

Algunas veces, en Matemáticas, y en otras disciplinas, nos encontramos con situaciones, con problemas, en los que la intuición no coincide con el resultado de un razonamiento riguroso. Es claro que la intuición es muy importante en investigación, en resolución de problemas, pero, a veces, intuición y razón no armonizan, incluso, están en las antípodas y ese contraste nos produce un chasquido en la mente, un chasquido agradable, que nos confirma que la ciencia no tiene solo una cara, que la ciencia es poliédrica.

Te voy a contar algunas situaciones en las que ocurre esto.

[Antes de nada: X escribirá en un papel NO, algo que ocurrirá o no a lo largo de la charla. Si ocurre y X escribe SÍ, gana X; si no ocurre y X escribe NO, gana. En otro caso, pierde]

## **1. Extraña repartición**

Dos individuos, Abdul [A] y Beremín [B] se dirigen por el desierto a Bagdag montados en sendos camellos. Se encuentran, caído [C] y maltrecho en las arenas del desierto ardientes, a un hombre al que han robado comida, dinero y camello. Solidariamente A y B lo curan y lo invitan a que se una a ellos hacia Bagdag.

Han de compartir la comida. A lleva 5 panes, B, 3. Estos 8 panes, repartidos entre los tres viajeros, deberán durar para llegar a Bagdag.

Una vez en Bagdag, C les declara que es califa. En forma de agradecimiento va a su casa y vuelve con 8 monedas de oro. "Toma, Abdul, 5 monedas, puesto que tú pusiste 5 panes, y para ti, Beremín, 3. Que Alá os proteja".

Pero Abdul no está de acuerdo con esta repartición.

*¿Cuál te parece a ti la repartición justa?*

## **2. La partida interrumpida**

Javier [J] y Tomasa [T] son dos jugadores empedernidos. Van a jugar a la carta más alta. Pondrán cada uno 4.000 euros. El que antes llegue a 6

partidas ganadas, se llevará todo (8.000 euros). Cuando T lleva ganadas 5 partidas y J 3, llega la policía y la partida queda interrumpida. En el reencuentro, van a repartirse los 8.000 euros en función de lo que en ese momento cada uno llevaba ganado. J (3 partidas ganadas) propone: "Puesto que tú ganaste 5 partidas y yo 3, siendo que hay que repartir 8.000 euros, lo justo parece 5.000 euros para ti y 3.000 para mí".

Pero Tomasa no está de acuerdo.

*¿Cuál te parece a ti la repartición justa?*

## **P2. La paradoja de los monederos.**

En un grupo de desconocidos el conferenciante saca al azar a dos personas, Antonio y Blanca. Les propone el siguiente juego: "A lleva en su monedero X euros y Blanca tiene Y euros. Abrimos los monederos: si X es menor que Y, A gana lo de B. Y, al revés, si Y es menor que X, Y se lleva lo de A.

A razona: "En principio, tengo un 50% de probabilidades de ganar y otras tantas de perder. Por tanto, tengo un 50% de ganar más de lo que puedo perder. Juego.

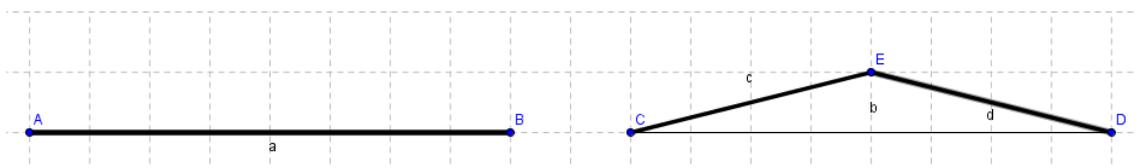
Lo curioso es que B razona de la misma manera.

*¿¿¿???*

## **3. La viga dilatada**

Imaginemos una vía de un tren continua (en realidad no lo son) abandonada. Mide 1 km (1.000 m) y es un segmento recto. Los extremos de la vía tienen dos topes muy potentes; esto es, la vía está "anclada".

