Afinaciones y temperamentos: Acústica

Francisco Javier Martínez Espiga

23 de Marzo de 2024

1 Afinamientos y temperamentos

1.1 Introducción

1.1.1 Conceptos previos

Un sistema de afinación (o más tecnicamente el temperamento) es cada una de las maneras de elegir los sonidos que utiliza la música. Es un conjunto que contiene las frecuencias usadas, a las que se llama notas musicales.

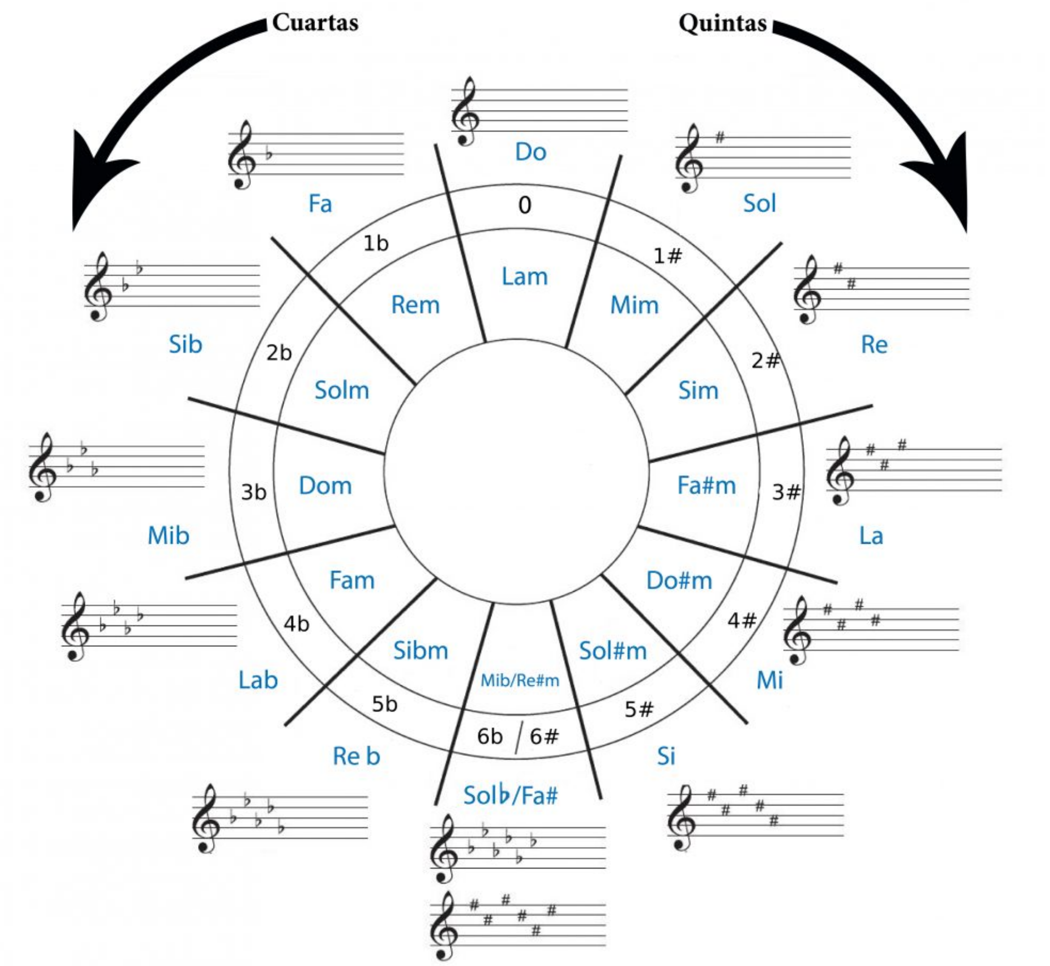
Una serie armónica (o armónicos) es una sucesión de sonidos cuyas frecuencias son múltiplos enteros positivos de una nota base, llamada fundamental. Esta frecuencia fundamental es lo que habitualmente percibimos como nota, y los armónicos se obtienen al multiplicar la frecuencia de esa nota por un número entero $(1, 2, 3, \dots)$ para formar una serie.

1.2 Afinación pitagórica

1.2.1 Origen

Pitágoras (569-475 a.C.) se dio cuenta de que al duplicar la frecuencia de una nota (reducir a la mitad la longitud de la cuerda), obtenía la misma nota, más aguda (una 8ª): una cuerda de longitud L emitía un sonido y otra de longitud $2L$ emítia la misma nota una octava (8ª) más grave. Dado que se consideraba que la armonía consonante se basaba en la Santa Tetraktys $(1, 2, 3, 4)$, las proporciones 1, 2, 3/2 y 4/3 fueron la base del sistema de afinación (1ª, 8ª, 5ª y 4ª).

Es un sistema de construcción de la escala musical que se fundamenta en la quinta perfecta de razón 3/2 o quinta justa. Partiendo de una nota base se obtienen las demás notas de una escala diatónica mayor encadenando doce quintas consecutivas, y así, cualquier intervalo puede expresarse como una combinación de quintas perfectas. A esta representación geométrica de las relaciones entre los 12 semitonos de la escala cromática se la conoce como círculo de quintas.



