GEOMETRIA

(Plana y espacio)

2°B MARTA TANTOS ARANDA N° 38

INDICE:

Geometría Plana

11-1-88

POLIGONOS

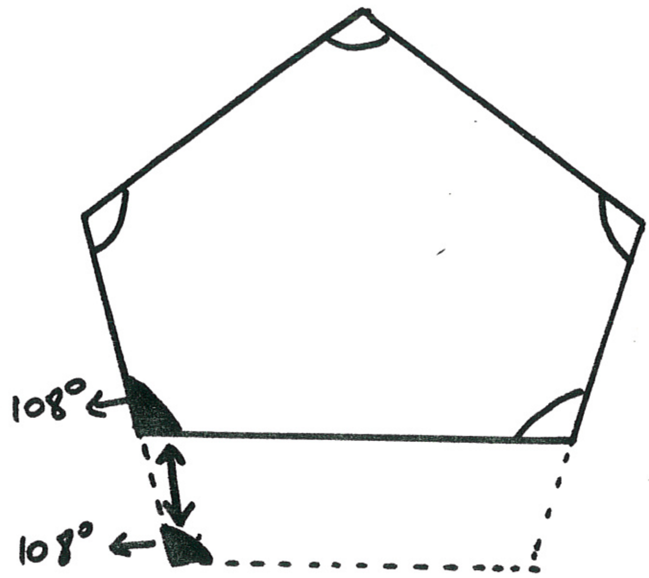
Nº de ángulos	Nombre	Regulares
3	TRIANGULO	EQUILATERO
4	CUADRANGULO	CUADRADO
5	PENTAGONO	P. REGULAR
6	HEXAGONO	
7	HEPTAGONO	
8	OCTOGONO	
9	ENEAGONO	
10	DECAGONO	

EQUILATERO: de lados iguales

EQUIANGULO: de ángulos iguales

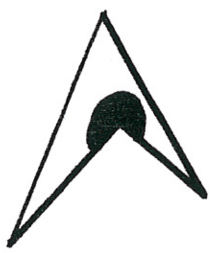
* El cuadrado es un caso particular del rectángulo y del rombo

* DIBUJAR UN PENTAGONO EQUIANGULO Y DE LADOS ALGUNO DIFERENTE (no equilátero)



CONCAVO: ángulo de más de 180°

CONVEXO: ángulo de menos de 180°



← Es un polígono cóncavo por tener un ángulo de más de 180°

, 12-1-88

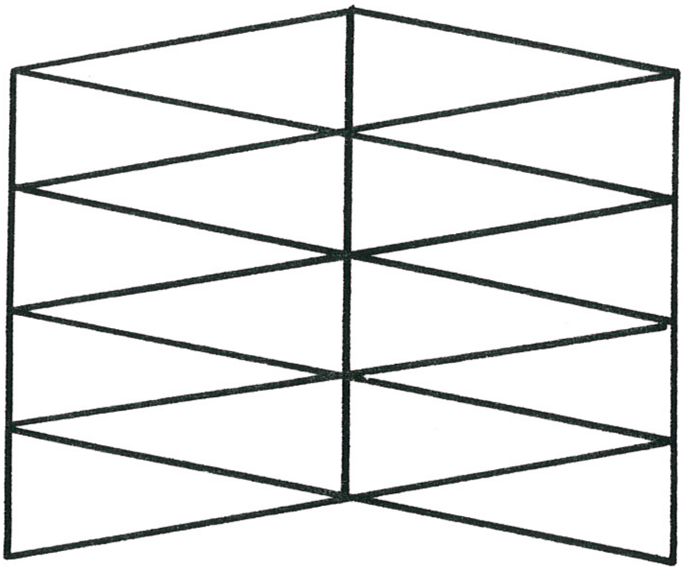
* ¿CON QUE POLIGONOS REGULARES SE PUEDE EMBALDOSAR UNA HABITACION?

- Cuadrados SI (4 ángulos en cada esquina 360°)
- Pentágonos NO (3 ángulos en cada esquina que no llegan a 360°.

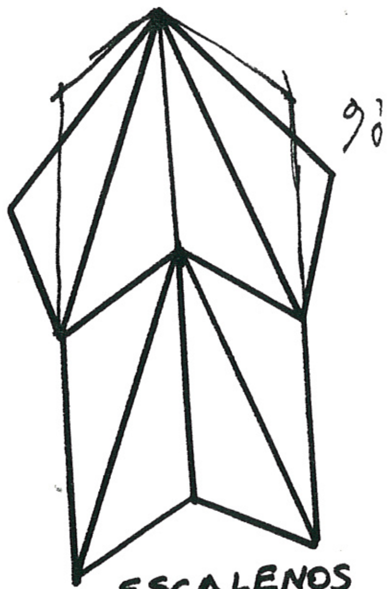
• Triángulos SI (6 ángulos en cada esquina 360°)

• Hexágonos SI (3 ángulos en cada esquina)

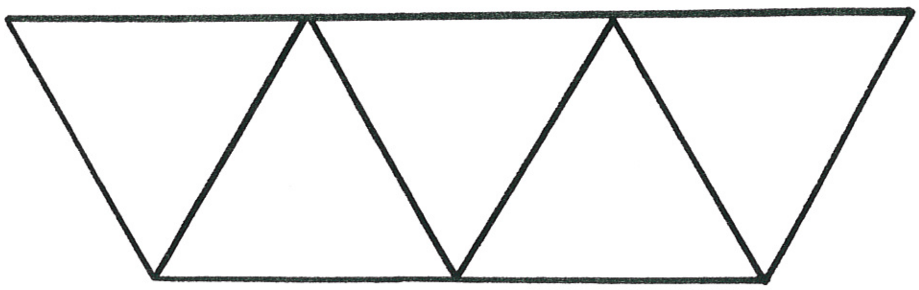
* ¿CON QUE TRIANGULOS SE PUEDE EMBALDOSAR? Con todos.



