Capítulo 8 – Problemas

Problema 8.1. Sea ABC un triángulo rectángulo con $\angle C = 90°$ y sean X e Y puntos en el interior de $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$, respectivamente. Construimos cuatro circunferencias que pasan por C, de centros A, B, X, Y. Demuestra que los cuatro puntos que yacen sobre exactamente dos de estas cuatro circunferencias son cocíclicos. (Véase la figura 8A.)

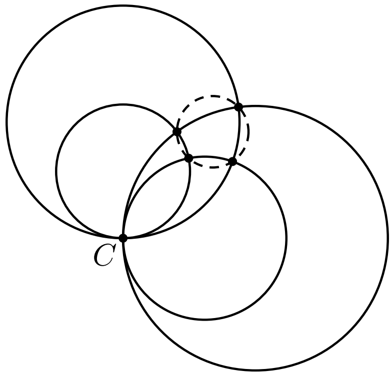

Figura 8A. Los cuatro puntos de intersección son cocíclicos (circunferencia discontinua).

Problema 8.2. Sean ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 circunferencias tangentes consecutivas en A, B, C, D, como se muestra en la figura 8B. Demuestra que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico.

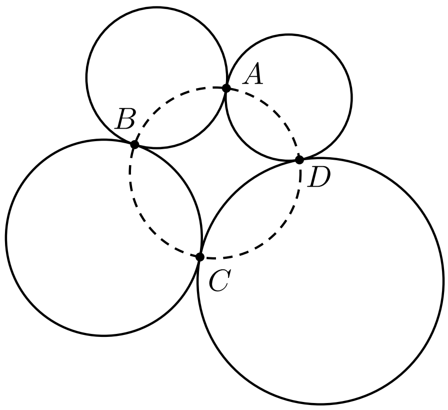

Figura 8B. ¿Hay alguna conexión entre esto y el teorema 2.25?

Problema 8.3. Sean A, B, C tres puntos colineales y P un punto que no pertenece a esta recta. Demuestra que los circuncentros de $\triangle PAB$, $\triangle PBC$ y $\triangle PCA$ yacen sobre una circunferencia que pasa por P.

Problema 8.4 (BAMO 2008/4). Un punto D yace en el interior del triángulo ABC. Sean A_1, B_1, C_1 los segundos puntos de intersección de las rectas AD, BD y CD con las circunferencias circunscritas de BDC, CDA y ADB, respectivamente. Demuestra que

$$\frac{AD}{AA_1} + \frac{BD}{BB_1} + \frac{CD}{CC_1} = 1.$$

Problema 8.5 (Olimpiada Iraní 1996). Considera una semicircunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$. Una recta corta a la recta AB en M y a la semicircunferencia en C y D de modo que $MC > MD$ y $MB < MA$. Supongamos que (AOC) y (BOD) se cortan en un punto K distinto de O. Demuestra que $\angle MKO = 90°$.

Problema 8.6 (Lista corta 2003/G4). Sean Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 circunferencias distintas tales que Γ_1, Γ_3 son tangentes exteriores en P, y Γ_2, Γ_4 son tangentes exteriores en el mismo punto P. Supongamos que Γ_1 y Γ_2, Γ_2 y Γ_3, Γ_3 y Γ_4, Γ_4 y Γ_1 se cortan en A, B, C, D, respectivamente, y que todos esos puntos son distintos de P. Demuestra que

$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}.$$

Problema 8.7. Sea ABC un triángulo con incentro I y circuncentro O. Demuestra que la recta IO pasa por el baricentro G_1 del triángulo de contacto.

Problema 8.8 (NIMO 2014). Sea ABC un triángulo y sea Q un punto tal que $\overline{AB} \perp \overline{QB}$ y $\overline{AC} \perp \overline{QC}$. Una circunferencia de centro I se inscribe en $\triangle ABC$ y es tangente a $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ en los puntos D, E y F, respectivamente. Si la semirrecta QI corta a $\overline{EF}$ en P, demuestra que $\overline{DP} \perp \overline{EF}$.

Problema 8.9 (EGMO 2013/5). Sea Ω la circunferencia circunscrita del triángulo ABC. La circunferencia ω es tangente a los lados AC y BC, y es tangente interior a la circunferencia Ω en el punto P. Una recta paralela a AB que corta el interior del triángulo ABC es tangente a ω en Q. Demuestra que $\angle ACP = \angle QCB$.

Problema 8.10 (Olimpiada rusa 2009). En el triángulo ABC con circunferencia circunscrita Ω, la bisectriz interior de $\angle A$ corta a $\overline{BC}$ en D y de nuevo a Ω en E. La circunferencia de diámetro $\overline{DE}$ corta de nuevo a Ω en F. Demuestra que $\overline{AF}$ es una simediana del triángulo ABC.

Problema 8.11 (Lista corta 1997). Sea $A_1A_2A_3$ un triángulo no isósceles con incentro I. Sea C_i, $i = 1, 2, 3$, la circunferencia menor que pasa por I tangente a A_iA_{i+1} y A_iA_{i+2} (los índices se toman mód 3). Sea B_i, $i = 1, 2, 3$, el segundo punto de intersección entre C_{i+1} y C_{i+2}. Demuestra que los circuncentros de los triángulos A_1B_1I, A_2B_2I, A_3B_3I son colineales.

Problema 8.12 (IMO 1993/2). Sean A, B, C, D cuatro puntos distintos del plano, con C y D sobre el mismo lado de la recta AB, tales que $AC \cdot BD = AD \cdot BC$ y $\angle ADB = 90° + \angle ACB$. Halla la razón $\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$ y demuestra que las circunferencias circunscritas de los triángulos ACD y BCD son ortogonales.

Problema 8.13 (IMO 1996/2). Sea P un punto en el interior de un triángulo ABC tal que

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$

Sean D, E los incentros de los triángulos APB, APC, respectivamente. Demuestra que las rectas AP, BD, CE son concurrentes.

Problema 8.14 (IMO 2015/3). Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB > AC$. Sea Γ su circunferencia circunscrita, H su ortocentro y F el pie de la altura desde A. Sea M el punto medio de $\overline{BC}$. Sea Q el punto sobre Γ tal que $\angle HQA = 90°$ y sea K el punto sobre Γ tal que $\angle HKQ = 90°$. Supongamos que los puntos A, B, C, K y Q son todos distintos y yacen sobre Γ en ese orden. Demuestra que las circunferencias circunscritas de los triángulos KQH y FKM son tangentes entre sí.

Problema 8.15 (Lista corta ELMO 2013). Sean ω_1 y ω_2 dos circunferencias ortogonales, y sea O el centro de ω_1. El diámetro $\overline{AB}$ de ω_1 se escoge de modo que B yazca estrictamente en el interior de ω_2. Las dos circunferencias tangentes a ω_2 que pasan tanto por O como por A tocan a ω_2 en F y G. Demuestra que el cuadrilátero $FOGB$ es cíclico.