Viernes, 15 de diciembre de 2023

Problema 1. Si $\boldsymbol{x, y, z, t, a, b}$ son enteros positivos tales que $\boldsymbol{xt - yz = 1}$ y $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} > \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} > \frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{t}}$, demuestra que $\boldsymbol{ab} \geq (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{t})$.

Problema 2. Halla todos los enteros positivos $\boldsymbol{n}$ tales que $\boldsymbol{n^{10} + n^5 + 1}$ es un número primo.

Problema 3. En un Torneo Poligonal de Matemáticas, el profesor planteó 9 problemas fáciles y 6 difíciles. Se sabe que todos los alumnos participantes resolvieron bien 14 de los 15 problemas. Para cada pareja de problemas fácil-difícil, se registró el número total de participantes que resolvieron ambos problemas, y la suma de todos estos registros fue de 459. ¿Cuántos participantes hubo en dicha edición del Torneo Poligonal?

Problema 4. Sean $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$ dos circunferencias tangentes en un punto $\mathbf{A}$ con $\mathbf{C_1}$ en el interior de $\mathbf{C_2}$. Una recta $\mathbf{r}$ que no pasa por $\mathbf{A}$ es tangente a $\mathbf{C_1}$ en el punto $\mathbf{B}$, y corta a $\mathbf{C_2}$ en los puntos $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$. Y, finalmente, sea $\mathbf{E} \neq \mathbf{A}$ el segundo punto de intersección de la recta $\mathbf{AB}$ con la circunferencia $\mathbf{C_2}$. Demuestra que $\mathbf{EC} = \mathbf{ED}$.

Problema 5. ¿Cuántas 6-tuplas de enteros positivos $(\boldsymbol{a, b, c, d, e, p})$ existen tales que $\boldsymbol{2^a + 2^b + 2^c + 2^d + 2^e = 2023^p}$ y $\boldsymbol{p}$ es primo?

Problema 6. Halla todas las ternas de enteros positivos $(\boldsymbol{x, y, p})$ tales que $\boldsymbol{p}$ es primo, $\boldsymbol{p = 1 + x^2}$ y $\boldsymbol{2p^2 = 1 + y^2}$.