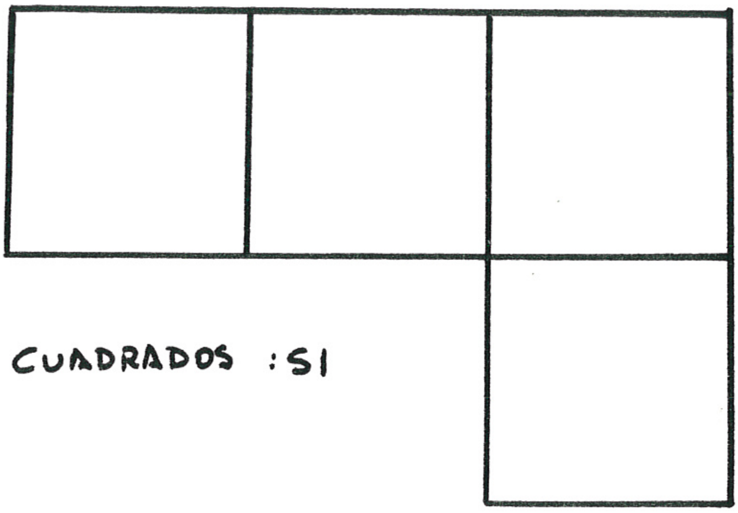
ISOSCELES



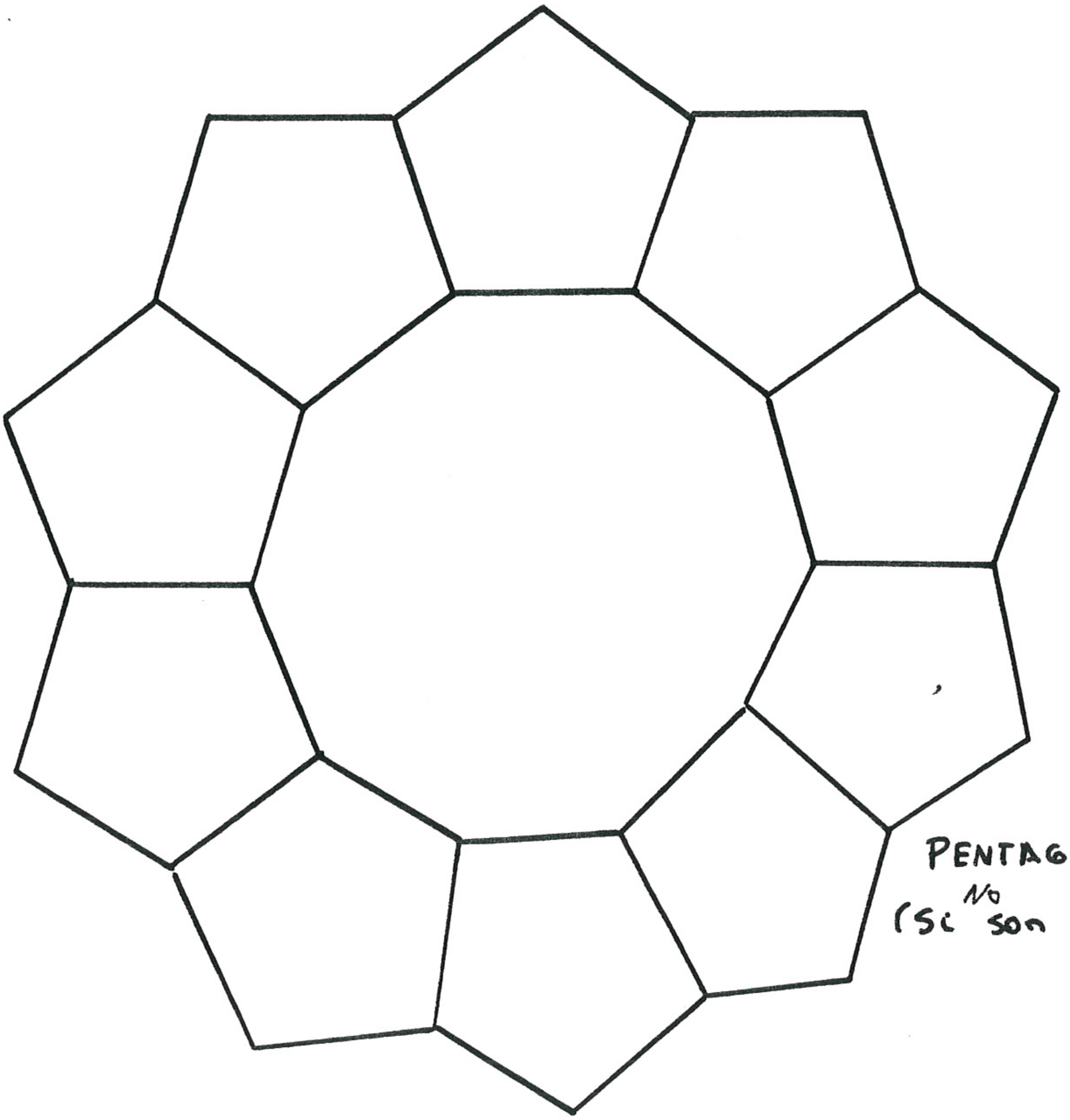
ESCALENOS



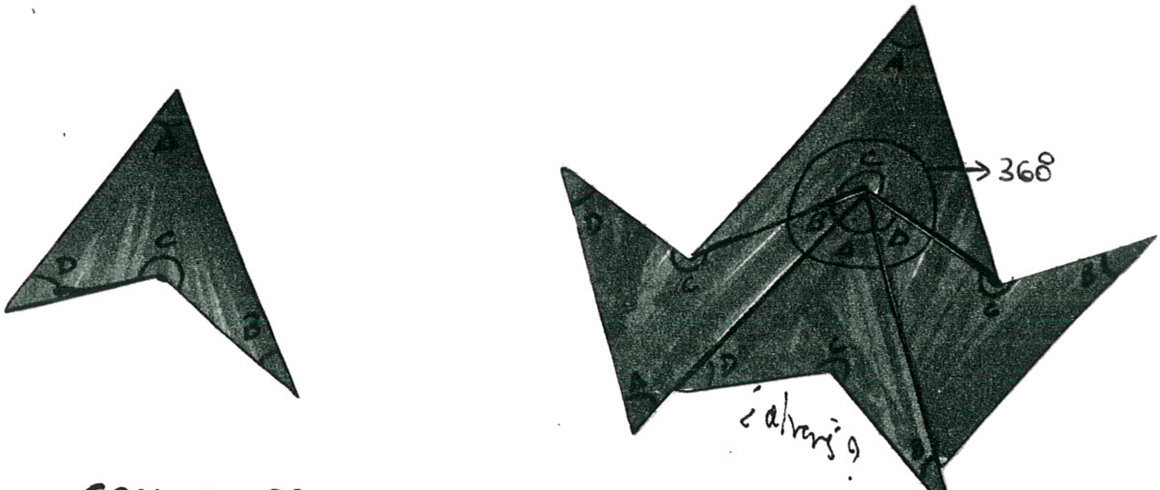
EQUILATEROS



CUADRADOS : SI

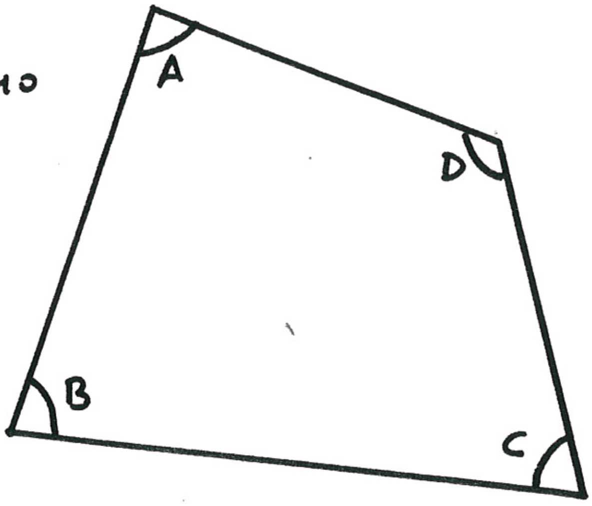


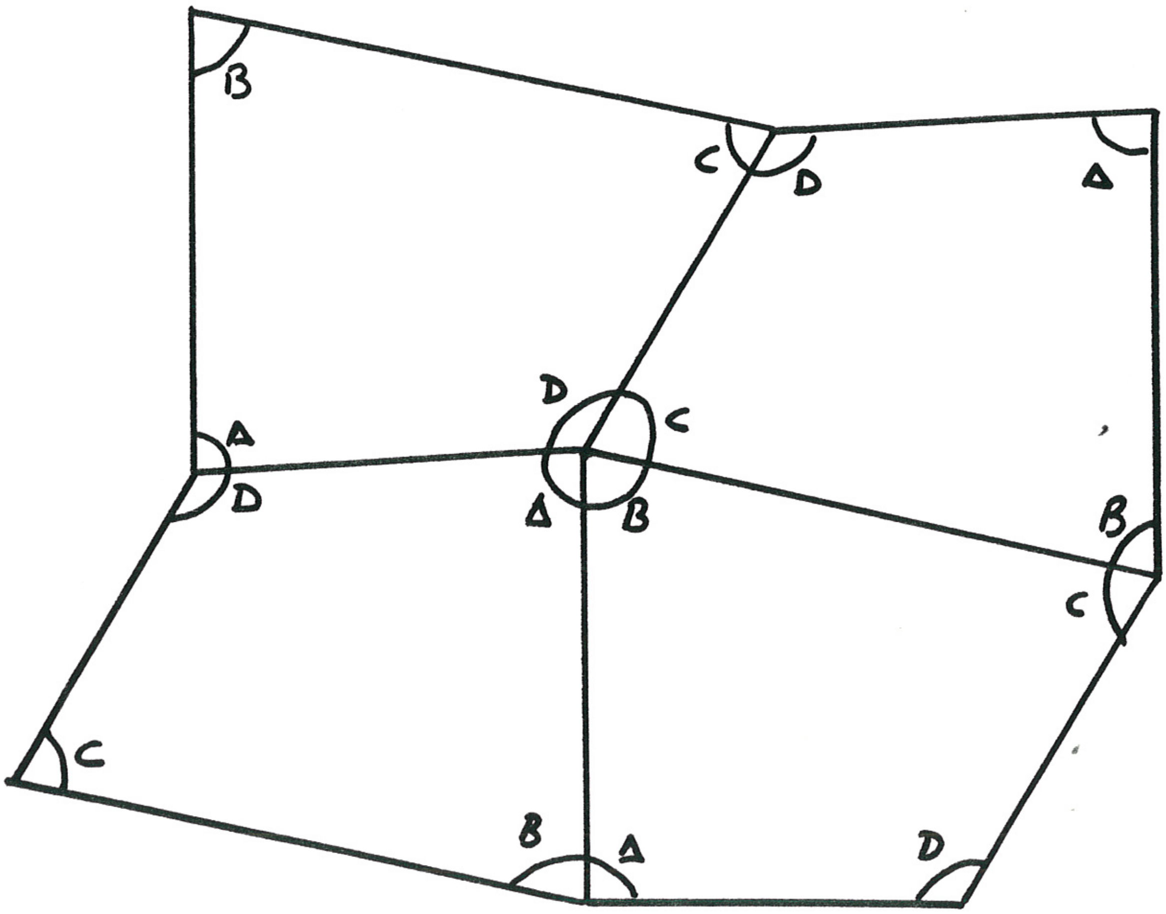
PENTAGONOS : SI
(Si No son regulares)

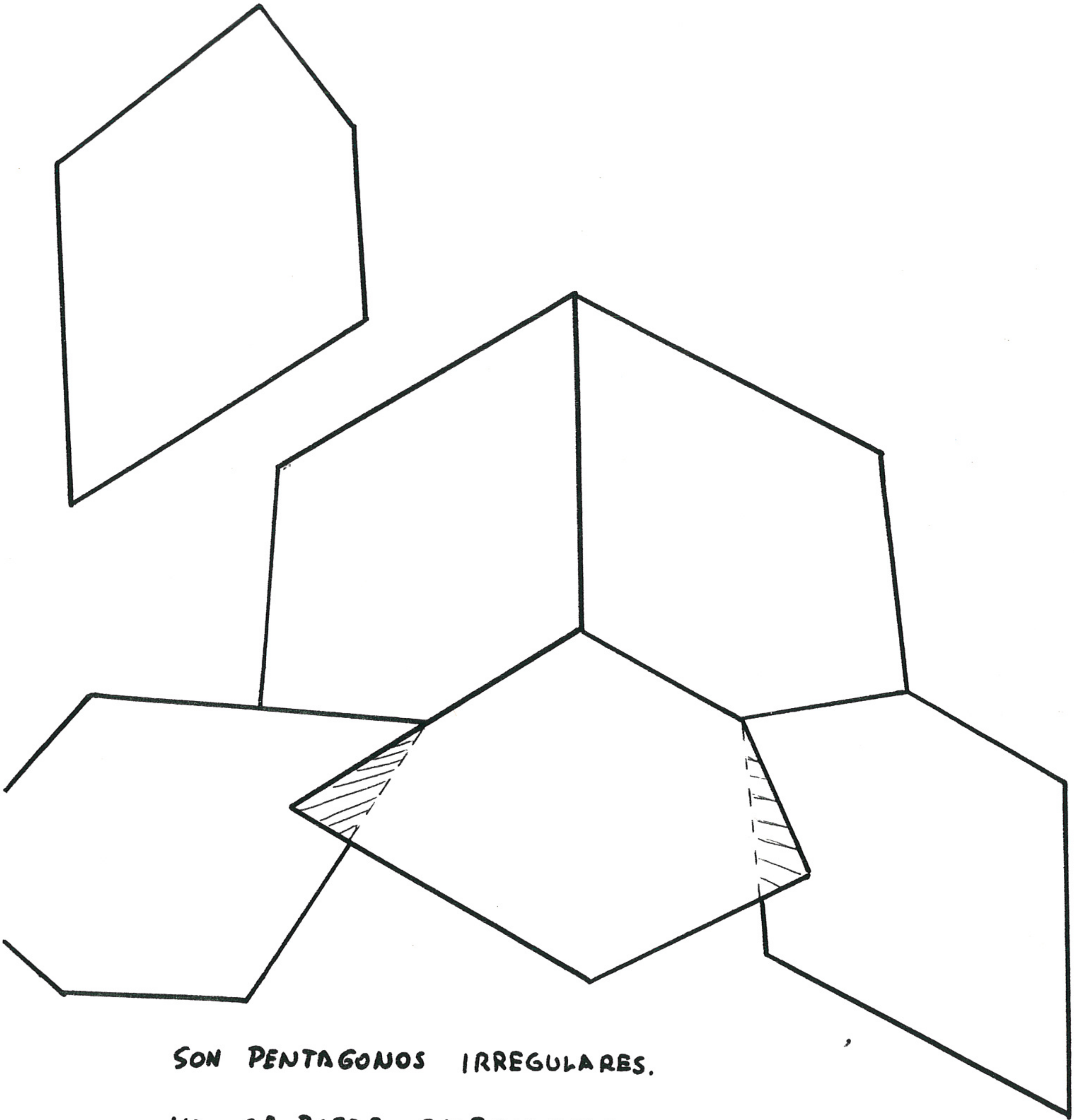


CON CUADRILATEROS SI SE PUEDE. EN CADA PUNTO SE JUNTAN UN VERTICE DE CADA TIPO. ENTRE TODOS SUMAN 360°. ES CONCAVO.