Un día de mucho calor (muchísimo calor) la vía se dilata. Se dilata 1 m. Como la vía está anclada se rompe y, como es homogénea, se parte por la mitad:



[Es claro que el dibujo no está hecho a escala]

*Sin echar las cuentas (el problema es muy fácil), apelando a tu intuición, escribe cuál te parece que mide la altura en el centro, b.*

*Luego, haz las cuentas y sorpréndete.*

### **3bis. Doblando una hoja de papel**

*¿Qué grosor tiene una hoja de papel de 0,14 mm de grosor si la doblamos 50 veces?*

## **4. Detección del cáncer: ¿Pruebas válidas?**

Este es un caso real. El caso ocurre en un hospital de Estados Unidos.

Supongamos que un millón de personas se somete a las pruebas para detectar un determinado cáncer y que la prevalencia de esa enfermedad en la población en la que se aplica la prueba es de un 0,4% (2 por cada 500). Es decir, suponemos que, aproximadamente, habrá unas 4.000 personas enfermas en ese millón. Supongamos también que esa prueba da falsos positivos en un 1% de los casos; esto es, 1% de las personas sanas dará positivo (te dejo para ti la reflexión de los corolarios psicológicos y físicos que el paciente sano puede llegar a sufrir). Por fin, pongamos también que esta prueba arroja un porcentaje del 0,5% de falsos negativos.

Una persona da positivo en la prueba.

*¿Cuál crees que es la probabilidad de que esa persona tenga realmente la enfermedad?*

### **P1. El examen sorpresa**

Este año hay clase de Matemáticas todos los días de la semana. La profesora de Matemáticas, que nunca miente, el viernes anuncia lo siguiente: "Un día de la semana siguiente habrá examen de sucesiones. Y será por sorpresa".

Esta afirmación deja un poco desconcertados a los alumnos.

En el recreo, Zenón, un alumno muy despierto, razona así con algunos compañeros:

"El viernes no puede ser, porque en ese caso, el jueves por la tarde ya sabríamos seguro que sería el viernes y no sería por sorpresa. Así que nos

quedamos con jueves, miércoles, martes o lunes. Pero, por la misma razón, hay descartar el jueves, y, así, con todos los demás. No puede ser".

Llega la semana siguiente. El martes la profesora dice: "Sacad una hoja". Y les pone un examen y es por sorpresa.

## 5. El cazador, su caseta y el oso

Un cazador tiene una caseta [solo una caseta]. Un día sale de casa. Camina 10 km al Sur. Se para. Camina 10 km al Este. Se para. Camina 10 km al Norte y se encuentra en su caseta, donde encuentra a un oso.

*¿De qué color es el oso?*

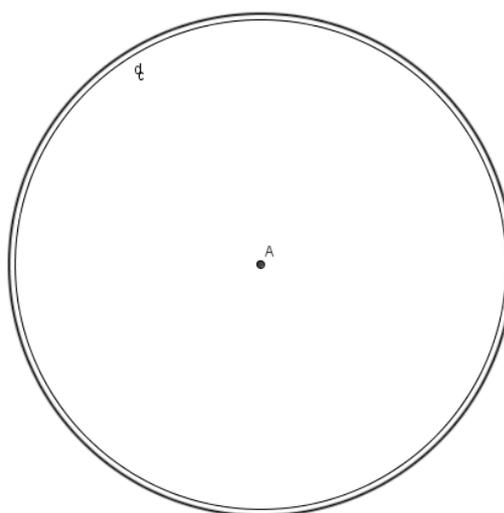
Este problema es un clásico. Aparece en muchos libros de divulgación matemático, pero, en casi todos, mal resuelto.

## 6. Jugando con el ecuador

Supongamos unas manos gigantes que quieren jugar con el planeta Tierra. Toma una cuerda de longitud lo que mide el ecuador de la Tierra (40.000.000 m, aproximadamente) y envuelve el ecuador con esa cuerda, que quedará absolutamente pegada a cada punto del ecuador. De tal forma que, si un bañista está tomando el sol en una playa del ecuador y su cuello se encuentra, desgraciadamente, en la línea del ecuador se va a quedar sin respiración en poco tiempo. Las manos enormes se compadecen del hombre en bañador y añaden a los 40.000.000 m, un metro (1 m). Colocan de nuevo la cuerda "aumentada" sobre el ecuador. Ahora la cuerda no toca la tierra. Hay cierta "holgura".