Sin embargo, la quinta número doce llega a una nota que no es igual a la nota que se tomó como base en un principio. Al reducir las doce quintas en siete octavas, el intervalo que se obtiene no es el unísono, sino una pequeña fracción de tono llamada coma pitagórica.

Fue uno de los sistemas de afinación más usados hasta el siglo XII (momento en que aparece la polifonía), porque hasta ese momento los intervalos más utilizados eran los de 4ª, 5ª y 8ª (monofonía).

1.2.2 Coma (o comma) pitagórica

Es la diferencia entre doce quintas perfectas y siete octavas. Su expresión numérica es:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} : 2^7 = \frac{3^{12}}{2^{12} \cdot 2^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} = 1.013643 = f_{cm}$$

El círculo de quintas no se cierra porque las doce quintas del círculo no equivalen al unísono ni a la octava. Dicho de otro modo: el encadenamiento sucesivo de factores de frecuencia iguales a 3/2 (la quinta) nunca produce un valor que se pueda reducir a la relación 2/1 (la octava); ningún número es al mismo tiempo potencia de 3 y de 2, salvo la unidad, que representa el unísono.

1.2.3 Construcción de las escalas diatónica y cromática

Basándose en la proporción 3/2 (intervalos de 5ª justa), la escala diatónica se construye de la siguiente manera, partiendo de una nota inicial que llamaremos Do_1 (1):

$Do_1 - Do_2 \Rightarrow 1 \cdot 2 = 2 \Rightarrow Do_2\colon\ 2$

$Do_1 - Sol_1 \Rightarrow 1 \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow Sol_1\colon\ 3/2$

$Sol_1 - Re_2 \Rightarrow \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{4} \Rightarrow Re_1\colon\ \frac{9}{4} : 2 = 9/8$

$Re_1 - La_1 \Rightarrow \dfrac{9}{8} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{27}{16} \Rightarrow La_1\colon\ 27/16$

$La_1 - Mi_2 \Rightarrow \dfrac{27}{16} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{81}{32} \Rightarrow Mi_1\colon\ \dfrac{81}{32} : 2 = 81/64$

$Mi_1 - Si_1 \Rightarrow \dfrac{81}{64} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{243}{128} \Rightarrow Si_1\colon\ 243/128$

$Fa_0 - Do_1 \Rightarrow 1 : \frac{3}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow Fa_1\colon\ \frac{2}{3} \cdot 2 = 4/3$

Do	*Re*	*Mi*	*Fa*	*Sol*	*La*	*Si*	*Do*
1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

Table 1: Escala diatónica

Notar que los cinco tonos de la escala ($Do - Re$, $Re - Mi$, $Fa - Sol$, $Sol - La$, $La - Si$) tiene la misma proporción: 9/8. A la diferencia entre Mi y Fa, y Si y Do le llamaremos <u>semitono diatónico</u>.

$$\text{Tono} \Rightarrow \frac{9}{8} : 1 = \frac{81}{64} : \frac{9}{8} = \frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{27}{16} : \frac{3}{2} = \frac{243}{128} : \frac{27}{16} = 9/8 = 1.125 = f_t$$

$$\text{Semitono diatónico} \Rightarrow \frac{4}{3} : \frac{81}{64} = 2 : \frac{243}{128} = \frac{256}{243} = 2^8/3^5 = 1.0534979 = f_{sd}$$

Ahora bien, de la existencia de alteraciones en los intervalos de un tono, surge otro semitono. Es el <u>semitono cromático</u>, que corresponde a los intervalos determinados por una nota y su sostenido ($\sharp$) o el bemol ($\flat$) de una nota y dicha nota, y que el cual se define como la diferencia entre el tono y el semitono diatónico. Tiene, por tanto, asignada la fracción:

$$\text{Semitono cromático} \Rightarrow \frac{9}{8} : \frac{256}{243} = \frac{2187}{2048} = 3^7/2^{11} = 1.06787109 = f_{sc}$$

Para obtener ahora los valores de las notas cromáticas, se hace lo siguiente:

$$X \cdot \frac{3^7}{2^{11}} \Rightarrow X\sharp \text{ si } (X \neq Mi, Si) \text{ y } X : \frac{3^7}{2^{11}} \Rightarrow X\flat \text{ si } (X \neq Fa, Do)$$

Los valores de todas las notas de la escala quedan de la siguiente manera:

Do	$Re\flat$	$Do\sharp$	Re	$Mi\flat$	$Re\sharp$	Mi	Fa	$Sol\flat$
1	$2^8/3^5$	$3^7/2^{11}$	$3^2/2^3$	$2^5/3^3$	$3^9/2^{14}$	$3^4/2^6$	$2^2/3$	$2^{10}/3^6$

Table 2: Escala cromática (1ª parte)

$Fa\sharp$	Sol	$La\flat$	$Sol\sharp$	La	$Si\flat$	$La\sharp$	Si
$3^6/2^9$	$3/2$	$2^7/3^4$	$3^8/2^{12}$	$3^3/2^4$	$2^4/3^2$	$3^{10}/2^{15}$	$3^5/2^7$

Table 3: Escala cromática (2ª parte)

Si calculamos la razón entre el semitono cromático y el diatónico, se obtiene:

$$\frac{2187}{2048} : \frac{256}{243} = \frac{3^7}{2^{11}} : \frac{2^8}{3^5} = 3^{12}/2^{19} = 1.013643$$

valor que coincide con el anteriormente obtenido para la coma pitagórica.