POLIGONO CONVEXO. OCURRE LO MISMO QUE EN EL ANTERIOR.



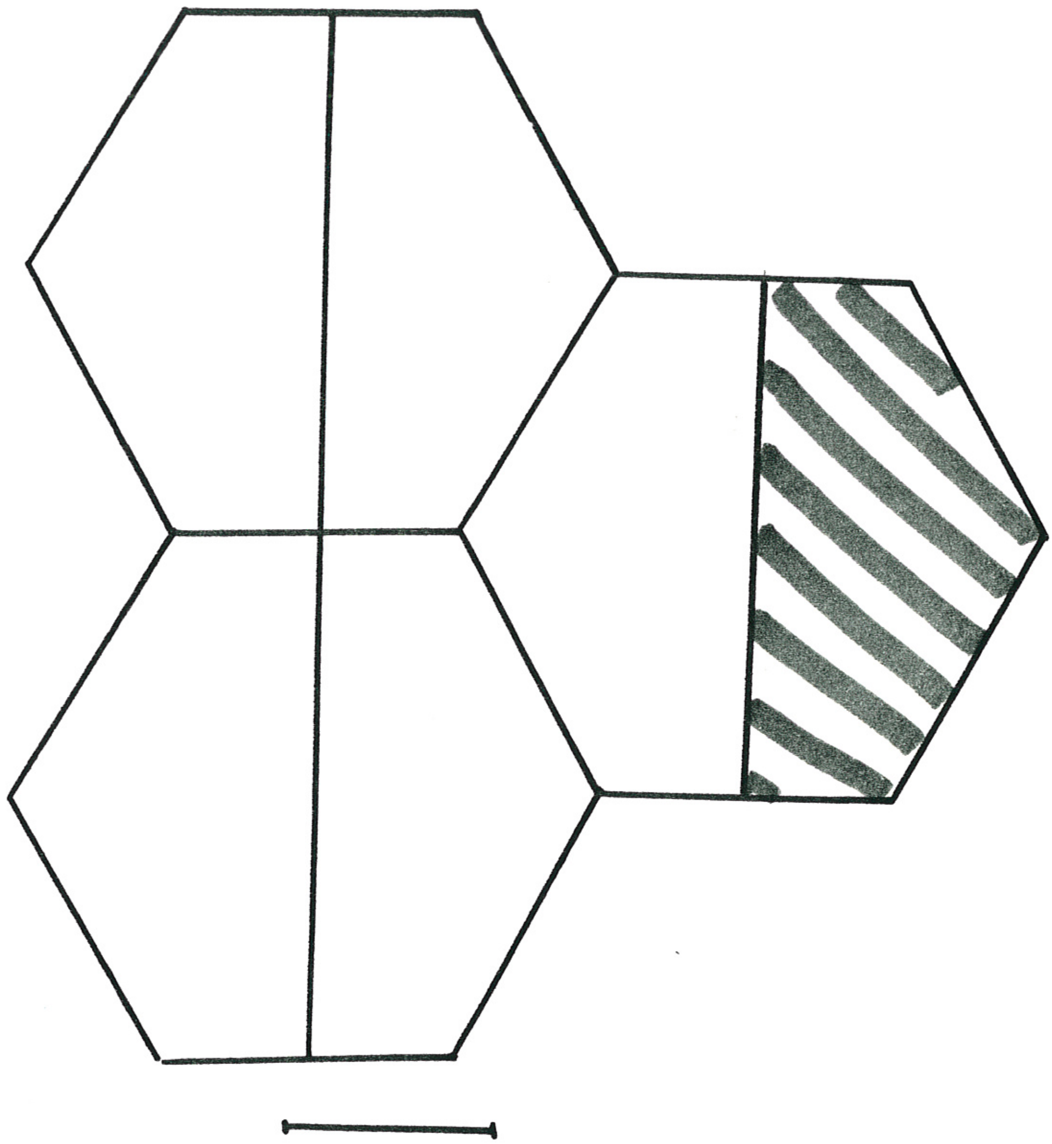


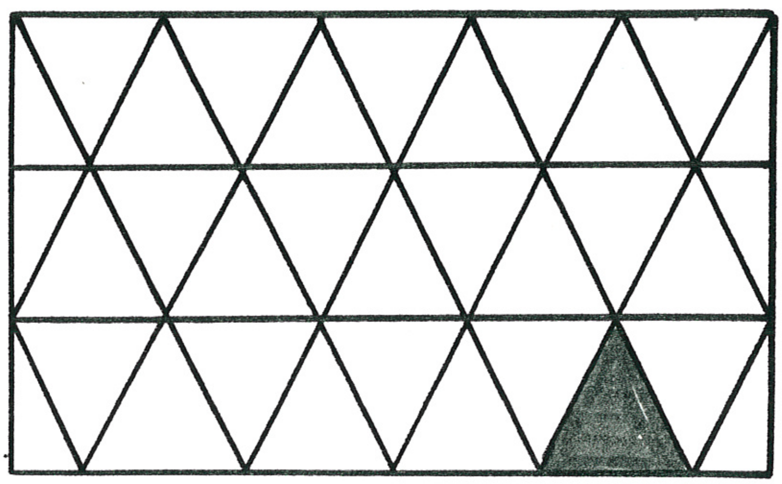


SON PENTAGONOS IRREGULARES.

NO SE PUEDE EMBALDOSAR, PORQUE AL JUNTAR, VERTICES SOBRAN O FALTAN GRADOS PARA LLEGAR A 360°. SOLO SE PUEDEN JUNTAR UNOS POCOS AL PRINCIPIO.

CON ESTOS PENTAGONOS DE UNA CLASE ESPECIAL, SI SE PUEDE EMBALDOSAR.





¿HAY MAS PUNTOS DONDE SE JUNTAN ANGULOS O TRIANGULOS?

- Según como se cuente saldrá más de cada cosa.

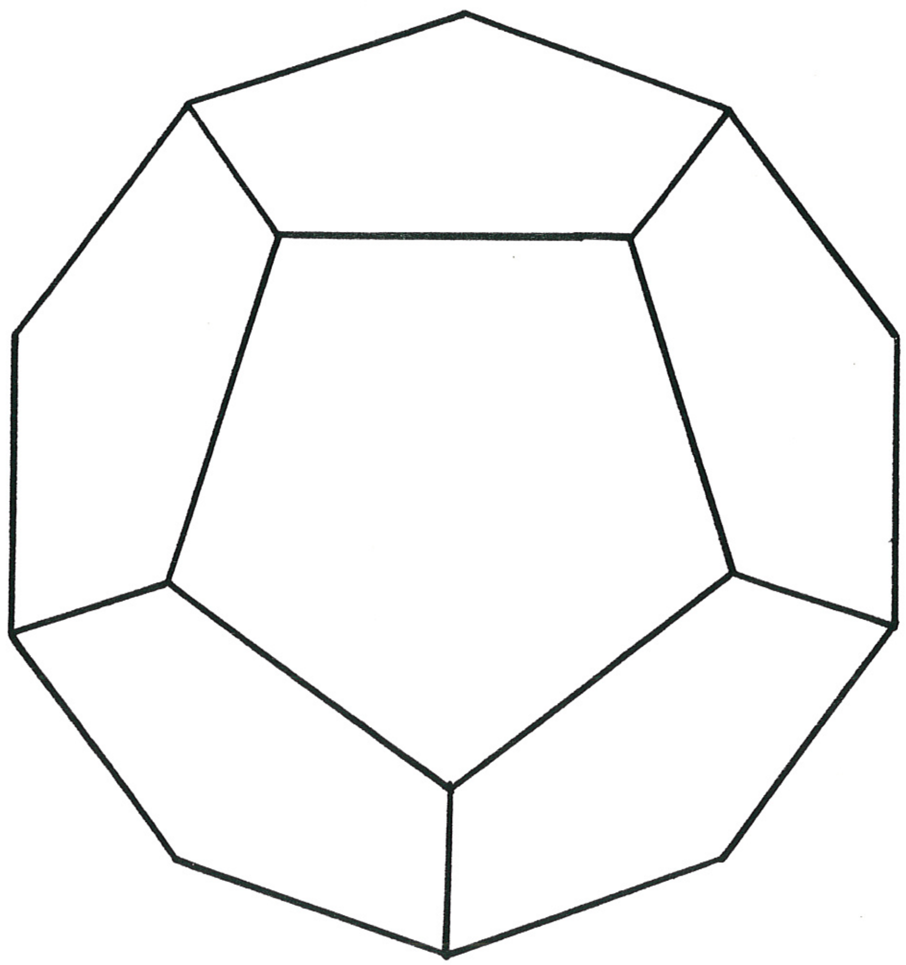
Puntos :	26	9
Triángulos :	33	27

Geometria del Espacio

CUERPOS CON CARAS PENTAGONALES

DODECAEDRO:

- CARAS: 12 pentágonos regulares
- VERTICES: 20 → en cada uno, se juntan 3 ángulos de 108°.
- ARISTAS: $\frac{12 \text{ caras} \cdot 5 \text{ aristas (de cada cara)}}{2} = 30$