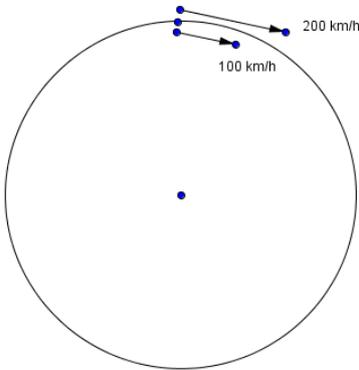
*¿Crees que la holgura de la cuerda nueva es suficiente para dejar de estrangular al bañista? ¿Crees que es suficiente para que pueda librarse de ella? ¿Cuál es, aproximadamente, la holgura? ¿Cuál es, exactamente, la holgura?*

Ahora tenemos una pelota de baloncesto (también esférica). Operamos de la misma manera.



¿Cuál es, ahora, aproximadamente, la holgura? ¿Cuál es, exactamente, la holgura?

### 7. A vueltas con Harry Potter



Con su superescoba, Harry Potter da una vuelta circular al patio a una velocidad de 200 km/h. Y una segunda vuelta a una velocidad de 100 km/h.

¿Cuál ha sido la velocidad media global de las dos vueltas?

### 8. El problema de las tres puertas

Este es un problema muy famoso, llamado problema de Monty Hall.

En un concurso en Estados Unidos el concursante finalista se enfrentaba a tres puertas cerradas. En una había un apartamento en Miami, en las otras dos, sendas cabras. El concursante elegía una puerta, que no se abría. El conductor del programa abría una puerta en la que había una cabra (él sabía lo que había tras cada puerta). Invitaba al concursante: "Si quieres, puedes cambiar de puerta".

Tú, ¿qué harías? ¿Te quedarías con la que habías elegido al principio o cambiarías de puerta?

### 9. El tran-tran

En la mesa del feriante hay cuatro dados **ROJO** 4 4 4 4 4 4 de colores distintos. También es distinta la **AZUL** 8 8 2 2 2 2 puntuación de cada una de sus seis caras.

**VERDE** 7 7 7 1 1 1

El juego que propone el feriante es el siguiente: "Elige un dado. El que tú quieras. Yo

**AMARILLO** 6 6 6 6 0 0

elegiré otro. Ponemos un euro cada uno encima de la mesa. Tú tiras tu dado. Yo, el mío. Gana los dos euros el que saque mayor puntuación en su dado"

¿Te parece un juego justo? Ponte en la piel del jugador. ¿Qué dado elegirías?

Ahora eres el feriante. Piensa el color que elegirías en función del que elije

el que juega. Analiza el juego. Haz un diagrama de árbol. Si te fijas, te darás cuenta de que para cualquier opción del jugador, el feriante siempre encuentra una mejor. (¡?)

### 10. Una simple apuesta (Cumpleaños feliz)

Tomamos al azar tres personas.

¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos celebren su cumpleaños el mismo mes?

Tomamos al azar cuarenta personas.

¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos celebren su cumpleaños el mismo año?

¿A partir de cuántas personas es la probabilidad de coincidencia mayor que el 50%?

### 11. Números primos

Se sabe que existen infinitos números primos. Es decir que, dado cualquier número primo, siempre hay otro primo mayor que él. [¿Conoces la demostración? Es sencilla, bella y elegante]

Ahora bien. Pon atención. Yo aseguro que dada una longitud tan grande como se quiera, podemos encontrar en la sucesión de los números naturales un trozo de recta tan larga como se quiera en la que no haya ningún número primo. Y no solo eso: Puedo encontrar infinitos intervalos de esa longitud, en los que no haya ningún número primo.

*¿Te lo crees?*

*¿Has oído hablar de las cosas raras que pasan en un hotel con infinitas habitaciones, todas ocupadas?*

### 10. La diagonal de un cuadrado

Se puede decir que medir es comparar con un patrón. Pero comparar exactamente. Es decidir cuántas veces (número entero) cabe el patrón en lo que se va medir.