Notar que las frecuencias de todas las notas anteriores se pueden expresar de la forma:

$$f = 2^a 3^b,\ a, b \in \mathbb{Z}$$

Por último, se puede comprobar que, así definidos, ni el semitono diatónico ni el cromático coinciden (tal y como lo entendemos hoy en día), con la definición actual de semitono f_s (mitad de un tono) porque:

$$(f_s)^2 = f_t \rightarrow f_s = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} = 1.06066$$

1.2.4 Otros sistemas de afinación

La incompatibilidad entre las potencias de 2 y de 3 (la octava y la quinta) hizo que surgieran otros sistemas de afinación, derivados del sistema de Pitágoras.

La manera más sencilla es dejar la última quinta con el valor residual que le corresponde para que así que coincida con la nota inicial. Esta quinta es una coma pitagórica menor que la quinta justa, y se conoce como quinta del lobo. Este intervalo es muy disonante y generalmente si situaba entre Sol $\sharp$ y Mi $\flat$. Esto provocaba que las obras musicales fueran muy sencillas y siempre en una única tonalidad, porque el resto de tonalidades sonaban muy desafinadas, eran consideradas armonías muy desagrables.

Por otra parte, Aristóxeno o Aristógenes de Tarento (354-300 a. C.) rechazó la opinión de los pitagóricos en cuanto a que las reglas aritméticas fueran el último orden de intervalos y que en todos los sistemas se tiene que encontrar una coincidencia matemática antes de que tal sistema pueda decirse que es armónico. Defendía que no hay otra forma de llegar al conocimiento de la música sino la percepción de los sentidos, la experiencia auditiva (el oído). Contribuyó a desarrollar la notación musical griega.

1.3 Temperamento justo

1.3.1 Origen

A finales del siglo XV, con objeto de evitar los problemas de la afinación pitagórica, comenzaron a aparecer las afinaciones justas (o mesotónicas), modificaciones de la afinación pitagórica. La más conocida se construye al adoptar en lo posible los intervalos de la serie armónica (armónicos), en particular la tercera mayor. En este tipo de afinación el mayor problema surge cuando se tocan piezas en tonalidades alejadas de la tonalidad que se tomó como punto de partida para la afinación, porque son progresivamente más disonantes.

1.3.2 Construcción de la escala

En el sistema pitagórico, la tercera mayor ($Do - Mi$) tiene una frecuencia 81/64. Sin embargo, en el sistema justo, se sustituye por la relación que hay entre los armónicos 4 y 5 de la serie armónica, es decir, 5/4. A la diferencia entre ambas frecuencias se le llama coma sintónica y equivale a $f_{cs} = \frac{81}{64} : \frac{5}{4} = 81/80 = 1.0125$.

Partiendo de los intervalos de 5ª(3/2), 4ª(4/3) y 3ª(5/4), las frecuencias de la escala diatónica quedan:

$$Sol - Re \Rightarrow \frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8} \Rightarrow Re\text{: } 9/8$$

$$Sol - Si \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8} \Rightarrow Si\text{: } 15/8$$

$$Fa - La \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3} \Rightarrow La\text{: } 5/3$$

Do	*Re*	*Mi*	*Fa*	*Sol*	*La*	*Si*	*Do*
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

Table 4: Escala diatónica

Notar que en este sistema hay dos tonos distintos $f_{t1} = 9/8$ ($Do - Re, Fa - Sol$ y $La - Si$) y $f_{t2} = 10/9$ ($Re - Mi$ y $Sol - La$), y que la frecuencia del semitono es $f_s = 16/15$. La escala cromática queda:

Do	*Do♯/Re♭*	*Re*	*Re♯/Mi♭*	*Mi*	*Fa*	*Sol♭*	*Fa♯*
1	16/15	9/8	6/5	5/4	4/3	45/32	64/45

Table 5: Escala cromática (1ª parte)

Sol	*Sol♯/La♭*	*La*	*Si♭*	*La♯*	*Si*	*Do*
3/2	8/5	5/3	16/9	9/5	15/8	2

Table 6: Escala cromática (2ª parte)

A los intervalos de 5ªJ (3/2), 4ªJ (4/3) y 8ªJ (2) se les consideraba consonancias perfectas y a los de 3ªm (6/5, $Mi - Sol$), 3ªM (5/4, $Do - Mi$), 6ªm (8/5, $Mi - Do$) y 6ªM (5/3, $Do - La$) consonancias imperfectas.