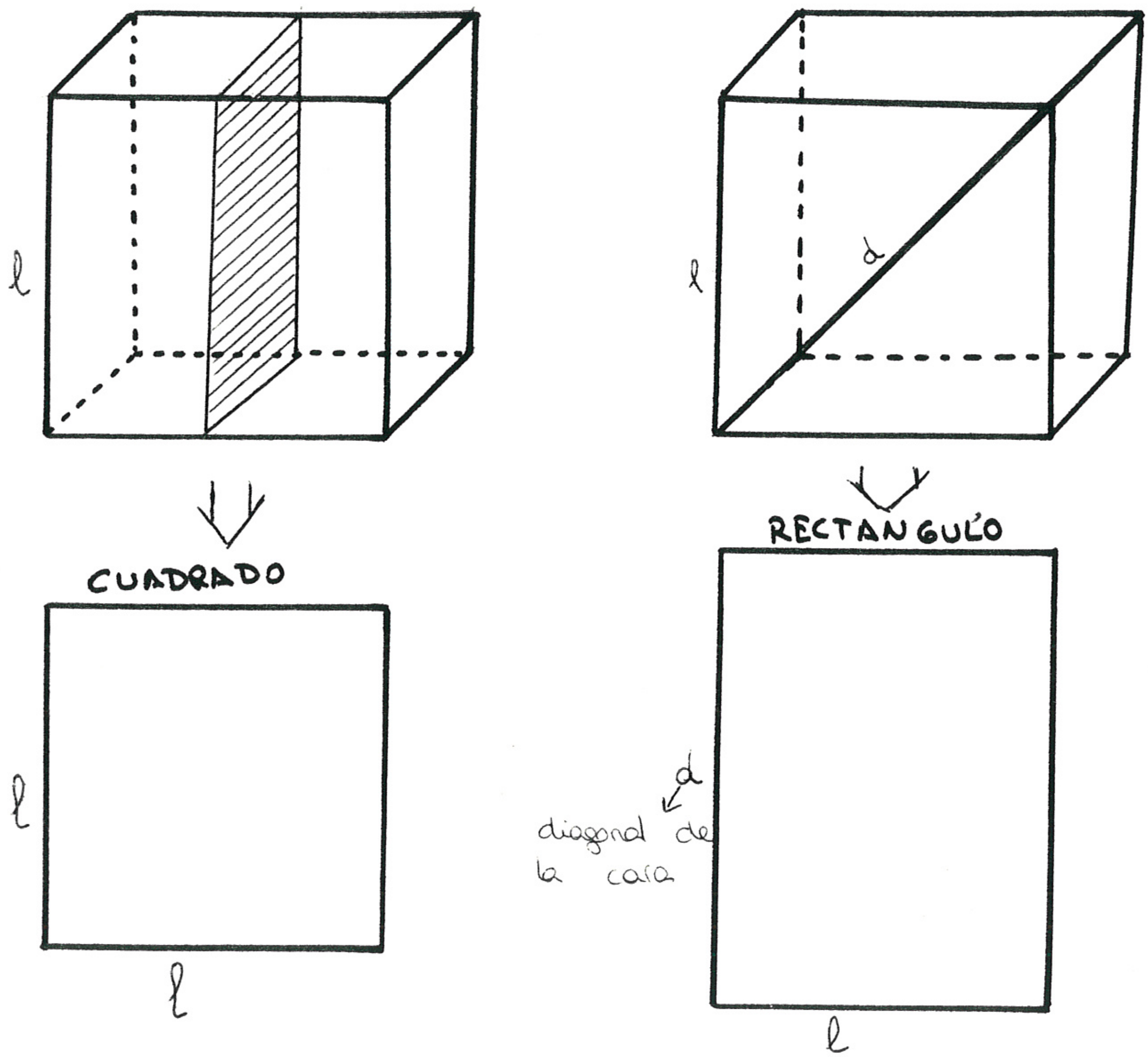


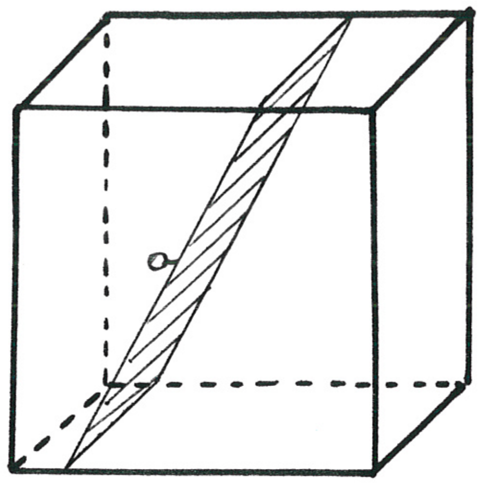
CUERPOS CON CARAS CUADRADAS

CUBO:

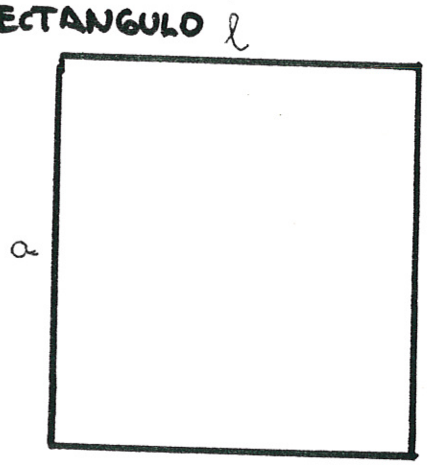
- CARAS: 6 cuadrados
- VERTICES: 8 → a cada uno de ellos les llegan 3 aristas.
- ARISTAS: $\frac{6 \cdot 4}{2} = 12$.

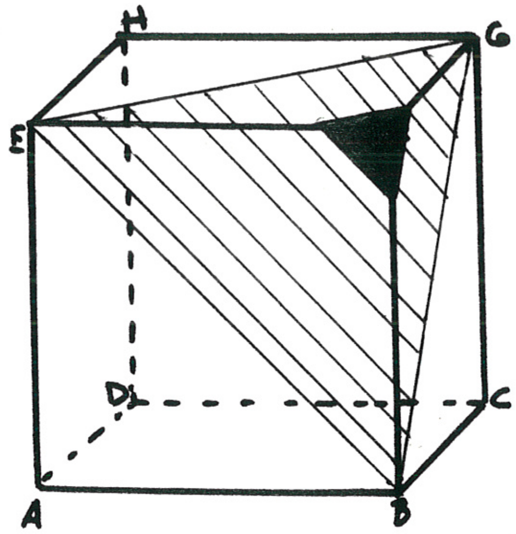
CORTES:



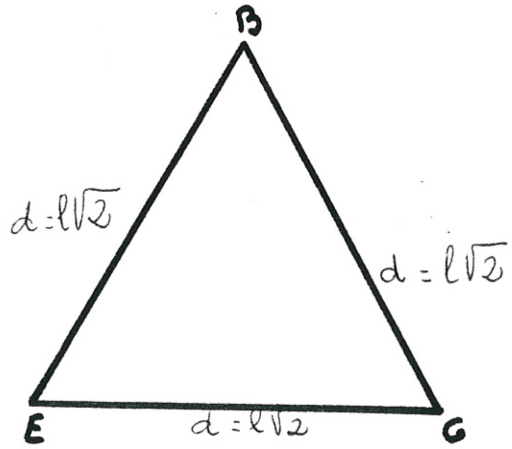


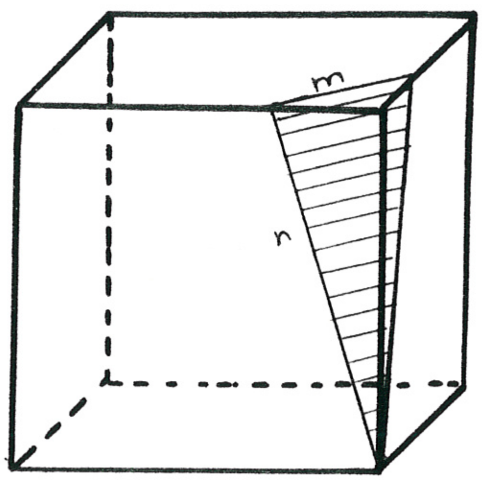
RECTANGULO



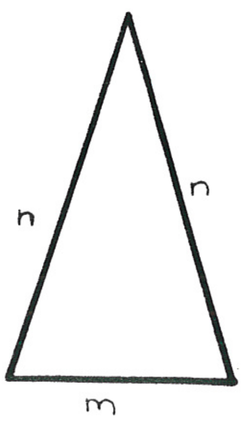


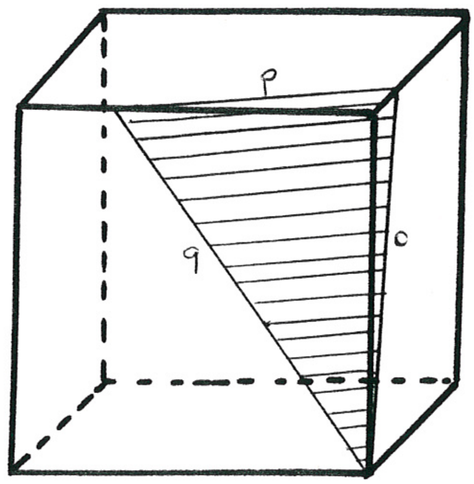
TRIANGULO EQUILATERO.