*La diagonal de un cuadrado de lado 1 no puede medirse. ¿Sabrías razonarlo?*

## 11. El juego de Rencontre

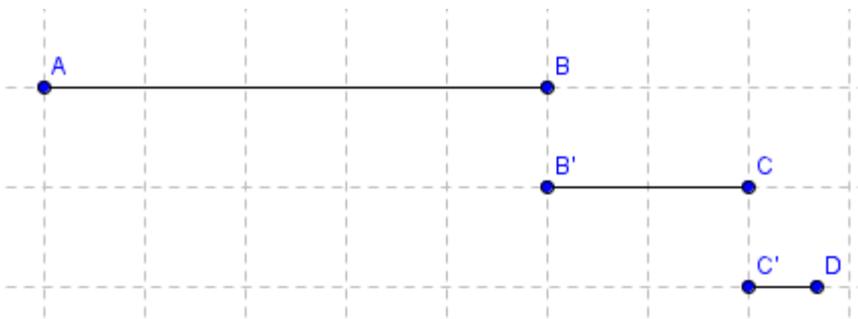
El Juego de Rencontre es un juego de azar en el que dos personas, con un mazo completo de cartas cada una, saca a la vez una carta detrás de otra hasta que gana una de ellas si sacan la misma carta. Si no tiene lugar dicha coincidencia, entonces gana la otra persona. Con estos supuestos, se pregunta la probabilidad de ganar que tiene cada persona.

¿Jugarías a que hay coincidencia?

En ese caso, ¿qué preferirías? ¿13 cartas? ¿40 cartas?

## P3. La paradoja de Aquiles y la tortuga

La Tortuga reta a Aquiles, el guerrero más veloz de Grecia: "Te echo una carrera. Dame un kilómetro de ventaja. Nunca me alcanzarás y yo ganaré la carrera". "Claro que te alcanzaré". "No. Escucha"



Al principio, tú estás en A y yo en B. Cuando llegues a B, yo ya no estaré en B. Cuando tú corras de B' a C y llegues a C, yo ya no estaré en C, etc.

Sin embargo, Aquiles atrapa a la tortuga, pero no se cocina una sopa de tortuga: prefiere pensar en el razonamiento de la tortuga.

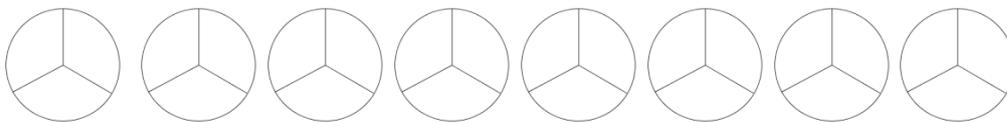
## SOLUCIONES

### 1. Extraña repartición

La mayoría de la gente ve justa la repartición 5 a 3. Desde un punto de vista ético, hay quien cree que Abdul y Beremín deberían recibir lo mismo (4 monedas cada uno) pues ambos pusieron todo lo que tenían.

Supongamos que Abdul no está de acuerdo y lleva el asunto a juicio donde razona de la siguiente manera:

Imaginemos que los 8 panes los dividimos en tres porciones iguales, obteniendo así 24 porciones:



Imaginemos, para simplificar el problema que les cuesta 8 jornadas llegar a Bagdad y cada uno come una ración cada día. Así:

	A	B	C
come	8 raciones	8 raciones	8 raciones
aporta	15 r (= 5 panes)	9 r (=3 panes)	---
REGALA	7 raciones	1 ración	---
OBTIENE	7 monedas	1 moneda	

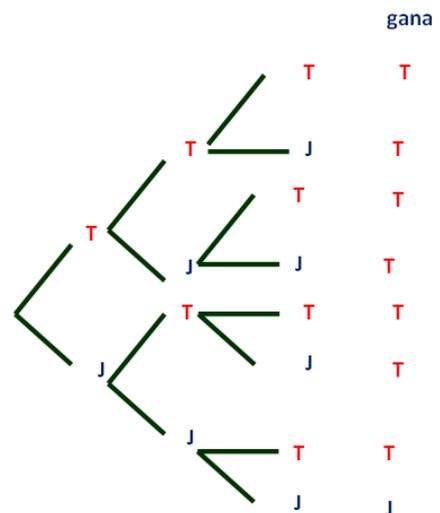
Si esta discusión se llevara a juicio, parece claro que el juez debería saber matemáticas (o tener algún asesor que supiera). Y en ese caso, esta le parecería una conclusión clara y contundente.