1.4 Temperamento igual

1.4.1 Origen

Durante el renacimiento comenzó a buscarse un nuevo tipo de temperamento que permitiera interpretar en cualquier tonalidad sin que esto introdujese disonancias. La solución fue el temperamento igualado, que se basa en dividir la octava en doce partes iguales llamadas semitonos temperados.
Todo parece indicar que fue usado por los constructores y los ejecutantes de instrumentos con trastes desde principios del siglo XVI. Su aceptación entre los músicos de teclado fue más lenta porque prefirían alternativas como el temperamento justo y otras afinaciones ligeramente irregulares.

Este temperamento es el que se usa en la actualidad y tiene la ventaja de que una misma obra se puede interpretar en cualquier tonalidad, pero a costa de que cada nota de la escala esté ligeramente desafinada. En la afinación igualada todo es erróneo, aunque con errores casi inapreciables, para así conseguir que no haya nada demasiado erróneo. Esta propiedad se considera una gran virtud desde el punto de vista práctico, aunque puede verse como un valor perdido respecto a los sistemas anteriores.
Como demostración de las posibilidades de este nuevo tipo de temperamento, en el siglo $XVIII$ J. S. Bach (1685-1750) escribió "El clave bien temperado" (una de las mayores obras de la música occidental). Es un conjunto de 48 preludios y fugas escrito, en dos tomos, en todas las tonalidades posibles (12 mayores y 12 menores en cada tomo), y que deberían "sonar bien" en un instrumento afinado de este modo.

1.4.2 Construcción de la escala temperada

Dado que la escala está formada por 12 semitonos iguales (de frecuencia f_s), partiendo de una nota (de frecuencia f_1) y hasta una 8ª más aguda (de frecuencia $2f_1$), se cumple:

$$f_1 \cdot (f_s)^{12} = 2f_1 \Rightarrow f_s = \sqrt[12]{2} = 1.059463$$

En este sistema, sólo existe un tipo de tono, no existen comas, un tono está formado por dos semitonos iguales, y no existe la quinta del lobo. Además, en las anteriores afinaciones, todas las frecuencias eran números racionales pero, en la escala temperada las frecuencias son números irracionales.

Do	$Do\sharp/Re\flat$	Re	$Re\sharp/Mi\flat$	Mi	Fa	$Fa\sharp/Sol\flat$
1	1.059463	1.122462	1.189207	1.259921	1.33484	1.414214

Table 7: Escala cromática (1ª parte)

Sol	$Sol\sharp/La\flat$	La	$La\sharp/Si\flat$	Si	Do
1.498307	1.587401	1.681793	1.781797	1.88775	2

Table 8: Escala cromática (2ª parte)

1.4.3 Tabla de frecuencias

Frecuencias en igual temperamento (Hz)							
Do_0	16.352	Do_2	65.406	Do_4	261.63	Do_6	1046.5
$Do_0\sharp/Re_0\flat$	17.324	$Do_2\sharp/Re_2\flat$	69.296	$Do_4\sharp/Re_4\flat$	277.18	$Do_6\sharp/Re_6\flat$	1108.7
Re_0	18.354	Re_2	73.416	Re_4	293.66	Re_6	1174.7
$Re_0\sharp/Mi_0\flat$	19.445	$Re_2\sharp/Mi_2\flat$	77.782	$Re_4\sharp/Mi_4\flat$	311.13	$Re_6\sharp/Mi_6\flat$	1244.5
Mi_0	20.602	Mi_2	82.407	Mi_4	329.63	Mi_6	1318.5
Fa_0	21.827	Fa_2	87.307	Fa_4	349.23	Fa_6	1396.9
$Fa_0\sharp/Sol_0\flat$	23.125	$Fa_2\sharp/Sol_2\flat$	92.499	$Fa_4\sharp/Sol_4\flat$	369.99	$Fa_6\sharp/Sol_6\flat$	1480.0
Sol_0	24.500	Sol_2	97.999	Sol_4	392.00	Sol_6	1568.0
$Sol_0\sharp/La_0\flat$	25.957	$Sol_2\sharp/La_2\flat$	103.83	$Sol_4\sharp/La_4\flat$	415.30	$Sol_6\sharp/La_6\flat$	1661.2
La_0	27.500	La_2	110.0	La_4	440.00	La_6	1760.0
$La_0\sharp/Si_0\flat$	29.135	$La_2\sharp/Si_2\flat$	116.54	$La_4\sharp/Si_4\flat$	466.16	$La_6\sharp/Si_6\flat$	1864.7
Si_0	30.868	Si_2	123.47	Si_4	493.88	Si_6	1975.5
Do_1	32.703	Do_3	130.81	Do_5	523.25	Do_7	2093.0
$Do_1\sharp/Re_1\flat$	34.648	$Do_3\sharp/Re_3\flat$	138.59	$Do_5\sharp/Re_5\flat$	554.37	$Do_7\sharp/Re_7\flat$	2217.5
Re_1	36.708	Re_3	146.83	Re_5	587.33	Re_7	2349.3
$Re_1\sharp/Mi_1\flat$	38.891	$Re_3\sharp/Mi_3\flat$	155.56	$Re_5\sharp/Mi_5\flat$	622.25	$Re_7\sharp/Mi_7\flat$	2489.0
Mi_1	41.203	Mi_3	164.81	Mi_5	659.26	Mi_7	2637.0
Fa_1	43.654	Fa_3	174.61	Fa_5	698.46	Fa_7	2793.8
$Fa_1\sharp/Sol_1\flat$	46.249	$Fa_3\sharp/Sol_3\flat$	185.00	$Fa_5\sharp/Sol_5\flat$	739.99	$Fa_7\sharp/Sol_7\flat$	2960.0
Sol_1	48.999	Sol_3	196.00	Sol_5	783.99	Sol_7	3136.0
$Sol_1\sharp/La_1\flat$	51.913	$Sol_3\sharp/La_3\flat$	207.65	$Sol_5\sharp/La_5\flat$	830.61	$Sol_7\sharp/La_7\flat$	3322.4
La_1	55.000	La_3	220.00	La_5	880.00	La_7	3520.0
$La_1\sharp/Si_1\flat$	58.270	$La_3\sharp/Si_3\flat$	233.08	$La_5\sharp/Si_5\flat$	932.33	$La_7\sharp/Si_7\flat$	3729.3
Si_1	61.735	Si_3	246.94	Si_5	987.77	Si_7	3951.1
						Do_8	4186.0