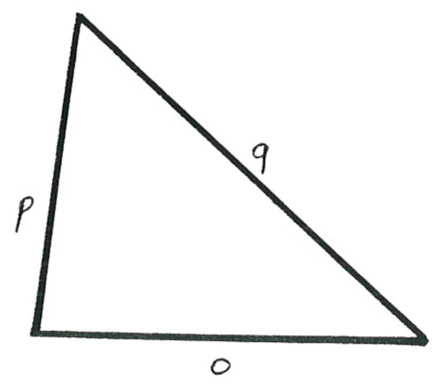


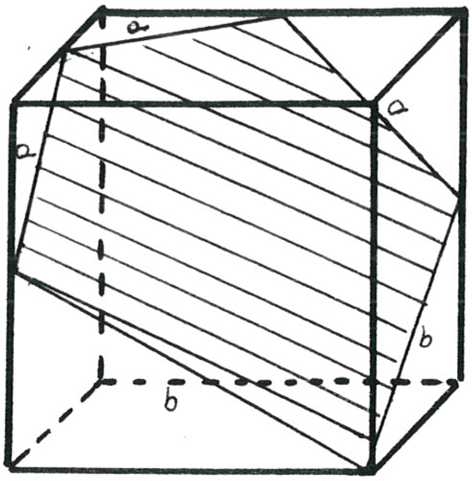
TRIANGULO ISOSCELES



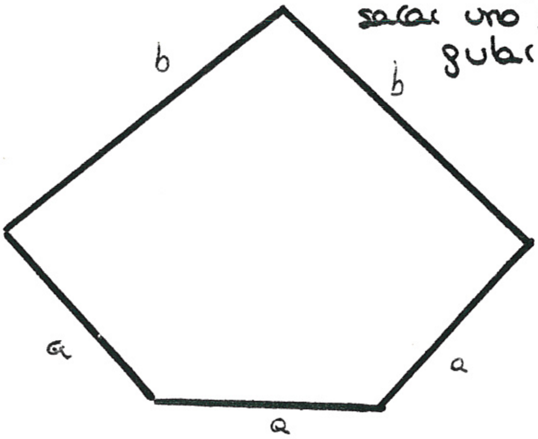


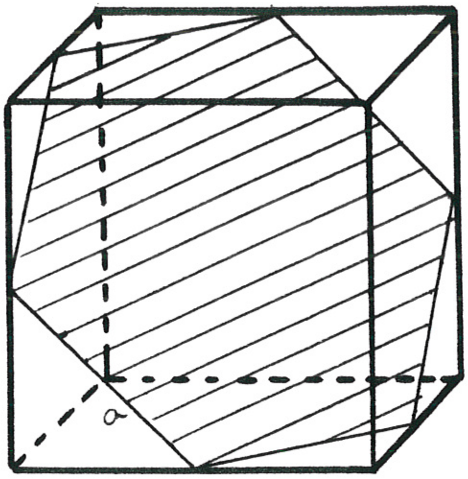
TRIANGULO ESCALENO.



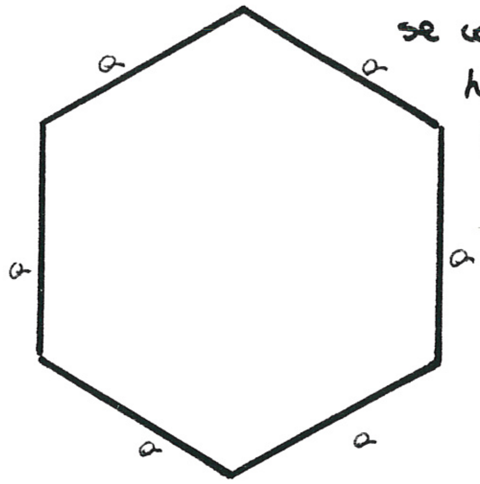


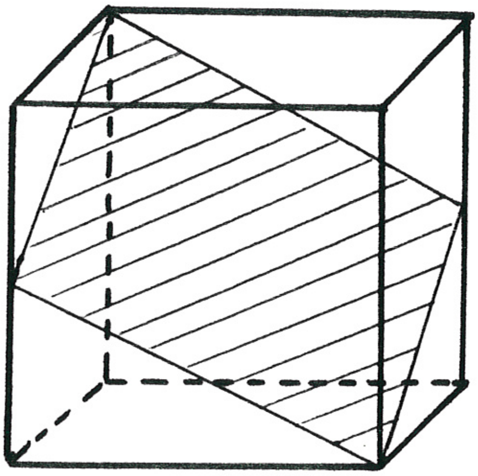
PENTAGONO IRREGULAR (No se puede sacar uno regular)



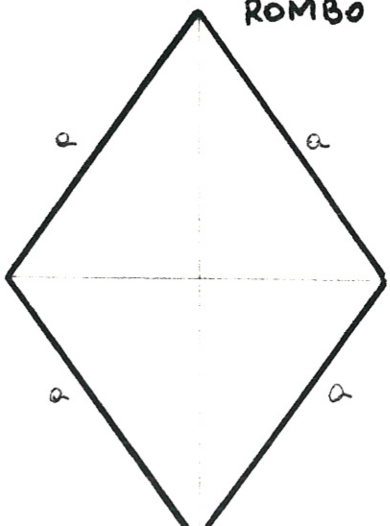


HEXAGONO REGULAR (Moviendo los vértices se construye el hexágono irregular)





ROMBO



- LADO DEL ROMBO:

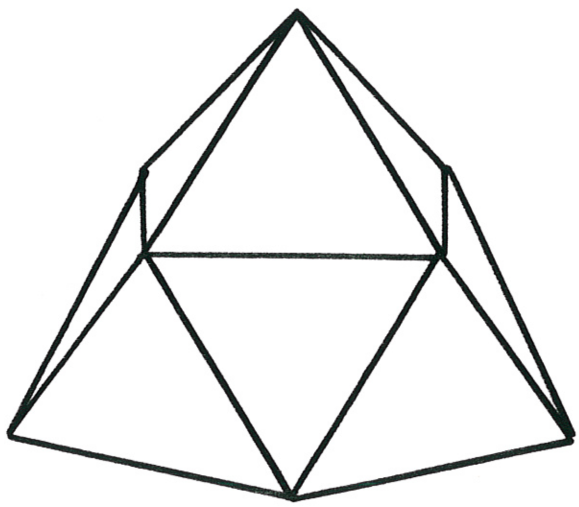
$$\sqrt{l^2+\frac{l^2}{4}} = \boxed{\frac{l\sqrt{5}}{2}}$$

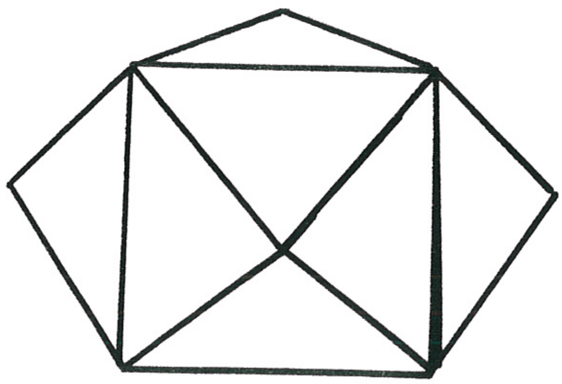
- Las diagonales son diferentes
- Se puede obtener un rombo irregular.

CUERPOS CON CARAS TRIANGULARES

1º

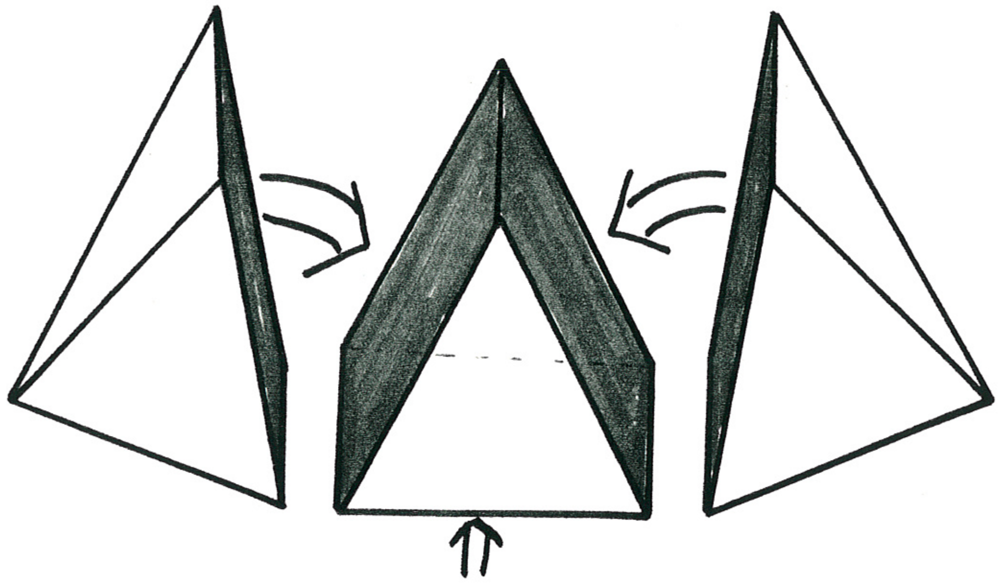
- CARAS: 14 triángulos equiláteros
- VERTICES: 9 → a 6 de ellos les llegan 5 aristas
  → a 3 de ellos les llegan 4 aristas
- ARISTAS: $\frac{14 \cdot 3}{2} = 21.$





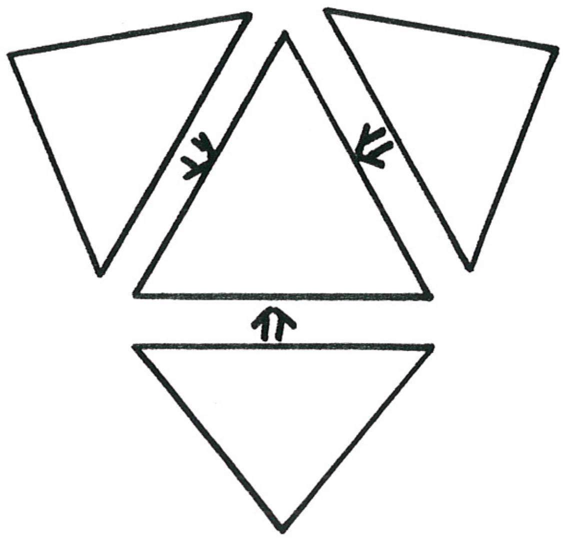
Al descomponer este cuerpo se obtienen 4 cuerpos:

- 3 pirámides cuadrangulares
- 1 prisma triangular.



En el cuadrado de la base, va otra pirámide cuadrangular.

* LAS CARAS DE NARANJA, SON LAS CUADRADAS.