### 2. La partida interrumpida

T: 5 partidas ganadas

J: 3 partidas ganadas al mejor de 6

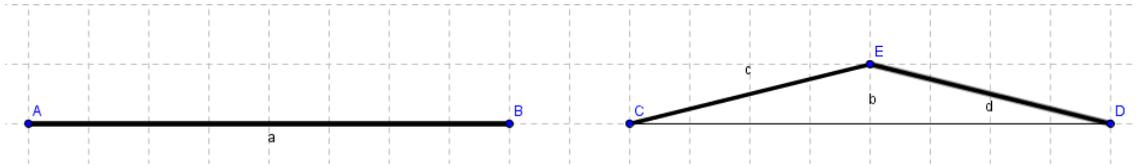
El máximo de partidas que quedan por jugar es 3. Supongamos que hay una persona imparcial que toma nota (sin que se enteren ni Tomasa ni Javier de los resultados que van saliendo, o mejor dicho, que podrían haber salido):



Es decir, el reparto justo es: 7.000 euros para Tomasa y 1.000 euros para Javier.

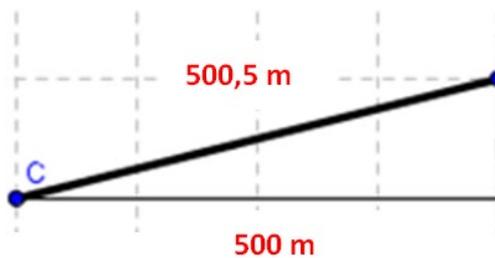
### 3. La viga dilatada.

$L=1.000\text{ m}$       aumenta 1 m



[Es claro que el dibujo no está hecho a escala]

Tenemos el siguiente triángulo rectángulo, al que aplicamos el teorema de Pitágoras:



$$x = \sqrt{500,5^2 - 500^2} = 22,37\text{ m}$$

x m [la altura de un bloque de casas de 7 pisos] (Glub!)

### 4. Detección del cáncer: ¿Pruebas válidas?

$$p(\text{enfermedad}) = 0,4\%$$

$$\text{falsos positivos} = 1\% = p(\text{positivo/sano})$$

$$\text{falsos negativos} = 0,5\% = p(\text{negativo/enfermo})$$

población total: 1.000.000 personas

¿ p(enfermo/positivo) ?

Con una sencilla tabla de doble entrada se resuelve el problema:

	C	no C	
+	3.980	9.960	13.940
-	20	986.040	986.060
	4.000	996.000	1.000.000

Por tanto, entre todas las personas que dan positivo (13.940), solo 3.980 tienen, efectivamente, cáncer. Esto supone una probabilidad de  $3.980 / 13.940$ , es decir 0,286 (el 28,6 %), porcentaje que debería sorprendernos. Y también que 9.960 personas sanas den positivo.