Table 9: Frecuencias en igual temperamento

2 Acústica

2.1 Introducción

La acústica musical es la rama de la acústica que está especializada en la investigación y descripción de la física de la música y el estudio de la audición musical.

2.2 Ley de Weber-Fechner

La ley psicofísica de Weber-Fechner establece una relación cuantitativa entre la magnitud de un estímulo físico y cómo éste es percibido. Fue propuesta en primer lugar por Ernst Heinrich Weber (1795-1878) en 1860 y elaborada hasta su forma actual por Gustav Theodor Fechner (1801-1887). Si un estímulo crece en progresión geométrica, la percepción evoluciona en progresión aritmética, por tanto la relación entre el estímulo y la percepción es una escala logarítimica.

En este caso, la relación frecuencia-altura tonal no es lineal, es logarítmica. La percepción de la altura del sonido es proporcional al logaritmo de la frecuencia, en lugar de a la frecuencia misma ($\log_2 x$). Por ejemplo, si se aumentan 100 Hz a partir de 100 Hz, el aumento es de una 8ª (200 Hz). Pero si el aumento de 100 Hz es desde 4000 Hz, la altura crece un cuarto de tono.

Nuestro oído percibe como iguales los intervalos $[f_1,\ f_2]$ y $[2^n f_1,\ 2^n f_2]$, ya que $\dfrac{f_2}{f_1} = \dfrac{2^n f_2}{2^n f_1}$. Por esto, escuchamos los intervalos de tono como iguales (cocientes iguales de frecuencias).
En un piano, las notas van de La_0 (27.5 Hz) a Do_7 (4186 Hz), lo que supone un 25% del especto audible (de 20 Hz a 20000 Hz), pero considerándolo en octavas en escala logarítmica, corresponde casi a un 80% (de 20 Hz a 5120 Hz).

$$20 \overset{8^{\text{a}}}{\Longrightarrow} 40 \overset{8^{\text{a}}}{\Longrightarrow} 80 \overset{8^{\text{a}}}{\Longrightarrow} 160 \overset{8^{\text{a}}}{\Longrightarrow} 320 \overset{8^{\text{a}}}{\Longrightarrow} 640 \overset{8^{\text{a}}}{\Longrightarrow} 1280 \overset{8^{\text{a}}}{\Longrightarrow} 2560 \overset{8^{\text{a}}}{\Longrightarrow} 5120 \overset{8^{\text{a}}}{\Longrightarrow} 10240 \overset{8^{\text{a}}}{\Longrightarrow} 20480$$

Otro ejemplo como un cambio multiplicativo en la magnitud del estímulo sonoro se traduce en un cambio aditivo en la medida del mismo en la escala correspondiente es la intensidad del sonido. En este caso es un logaritmo decimal: 50 dB es 10 veces más ruidoso que 40 dB y 100 veces más que 30 dB (logartimo decimal, $\log_{10} x$).

2.3 Cent

En acústica musical, el *cent* es la menor unidad usual que se emplea para medir intervalos musicales. Equivale a una centésima de semitono temperado. Debido a que el cent se define a partir del sistema temperado, los intervalos de este sistema tienen un número de cents que siempre es múltiplo de 100 (por ejemplo una 5ª, que contiene 7 semitonos, tiene 700 cents). En cambio los intervalos físicos o puros tienen un número distinto. Por ejemplo la quinta pura, perfecta o pitagórica, de razón 3/2, que tiene 702 cents.