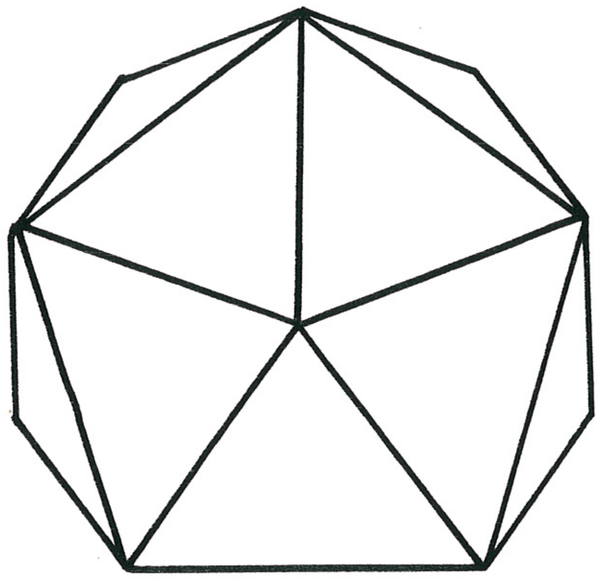


ICOSAEDRO

MEDIDA DE LA ARISTA	CARAS	VERTICES	ARISTAS
1	- Tiene 20 caras triangulares, regulares (pequeñas)	- Consta de 12 vértices a los que a todos llegan 5 aristas	- $\frac{20 \cdot 3}{2} = 30$ aristas con medida "1" (triángulos pequeños)
2	- Tiene 20 caras triangulares. Son triángulos equiláteros. Cada una consta de 4 triángulos pequeños. - En total hay 80 triángulos pequeños.	- Consta de 12 vértices → a todos le llegan 5 aristas.	- $\frac{20 \cdot 3}{2} = 30$ aristas con medida "2"
3	- Tiene 20 caras hexagonales regulares. Cada una de ellas está formada a su vez por 6 triángulos equiláteros. - Triángulos de lado 1, hay 120	- Tiene 12 → a todos les llegan 5 aristas	- $\frac{20 \cdot 3}{2} = 30$ aristas, de medida 3 veces el 1.

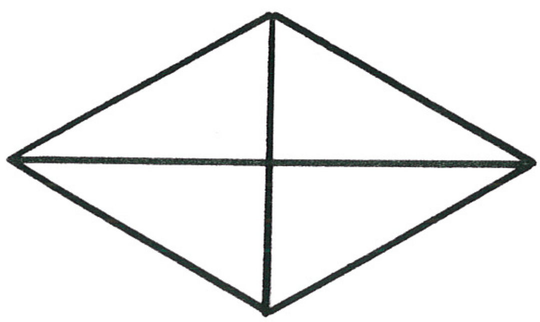
2.º ICOSAEDRO:

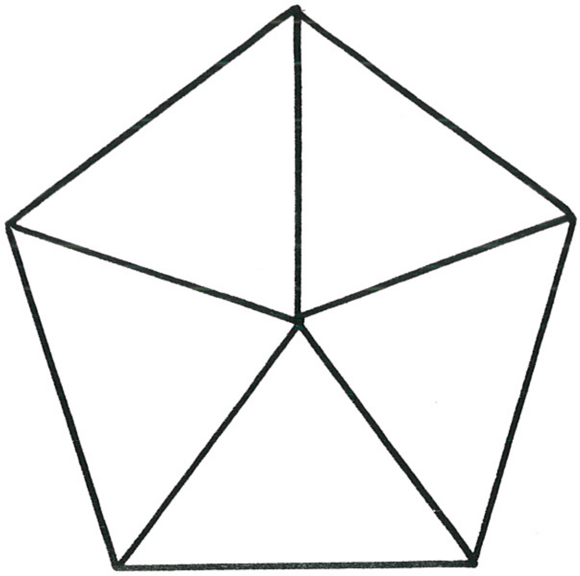
- CARAS: 20 caras (triángulos equiláteros)
- VERTICES: 12 → a todos les llegan 5 aristas
- ARISTAS: $\frac{20 \cdot 3}{2} = 30$.



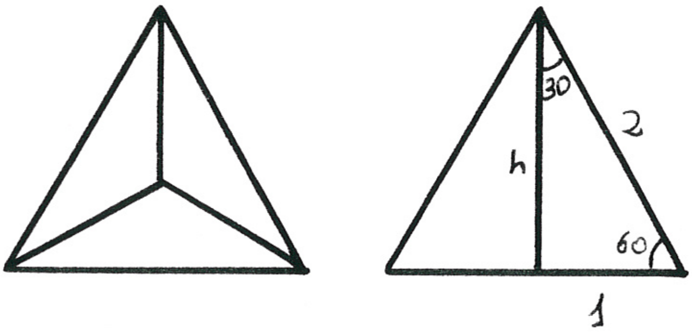
3.º BIPIRAMIDE PENTAGONAL

- CARAS: 10 triángulos equiláteros
- VERTICES: 7 → a 2 de ellos les llegan 5 aristas
  → a 5 de ellos les llegan 4 aristas
- ARISTAS: $\frac{10 \cdot 3}{2} = 15$.





* ¿CUAL ES LA ALTURA?

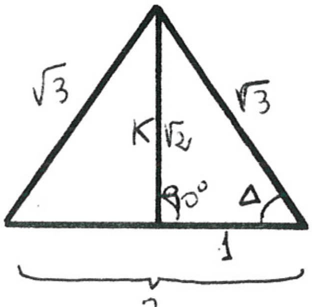


$$2^2 = 1^2 + h^2$$
$$h^2 = 2^2 - 1^2$$
$$h^2 = 3$$
$$\boxed{h = \sqrt{3}}$$

$$\boxed{\text{GENERAL} : \frac{l\sqrt{3}}{2}}$$

Al cortar el tetraedro, el triángulo interior tiene de lados:

1º = 2 arista
2º = $\sqrt{3}$ altura de la cara del triángulo
3º = $\sqrt{3}$ " " " " " " "



$$3 = 1^2 + K^2$$
$$K^2 = 2$$
$$\boxed{K = \sqrt{2}}$$

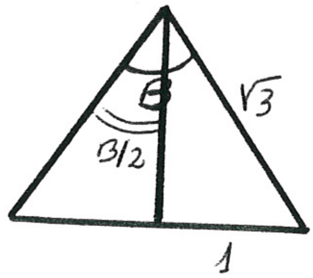
$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1'7320..}{3} = 0'5773...$$

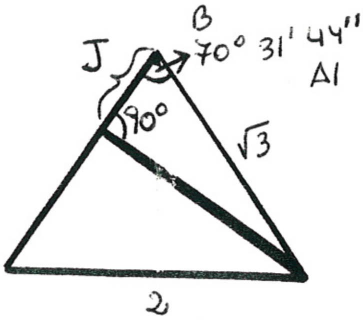
$A = 54'73561^\circ$

$A = 54^\circ\ 44'\ 8,2''$

$$\begin{array}{lccc} & 89^\circ & 59' & 60'' \\ & 54^\circ & 44' & 8'' \\ \hline B/2 \Rightarrow & 35^\circ & 15' & 52'' \end{array}$$

$\boxed{B = 70^\circ\ 31'\ 44''}$





Al trazar otra altura:

$\text{SEN } B = \frac{J}{\sqrt{3}}$

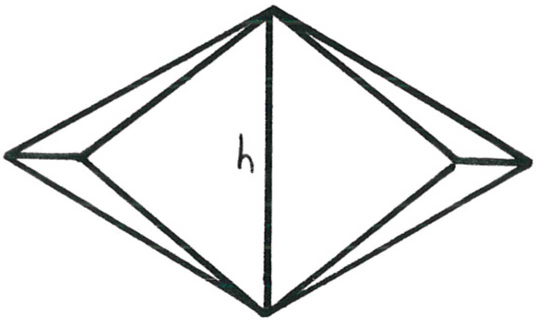
$J = \sqrt{3} \cdot \text{SEN } B$

$J = \sqrt{3} \cdot 0'9426$

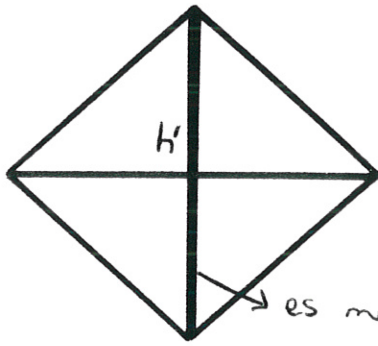
$\boxed{J = 1'632631}$

Por ello, la Bipirámide pentagonal nó está formada por 5 tetraedros regulares, porque el ángulo interior de la Bipirámide es de 72° (al seccionar el cuerpo en dos partes, por la cual se obtiene el corte más grande), pero el de el tetraedro hemos hallado de vale 70° 31'44''

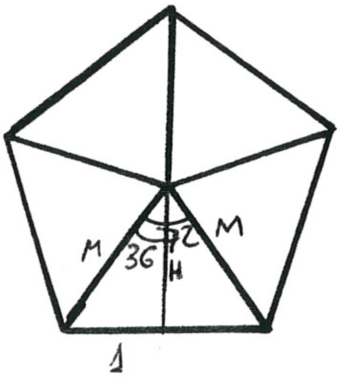
BIPIRAMIDE PENTAGONAL



TETRAEDRO



Al cortar la Bipirámide el corte es un pentágono.



$\tan 36 = \frac{1}{H}$

$H = \frac{1}{0'7265}$

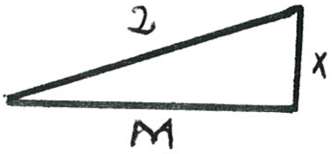
$\boxed{H = 1'3764624}$

$\text{SEN } 36 = \frac{1}{M}$

$M = \frac{1}{0'5878}$

$\boxed{M = 1'7012589}$

Dibujo del triángulo que tiene de base M, hipotenusa 2, y altura X (altura de la pirámide pentagonal.