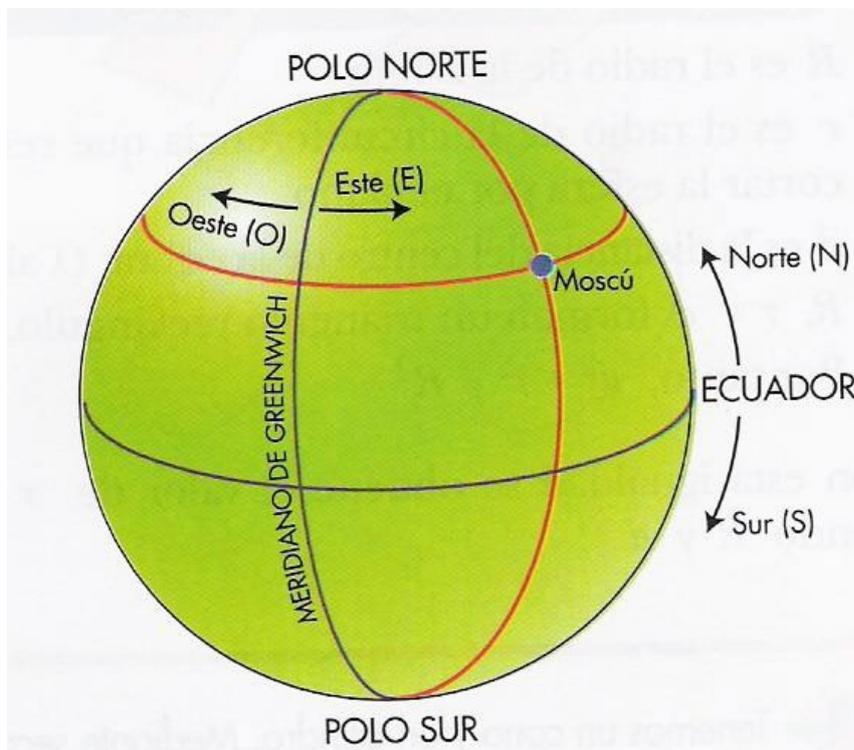
Los médicos deberían saber matemáticas o, por lo menos, algo de probabilidad para hacer análisis correctos de situaciones muy delicadas.

## 5. El cazador, su caseta y el oso

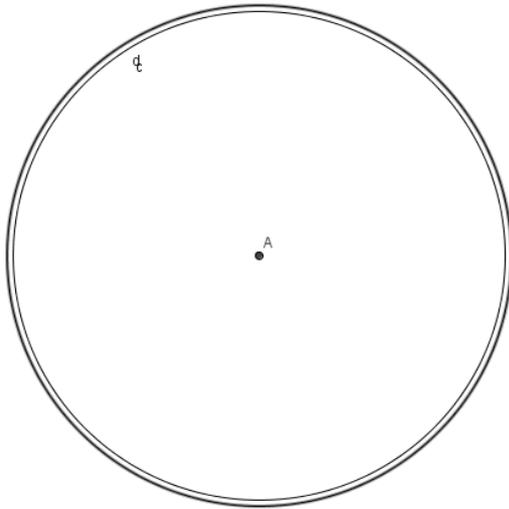
Un cazador tiene una caseta [solo una caseta]. Un día sale de casa. Camina 10 km al Sur. Se para. Camina 10 km al Este. Se para. Camina 10 km al Norte y se encuentra en su cabaña, donde encuentra a un oso.

*¿De qué color es el oso?*

Este problema es un clásico. Aparece en muchos libros de divulgación matemática, pero, en casi todos, mal resuelto. Piensa en el polo norte, pero piensa también en el hemisferio Sur.



## 6. Jugando con el ecuador



Llamemos  $L$  a la longitud del ecuador (unos 40.000.000 m) y  $R$  al radio de la Tierra (unos 6.370.000 m).

$R'$  al radio desconocido correspondiente a la longitud aumentada en 1 m.

Así:

$$L = 2\pi R \quad \text{Por tanto (restando)}$$

$$L + 1 = 2\pi R'$$

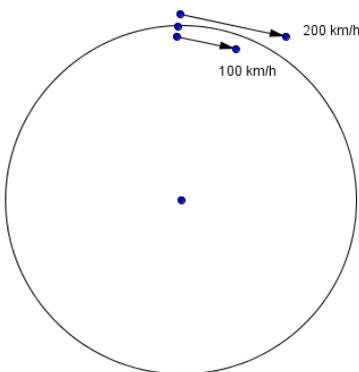
$$1 = 2\pi(R' - R) = 2\pi h$$

$$\text{Esto es } h = \frac{1}{2\pi} \text{ metros} \cong 0,16\text{m} = 16\text{cm}$$

Sorprendente!

Pero, más curioso todavía. Si llamamos ahora  $L$  al "ecuador" del balón de baloncesto y  $R$  a su radio... ¡vale exactamente el razonamiento anterior! y, por tanto la holgura ( $h$ ) es siempre la misma (cuando añadimos 1 m), independientemente del tamaño de la esfera.