El *cent* fue inventado en 1885 por el matemático y filólogo británico Alexander John Ellis (1814-1890), aunque la división decimal logarítmica del semitono ya había sido investigada por Gaspard de Prony (1755-1839) en los años 1830. Ellis desarolló un sistema de conversión logarítmica que le condujo a proponer el cent como unidad de medida aplicable al estudio de escalas musicales.

Se utiliza como unidad de medida para cuantificar intervalos, y también para comparar intervalos semejantes en distintos sistemas de afinación.Su razón o constante de proporcionalidad de frecuencias es:

$$c = \sqrt[1200]{2} = 1.0005777895... \simeq 1 + \frac{1}{1731}, \text{ la } 1200^{ava} \text{ parte logarítmica de la } 8^{\text{a}}$$

El sentido logarítmico o geométrico de las diferencias interválicas es que los intervalos son factores multiplicativos de la frecuencia. Por eso, los intervalos $Do - Re$, $Re - Mi$, $Fa - Sol$, $Sol - La$ y $La - Si$ tienen 200 *cents* y los intervalos $Mi - Fa$ y $Si - Do$ tienen 100 *cents*.

Para hallar la medida en cents de un intervalo, se calcula el logaritmo (en base cent) del intervalo i, siendo i la proporción de un intervalo ($i = \frac{f_2}{f_1}$, siendo f_1 y f_2 frecuencias en Hz). Entonces, la medida en cents de un intervalo se calcula:

$$\log_c i = \frac{\log i}{\log c} = \frac{\ln i}{\ln c} = \frac{1}{\log \sqrt[1200]{2}} \cdot \log i = 3896.314 \cdot \log i = \frac{1}{\ln \sqrt[1200]{2}} \cdot \ln i = 1731.234 \cdot \ln i$$

También se puede calcular de la siguiente manera, en función de las frecuencias:

$$\sqrt[1200]{2^c} = 2^{\frac{c}{1200}} \Rightarrow \frac{f_2}{f_1} = 2^{\frac{c}{1200}} \Rightarrow \ln \frac{f_2}{f_1} = \frac{c}{1200} \cdot \ln 2 \Rightarrow c = \frac{1200}{\ln 2} \cdot \ln \frac{f_2}{f_1} = \frac{1200}{\log 2} \cdot \log \frac{f_2}{f_1} = 1200 \cdot \log_2 \frac{f_2}{f_1}$$

Por ejemplo, para calcular los cents de una 5ª justa:

$$c = \frac{1200}{\ln 2} \cdot \ln \frac{3}{2} = 701.955... \simeq 702 \, cents$$

2.4 Tablas comparativas

Afinación pitagórica				
Intervalo	Nota	Origen numérico	Relación interválica	Cents
Unísono	Do	1:1	1.000	0.0
Segunda menor	Re $\flat$	$2^8/3^5 = 256/243$	1.053	90.2
Unísono aumentado	Do $\sharp$	$3^7/2^{11} = 2187/2048$	1.068	113.7
Segunda mayor	Re	$3^2/2^3 = 9/8$	1.125	203.9
Tercera menor	Mi $\flat$	$2^5/3^3 = 32/27$	1.185	294.1
Segunda aumentada	Re $\sharp$	$3^9/2^{14} = 19683/16384$	1.201	317.6
Tercera mayor	Mi	$3^4/2^6 = 81/64$	1.266	407.8
Cuarta Justa	Fa	$2^2/3 = 4/3$	1.333	498.1
Quinta disminuida	Sol $\flat$	$2^{10}/3^6 = 1024/729$	1.405	588.3
Cuarta aumentada	Fa $\sharp$	$3^6/2^9 = 729/512$	1.424	611.7
Quinta justa	Sol	3/2	1.500	702
Sexta menor	La $\flat$	$2^7/3^4 = 128/81$	1.580	792.2
Quinta aumentada	Sol $\sharp$	$3^8/2^{12} = 6561/4096$	1.602	815.6
Sexta mayor	La	$3^3/2^4 = 27/16$	1.688	905.0
Séptima menor	Si $\flat$	$2^4/3^2 = 16/9$	1.778	996.1
Sexta aumentada	La $\sharp$	$3^{10}/2^{15} = 59049/32768$	1.802	1019.1
Sèptima mayor	Si	$3^5/2^7 = 243/128$	1.898	1109.8
Octava	Do	2/1	2.000	1200.0

Table 10: Afinación pitagórica

Afinación/temperamento justo				
Intervalo	Nota	Origen numérico	Relación interválica	Cents
Unísono	Do	1:1	1.000	0.0
Segunda menor	Do $\sharp$ / Re $\flat$	16/15	1.067	111.7
Segunda mayor	Re	9/8	1.125	203.9
Tercera menor	Re $\sharp$ / Mi $\flat$	6/5	1.200	315.6
Tercera mayor	Mi	5/4	1.250	386.3
Cuarta Justa	Fa	4/3	1.333	498.1
Quinta disminuida	Sol $\flat$	45/32	1.406	590.2
Cuarta aumentada	Fa $\sharp$	64/45	1.422	609.8
Quinta justa	Sol	3/2	1.500	702
Sexta menor	Sol $\sharp$ / La $\flat$	8/5	1.600	813.7
Sexta mayor	La	5/3	1.667	884.4
Séptima menor	Si $\flat$	16/9	1.778	996.1
Sexta aumentada	La $\sharp$	9/5	1.800	1017.6
Sèptima mayor	Si	15/8	1.875	1088.3
Octava	Do	2/1	2.000	1200.0