$x^2 = 4 - M^2$

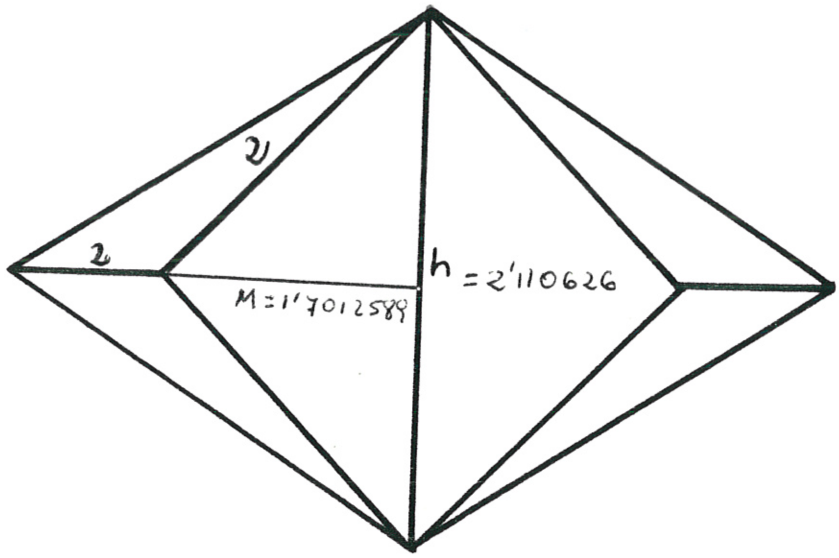
$x^2 = 4 - 2'8942818$

$X = \sqrt{1'1057182} = \boxed{1'0515313}$

ALTURA DE LA BIPIRAMIDE $= X \cdot 2 = 1'055313 \cdot 2 =$

$\boxed{2x = 2'110626}$

INTERIOR DE LA BIPIRAMIDE.

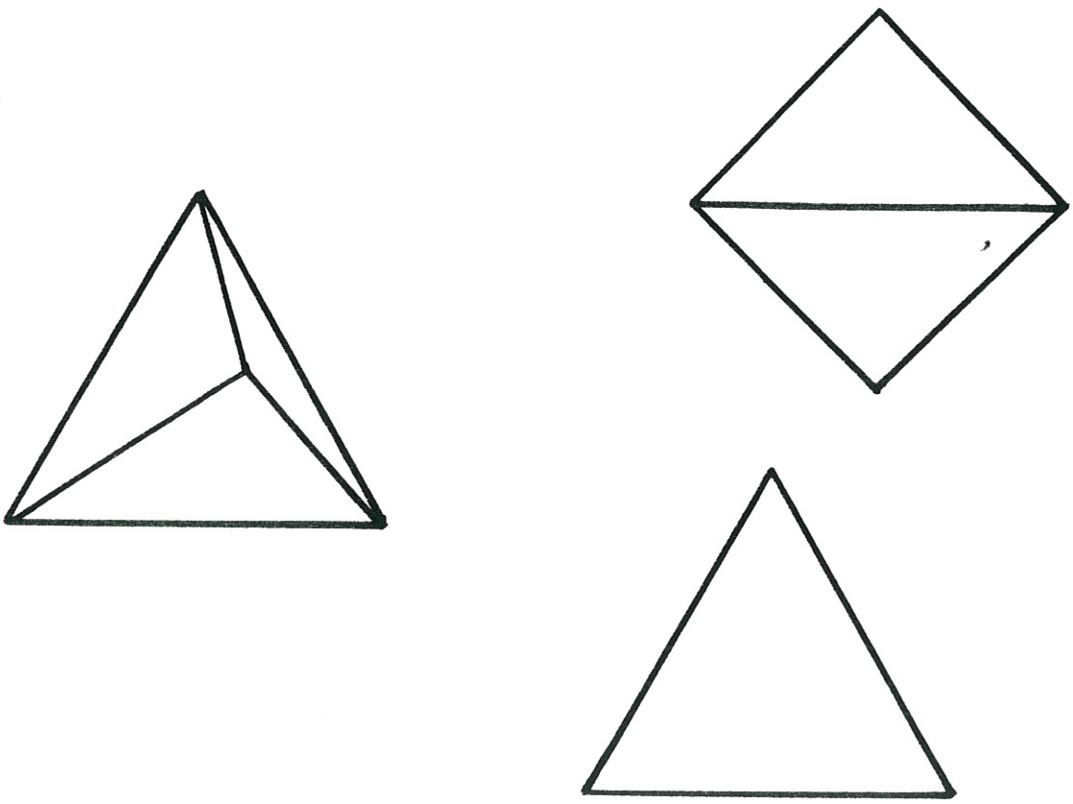


4.- TETRAEDRO: (de arista 1)

CARAS: 4 triángulos equiláteros

VERTICES 4 → a todos les llegan 3 aristas

ARISTAS: $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

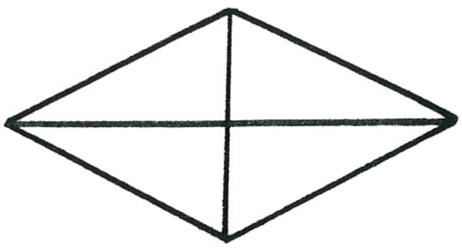


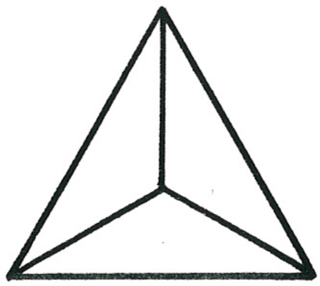
5.º **BITETRAEDRO**

CARAS: 6 triángulos equiláteros

VERTICES: 5 → a 2 de ellos les llegan 3 aristas
↘ a 3 de ellos les llegan 4 aristas.

ARISTAS: $9 = \frac{6 \cdot 3}{2}$



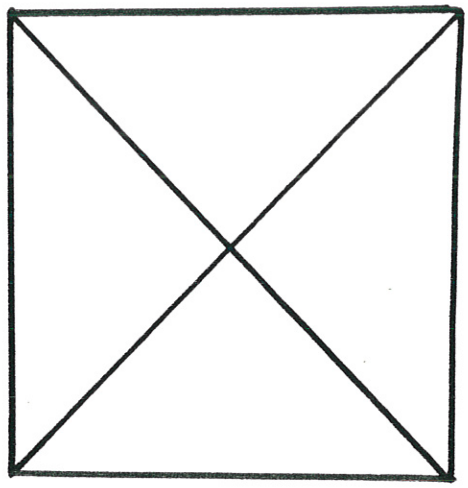


6.º **OCTAEDRO**

CARAS : 8 triángulos equiláteros

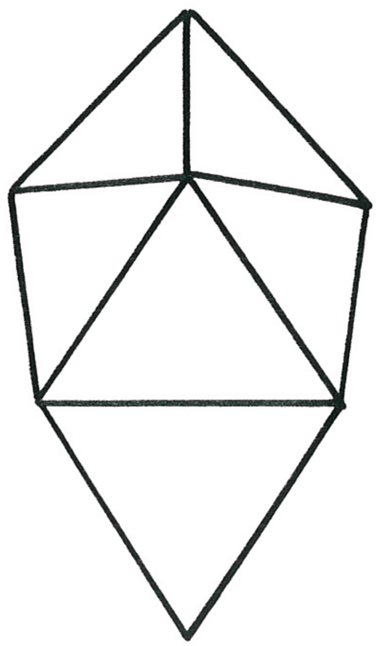
VERTICES: 6 → a todos les llegan 4 aristas.

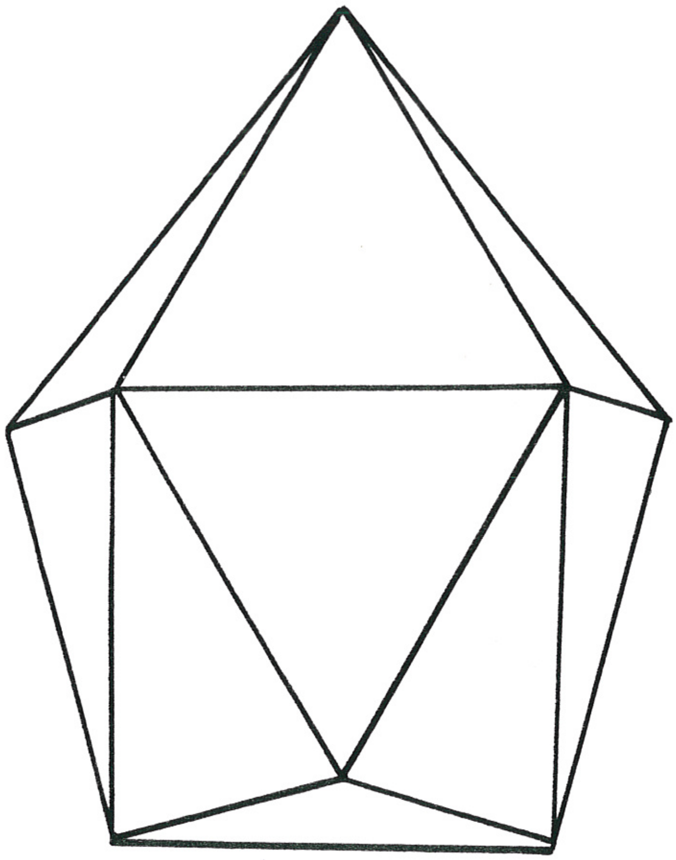
ARISTAS 12 aristas.



7° **DELTAEDRO 16 CARAS**

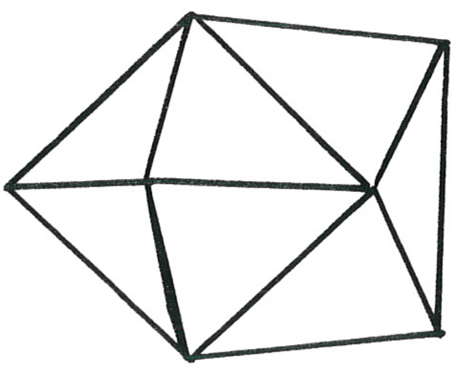
- CARAS: 16 triángulos equiláteros
- VERTICES: 10 → a 2 llegan 4 aristas
  → a 8 llegan 5 aristas.
- ARISTAS: $24 = \frac{16 \cdot 3}{2}.$





8.- DELTAEDRO DE 12 CARAS

- CARAS: 12 triángulos equiláteros.
- VERTICES: 8 → a 4 llegan 5 aristas
  → a 4 llegan 4 aristas
- ARISTAS: $\frac{12 \cdot 3}{2} = 18$.