## 7. A vueltas con Harry Potter



La solución no es, claro, 150 km/h, porque está más tiempo viajando a 100 km/h que a 200 km/h.

Calcular exactamente la velocidad media de las dos vueltas es sencillo:

Llamemos  $e$  a la longitud de una vuelta (aunque no la sepamos) y  $t$  al tiempo que le cuesta dar la vuelta a 200 km/h. Así:

$$v = \frac{e}{t} \Rightarrow 200 = \frac{e}{t} \Rightarrow v_m = \frac{2e}{3t} = \frac{2}{3} 200 = 400/3 = 133,33 \text{ km/h}$$

## 8. El problema de las tres puertas

Vamos a ver qué puede pasar si voy al programa con la estrategia de NO CAMBIAR y qué pasa con la estrategia de SÍ CAMBIAR.

# Las tres puertas

	
A B C	A B C
<u>a</u> x	a <u>b</u> x
<u>b</u> x	<u>a</u> b   x
x <u>c</u>	<u>a</u> x   c
(sin cambiar)	(cambiando)
1 de 3	2 de 3

Conclusión: ...

## 9. Números primos

Sorprendentemente, a pesar de que hay números "por todas partes" y "hasta el infinito", podemos encontrar en la sucesión de los números naturales un trozo de recta tan larga como se quiera en la que no haya ningún número primo. Y no solo eso: Puedo encontrar infinitos intervalos de esa longitud, en los que no haya ningún número primo.

En efecto:

Un caso "sencillo": Queremos conseguir 10 números naturales compuestos.

Considerar  $11! = 11 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = N$

Considerar la lista  $N+2, N+3, \dots, N+10, N+11$ . Esta vale, puesto que  $N+2$  es múltiplo de 2,  $N+3$  es múltiplo de 3, etc.

Si quiero una lista de 37 números consecutivos no-primos elijo así:

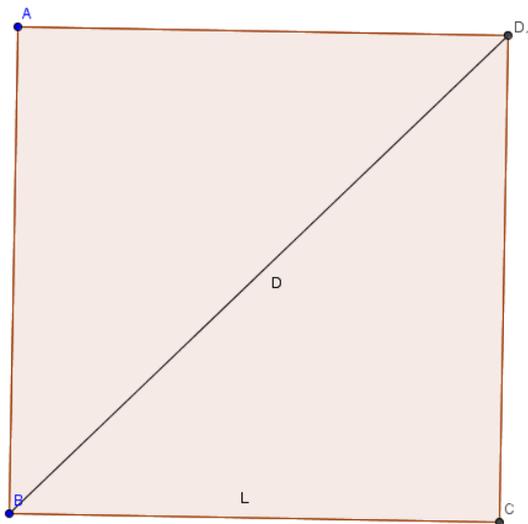
$38!+2, 38!+3, \dots, 38!+36, 38!+37, 38!+38$

En general una lista de números no-primos de longitud  $m$ , a partir de  $(m+1)!$ :

$(m+1)!+2, (m+1)!+3, (m+1)!+4, \dots, (m+1)!+(m+1)$ .

Sorprendente, ¿no?

## 10. La diagonal de un cuadrado



Supongamos que la diagonal del cuadrado ( $D$ ) pudiera medirse. Querría decir que habría una partición de  $L$  tal que un trocito de esta partición cabría un número exacto de veces en  $D$ . Un ejemplo.

Supongamos que dividimos  $L$  en 1.000 partes iguales y que cada trocito cabe exactamente 1.414 veces. Esto es la diagonal mediría exactamente  $1.414/1.000$ ; es decir,  $D$  sería ... ¡UNA FRACCIÓN! Pero

sabemos que  $D (= \sqrt{2})$  no es una fracción (bella demostración, ¿sabes hacerla?)