Table 11: Temperamento justo

Temperamento igual				
Intervalo	Nota	Origen numérico	Relación interválica	Cents
Unísono	Do	1:1	1.000	0.0
Segunda menor	Do $\sharp$ / Re $\flat$	$2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$	1.059	100
Segunda mayor	Re	$2^{\frac{2}{12}} = \sqrt[12]{2^2} = \sqrt[6]{2}$	1.122	200
Tercera menor	Re $\sharp$ / Mi $\flat$	$2^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[4]{2}$	1.189	300
Tercera mayor	Mi	$2^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[3]{2}$	1.260	400
Cuarta Justa	Fa	$2^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{2^5}$	1.335	500
Quinta disminuida	Fa $\sharp$ / Sol $\flat$	$2^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2}$	1.414	600
Quinta justa	Sol	$2^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{2^7}$	1.498	700
Sexta menor	Sol $\sharp$ / La $\flat$	$2^{\frac{8}{12}} = \sqrt[12]{2^8} = \sqrt[3]{2^2}$	1.587	800
Sexta mayor	La	$2^{\frac{9}{12}} = \sqrt[12]{2^9} = \sqrt[4]{2^3}$	1.682	900
Séptima menor	La $\sharp$ / Si $\flat$	$2^{\frac{10}{12}} = \sqrt[12]{2^{10}} = \sqrt[6]{2^5}$	1.782	1000
Sèptima mayor	Si	$2^{\frac{11}{12}} = \sqrt[12]{2^{11}}$	1.888	1100
Octava	Do	$2^{\frac{12}{12}} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$	2.000	1200.0

Table 12: Temperamento igual

3 Bibliografía

Modelos matemáticos del sistema de afinación pitagórico y algunos de sus derivados: propuesta para el aula. Javier Peralta. ISSN 1665-5826.

Internet:

http://www.eumus.edu.uy/eme/ensenanza//acustica/apuntes/afyesc2/escalas.html

http://www.sacred-geometry.es/?q=es/content/proporcion-en-las-escalas-musicales

http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Music/et.html.c2

https://es.wikipedia.org/wiki/Afinacion-pitagorica

https://es.wikipedia.org/wiki/Aristoxeno

https://es.wikipedia.org/wiki/Temperamento-justo

https://es.wikipedia.org/wiki/El-clave-bientemperado

https://es.wikipedia.org/wiki/Temperamento-igual

https://es.wikipedia.org/wiki/Acustica-musical

https://es.wikipedia.org/wiki/Ley-de-Weber-Fechner

http://vicmat.com/aproximacion-matematica-la-escala-musical-pitagorica/

https://es.wikipedia.org/wiki/Cent

4 Parte práctica

4.1 Afinación pitagórica

1. Calcula el valor de la coma pitagórica, expresada como una propoción, siguiendo el círculo de quintas.
2. Calcula el valor (expresado como una propoción a partir de una nota base Do, de proporción 1) de las notas de la escala diatónica, según la afinación pitagórica.
3. Calcula los valores de las notas de la escala, expresándolos como potencias de 2 y de 3. (Ayuda: la frecuencia del semitono cromático es $f_{sc} = 3^7/2^{11} = 1.06787109$). Completa la tabla adjunta.

Afinación pitagórica				
Intervalo	Nota	Origen numérico	Relación interválica	Cents
Unísono	Do			
Segunda menor	Re $\flat$			
Unísono aumentado	Do $\sharp$			
Segunda mayor	Re			
Tercera menor	Mi $\flat$			
Segunda aumentada	Re $\sharp$			
Tercera mayor	Mi			
Cuarta Justa	Fa			
Quinta disminuida	Sol			
Cuarta aumentada	Fa $\sharp$			
Quinta justa	Sol			
Sexta menor	La $\flat$			
Quinta aumentada	Sol $\sharp$			
Sexta mayor	La			
Séptima menor	Si $\flat$			
Sexta aumentada	La $\sharp$			
Sèptima mayor	Si			
Octava	Do			

Table 13: Afinación pitagórica

4.2 Temperamento justo

1. ¿Cuál es la diferencia entre la tercera mayor ($Do - Mi$) entre la afinación pitagórica y el temperamento justo? Exprésalo como una proporción.

2. Calcula el valor de las notas de la escala diatónica, según el temperamento justo, a partir de los intervalos de 5ª(3/2), 4ª(4/3) y 3ª(5/4).

3. A partir de la escala anterior, ¿cuál es la frecuencia de un tono? ¿Y la de un semitono? Completa la tabla de la escala cromática.

