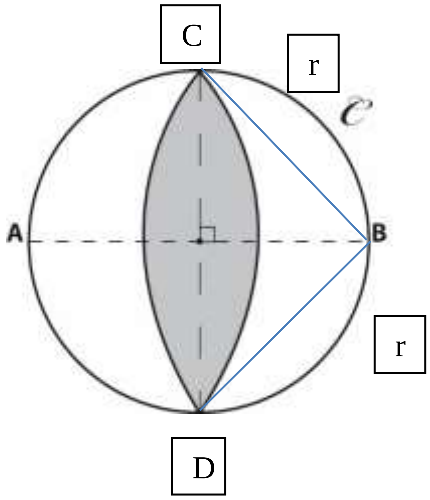
La diagonal será 2,5 y 8. En el centro estará 5 y los números a un lado y otro de 5 eb vertical, horizontal o diagonal deberán sumar 10 para que la suma de cada línea sea 15.

Los cuadrados mágicos son:

4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

6	**7**	**2**
1	**5**	**9**
8	**3**	**4**

6- El ojo del tigre



El ángulo CBD es recto al abarcar un diámetro.

El radio de la circunferencia será $\frac{3}{2}$

Aplicando Pitágoras:

$$r^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

De donde, $r = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

El área del sector circular CBD es la cuarta parte del área del círculo con centro en B y radio r:

$$S_{CBD} = \frac{1}{4}\pi \cdot r^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}\pi$$

Por otro lado el área del triángulo de vértices CBD es:

$$S_{Triángulo} = \frac{1}{2}r \cdot r = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Por tanto, la mitad de la zona gris es:

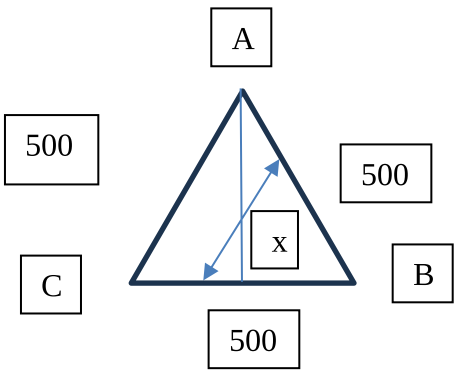
$$S_{CBD} - S_{Triángulo} = \frac{9}{8}\pi - \frac{9}{4} = \frac{9}{8}(\pi - 2)$$

La zona gris es el doble da la obtenida:

$$2 \cdot \frac{9}{8}(\pi - 2) = \boldsymbol{\frac{9}{4}(\pi - 2)} \approx \boldsymbol{2,57\ cm^2}$$

Especial Tercero de ESO

7– La herencia



Llamamos x a la longitud de la valla que es el lado del triángulo pequeño

La altura del terreno triangular se obtiene por Pitágoras:

$$h = \sqrt{500^2 - \left(\frac{500}{2}\right)^2} = \sqrt{500^2 - 250^2} = 500\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 250\sqrt{3}$$

El área del terreno total será:

$$S_{ABC} = \frac{500 \cdot 250\sqrt{3}}{2}$$

Como ha de dividirse en dos mitades, el triángulo obtenido al trazar la divisoria deberá tener la mitad del área del total:

$$\frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{500 \cdot 250\sqrt{3}}{2} = \frac{250^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Los dos triángulos son semejantes por ser la valla paralela. Por tanto, ambos son equiláteros.

El área del triángulo pequeño en función del valor del lado x es:

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

Igualando ambos resultados:

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{250^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Es decir, la valla x medirá:

$$x^2 = 2 \cdot 250^2$$

$$x = \mathbf{250 \cdot \sqrt{2} \approx 353{,}55\ m}$$

8 - 2010

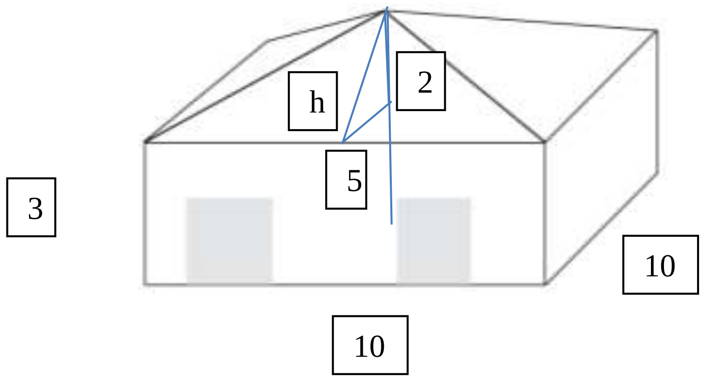
10 ^{2010} – 2010:

$$\begin{array}{r} 1\,0\,0\,0 \cdots\cdots\cdots 0\,0\,0\,0\,0 \\ -\quad 2\,0\,1\,0 \\ \hline 09\,9\,9\,........\;9\,7\,9\,9\,0 \end{array}$$

Las cifras son: 2010-2 nueves, un siete y un cero. La suma será:

$$9 \cdot 2008 + 7 = 18079$$

7. – Echar las tejas



La altura del tejado es $5 - 3 = 2\ m$

El tejado es una pirámide cuadrangular de altura 2 m y base 10 m. Nos interesa la altura h de uno de los cuatro triángulos isósceles que constituyen el tejado. Aplicamos Pitágoras al triángulo rectángulo de altura 2, base 5 (la mitad del lado de la base cuadrada) e hipotenusa h, la altura del triángulo isósceles:

$$h^2 = 5^2 + 2^2$$

$$h = \sqrt{29}$$

El área de uno de los triángulos que forman el tejado será

$$S_{Triángulo} = \frac{10 \cdot \sqrt{29}}{2} = 5\sqrt{29}$$

El área total del tejado será la de los cuatro triángulos:

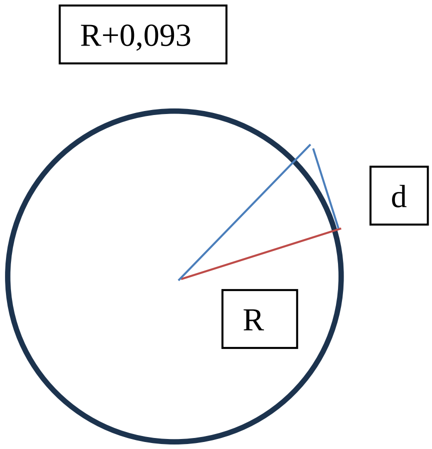
$$4 \cdot 5 \cdot \sqrt{29} = 20 \cdot \sqrt{29} \approx 107{,}7033\ m^2$$

Para obtener el número de tejas necesario:

$$13 \cdot 20 \cdot \sqrt{29} \approx 1400{,}14$$

Luego **se necesitan 1401 tejas**

8– Travesía del Atlántico…¡pero a remo!



Se forma un triángulo rectángulo entre el radio de la Tierra, el radio de la Tierra más la antorcha de la estatua de la libertad y la distancia:

$$d = \sqrt{(R + 0{,}093)^2 - R^2} = \sqrt{6378{,}093^2 - 6378^2} \approx \mathbf{34{,}443\ km}$$