Por lo tanto *La diagonal de un cuadrado no puede medirse.*

[Un consejo: no digas esto en ambientes no matemáticos. Te tomarán por una persona chiflada]

## 11. El juego de Rencontré

$$P_1 = 1$$

$$P_2 = 0,5$$

$$P_3 = 0,6666\dots$$

$$P_4 = 0,625$$

$$P_5 = 0,6333\dots$$

$$P_6 = 0,6319444\dots$$

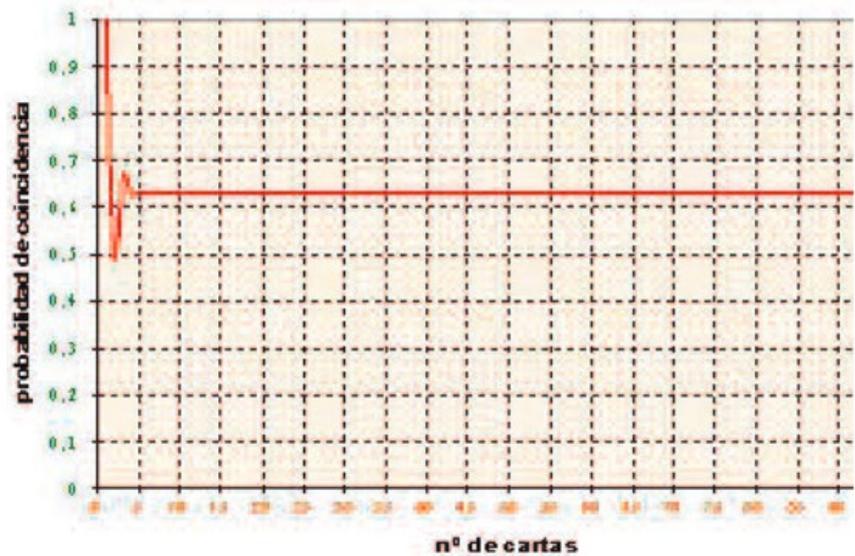
$$P_7 = 0,63214286$$

$$P_8 = 0,63211806$$

$$P_9 = 0,63212081$$

$$P_{10} = 0,63212054$$

$$P_{11} = 0,63212056$$



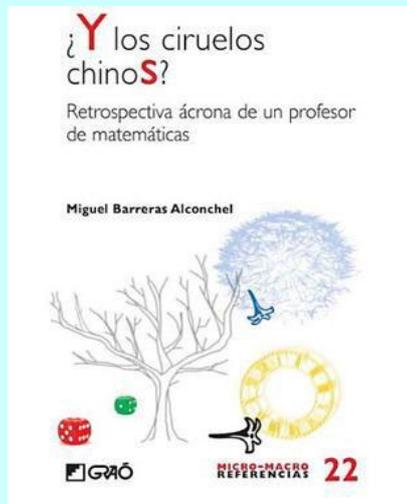
Vemos que la probabilidad de coincidencia se estabiliza muy rápido. Puede observarse que el número de cartas es prácticamente irrelevante a partir de cinco. La probabilidad de que haya coincidencia es 0,63212056. ¿sorprendente?

Lecturas recomendadas:

*Inspiración Ajá* de Martin Gardner.

En la web <http://calendas.ftp.catedu.es/00litemate.htm>

# Literatura matemática



**Coma flotante** PRIMER PREMIO DEL V CONCURSO DE CUENTOS "ADA BYRON"

**Elogio de la ceguera** FINALISTA CONCURSO DE CUENTOS XXII HUCHA DE ORO

**Arcángeles** PRIMER PREMIO EN X PREMIO INTERNACIONAL JULIO CORTÁZAR DE RELATO BREVE (UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA)

**Principio de incertidumbre** PRIMER PREMIO DEL III CONCURSO DE RELATOS CORTOS RSME-ANAYA 2007

**El catálogo de Trendar B. Llessur** PRIMER PREMIO DEL III CONCURSO DE RELATOS CORTOS RSME-ANAYA 2008

**Bib** FINALISTA III CONCURSO DE RELATOS CORTOS RSME-ANAYA 2008

**El rey de bastos** ACCESIT PREMIOS DEL TREN 2008

**A cara o cruz** FINALISTA PREMIO CIUDAD DE HUESCA 2009

**Tú la llevas** ACCESIT PREMIOS DEL TREN 2011