Afinación/temperamento justo				
Intervalo	Nota	Origen numérico	Relación interválica	Cents
Unísono	Do			
Segunda menor	Do ♯ / Re ♭			
Segunda mayor	Re			
Tercera menor	Re ♯ / Mi ♭			
Tercera mayor	Mi			
Cuarta Justa	Fa			
Quinta disminuida	Sol ♭			
Cuarta aumentada	Fa ♯			
Quinta justa	Sol			
Sexta menor	Sol ♯ / La ♭			
Sexta mayor	La			
Séptima menor	Si ♭			
Sexta aumentada	La ♯			
Sèptima mayor	Si			
Octava	Do			

Table 14: Temperamento justo

4.3 Temperamento igual

1. ¿Cuál es la frecuencia de un semitono? ¿Y la de un tono?

2. Completa la tabla de la escala cromática.

Temperamento igual				
Intervalo	Nota	Origen numérico	Relación interválica	Cents
Unísono	Do			
Segunda menor	Do $\sharp$ / Re $\flat$			
Segunda mayor	Re			
Tercera menor	Re $\sharp$ / Mi $\flat$			
Tercera mayor	Mi			
Cuarta Justa	Fa			
Quinta disminuida	Fa $\sharp$ / Sol $\flat$			
Quinta justa	Sol			
Sexta menor	Sol $\sharp$ / La $\flat$			
Sexta mayor	La			
Séptima menor	La $\sharp$ / Si $\flat$			
Sèptima mayor	Si			
Octava	Do			

Table 15: Temperamento igual

4.4 Acústica: cent

1. ¿Cuál es la frecuencia de un cent?

2. ¿Cuántos cents hay en un semitono? ¿Y en un tono?

3. Teniendo en cuenta que $\frac{f_2}{f_1} = \sqrt[1200]{2^c}$, calcula los cents de una 5ª justa (según la afinación pitagórica).

4. Completa las tablas anteriores, calculando los cents de cada uno de los intervalos.

5. A partir de la frecuencia de referencia La_4 440 (Hz), completa la siguiente tabla calculando las frecuencias de las siguientes notas (de un piano) en igual temperamento.

4.4.1 Tabla de frecuencias

Frecuencias en igual temperamento (Hz)							
Do_0	16.352	Do_2		Do_4		Do_6	
$Do_0\sharp/Re_0\flat$		$Do_2\sharp/Re_2\flat$		$Do_4\sharp/Re_4\flat$		$Do_6\sharp/Re_6\flat$	
Re_0		Re_2		Re_4		Re_6	
$Re_0\sharp/Mi_0\flat$		$Re_2\sharp/Mi_2\flat$		$Re_4\sharp/Mi_4\flat$		$Re_6\sharp/Mi_6\flat$	
Mi_0		Mi_2		Mi_4		Mi_6	
Fa_0		Fa_2		Fa_4		Fa_6	
$Fa_0\sharp/Sol_0\flat$		$Fa_2\sharp/Sol_2\flat$		$Fa_4\sharp/Sol_4\flat$		$Fa_6\sharp/Sol_6\flat$	
Sol_0		Sol_2		Sol_4		Sol_6	
$Sol_0\sharp/La_0\flat$		$Sol_2\sharp/La_2\flat$		$Sol_4\sharp/La_4\flat$		$Sol_6\sharp/La_6\flat$	
La_0		La_2		La_4	440.00	La_6	
$La_0\sharp/Si_0\flat$		$La_2\sharp/Si_2\flat$		$La_4\sharp/Si_4\flat$		$La_6\sharp/Si_6\flat$	
Si_0		Si_2		Si_4		Si_6	
Do_1		Do_3		Do_5		Do_7	
$Do_1\sharp/Re_1\flat$		$Do_3\sharp/Re_3\flat$		$Do_5\sharp/Re_5\flat$		$Do_7\sharp/Re_7\flat$	
Re_1		Re_3	146.83	Re_5		Re_7	
$Re_1\sharp/Mi_1\flat$		$Re_3\sharp/Mi_3\flat$		$Re_5\sharp/Mi_5\flat$		$Re_7\sharp/Mi_7\flat$	
Mi_1		Mi_3		Mi_5		Mi_7	
Fa_1		Fa_3		Fa_5		Fa_7	
$Fa_1\sharp/Sol_1\flat$		$Fa_3\sharp/Sol_3\flat$		$Fa_5\sharp/Sol_5\flat$		$Fa_7\sharp/Sol_7\flat$	
Sol_1		Sol_3		Sol_5		Sol_7	
$Sol_1\sharp/La_1\flat$		$Sol_3\sharp/La_3\flat$		$Sol_5\sharp/La_5\flat$		$Sol_7\sharp/La_7\flat$	
La_1		La_3		La_5		La_7	
$La_1\sharp/Si_1\flat$		$La_3\sharp/Si_3\flat$		$La_5\sharp/Si_5\flat$		$La_7\sharp/Si_7\flat$	
Si_1		Si_3		Si_5		Si_7	
						Do_8	4186.0

Table 16: Frecuencias en igual temperamento