DELTAEDROS

NOMBRE	CARAS	VERTICES	ARISTAS
TETRAEDRO	4	4	6
BIPIRAMIDE TRIANGULAR	6	5	9
OCTAEDRO	8	6	12
BIPIRAMIDE PENTAGONAL	10	7	15
DELTA - 12	12	8	18
DELTA - 14	14	9	21
DELTA - 16	16	10	24
ICOSAEDRO	20	12	30

Se cumple el Teorema de Euler:

$$\boxed{C + V = A + 2}$$

- Como se puede observar en el cuadro, todos los cuerpos, tienen el nº de caras pares.

¿Los vértices y aristas se alternan según el tamaño?

- El nº de caras va aumentando de 2 en 2 a medida que el cuerpo lo hacemos mayor.

En el único sitio donde no coincide esto es pasar del Delta-16 al Delta-18 que no existe porque al juntarse 6 triángulos se forman planos (caras hexagonales).

Por lo tanto del Delta-16 pasaremos al Icosaedro de 20 caras.

- A medida que vamos añadiendo 2 caras a cada cuerpo para hacerlo mayor, los vértices aumentan de 1 en 1.

- Con las aristas pasa igual pero cada vez se añaden 3 nuevas aristas.

FORMACION DE DELTAEDROS

(a partir del tetraedro)

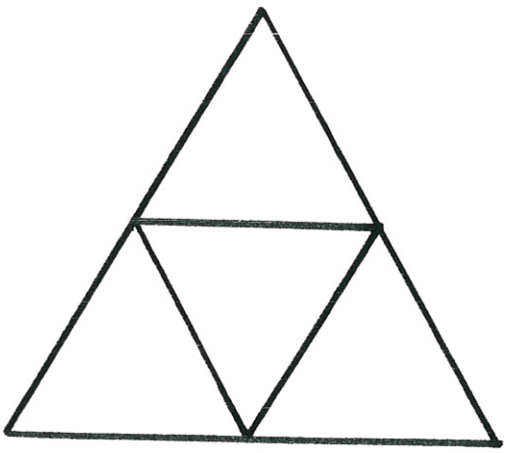
	C	V	A
TETRAEDRO:	4	4	6
BITETRAEDRO: Se levanta una cara del tetraedro y se añaden 2 caras triangulares.	6	5	9
OCTAEDRO: Se abren 2 aristas, que una punta acaba en un vértice donde se junten 4 aristas y en el otro 3 aristas (verticalmente). Tienen que estar seguidas en línea recta. Se colocan 2 caras triangulares, una en cada arista abierta.	8	6	12
BIPIRAMIDE PENTAGONAL: Se abren 2 aristas del octaedro, en el mismo sentido que el paso anterior, pero ahora se junten en un punto 4 y en el otro igual nº de aristas, se colocan 2 nuevas caras.	10	7	15
DELTA-12: Se abren 2 aristas, en las que sus vértices se junten con otras 3. Seguidamente se introducen otras 2 caras	12	8	18
DELTA-14: Se abren 2 aristas del delta-12, que en el vértice común se junten 5 aristas y en sus extremos 4. Luego se colocan 2 caras más.	14	9	21

	C	V	A
DELTA-16: Se abren 2 aristas del delta-14, que se juntan en un vértice de 5 aristas y a sus extremos se juntan 4 aristas. Más tarde, se añaden 2 triángulos equiláteros.	16	10	2[illegible]
ICOSAEDRO: Se abren 3 aristas: 2 de ellas tienen una esquina común a otras 3 aristas y la otra esquina a 4 aristas más. La 3 arista que se abre es una que se une por cada lado a una de las 2 anteriores. A las 2 aristas primeras se añade una cara a cada una, a la última arista se añaden 2 caras triangulares.	20	12	30

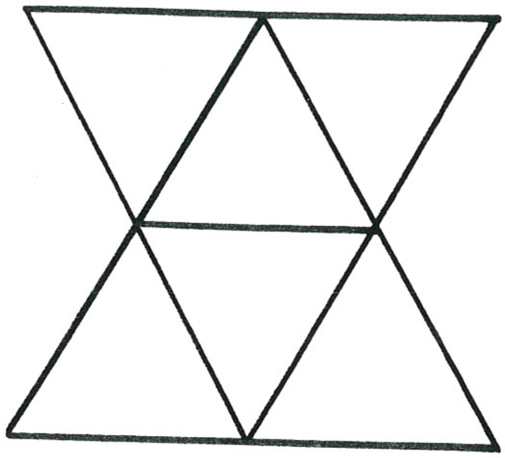
* ¿CUANTOS DELTAEDROS HAY? (CONVEXOS) = 8

DESARROLLOS:

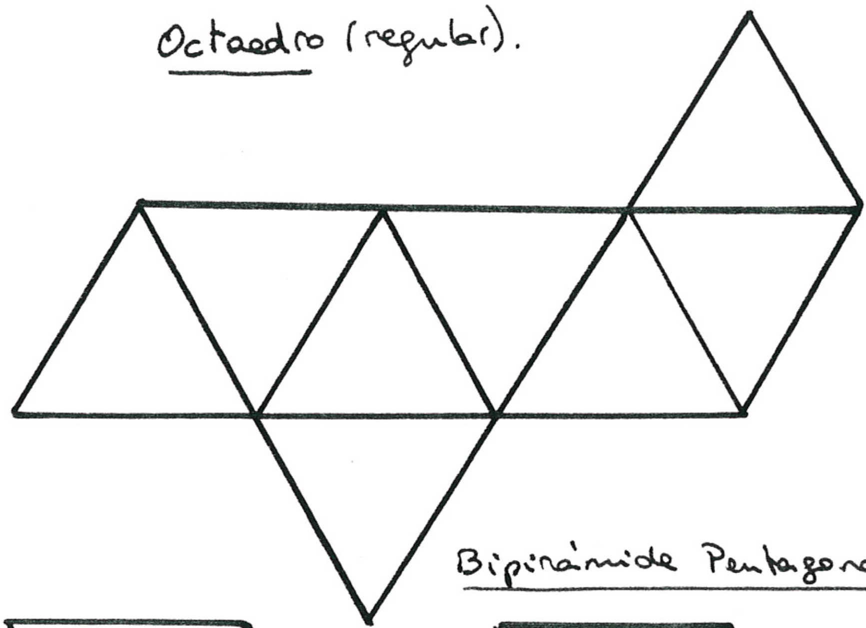
tetraedro (Regular).



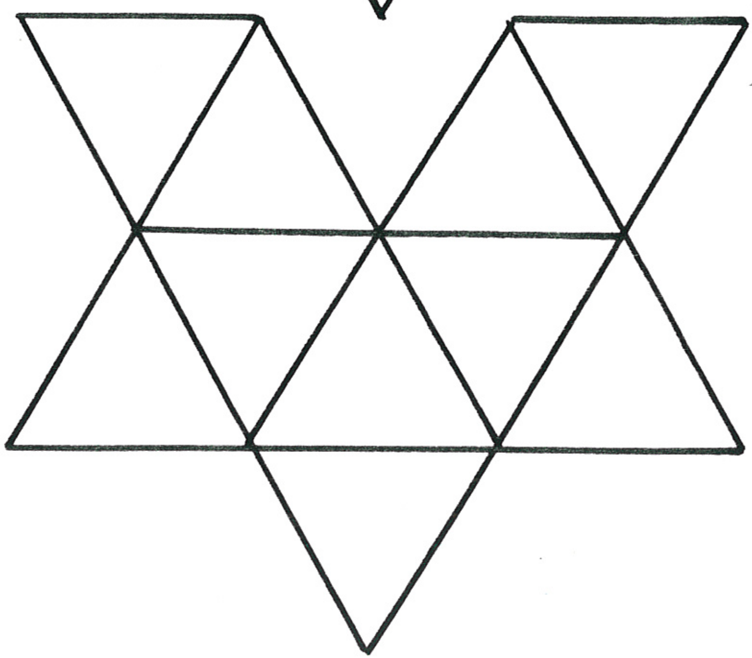
Bipirámide triangular (no regular)



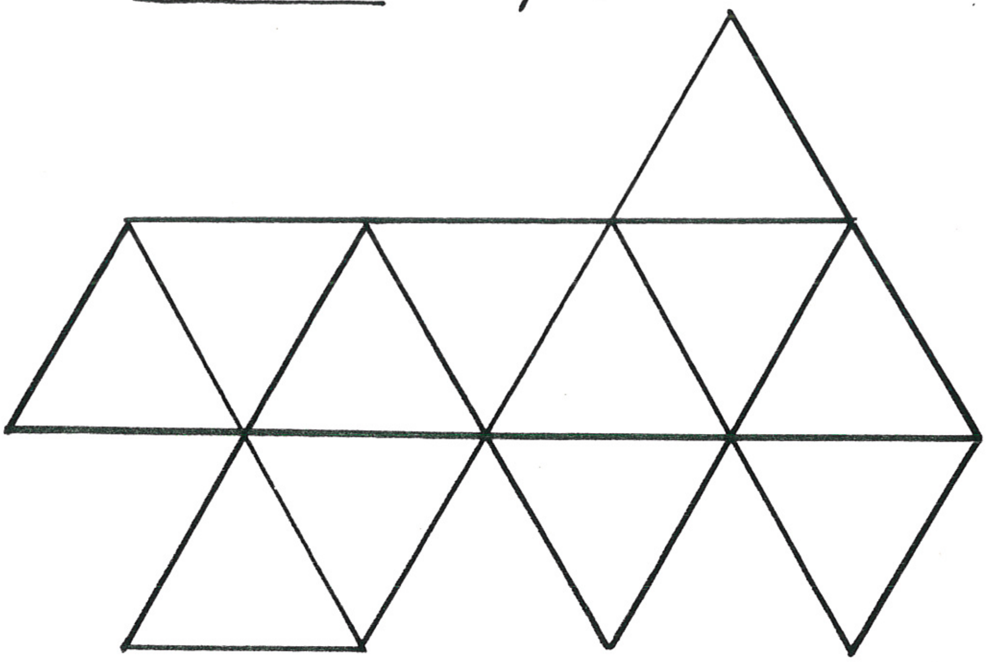
Octaedro (regular).



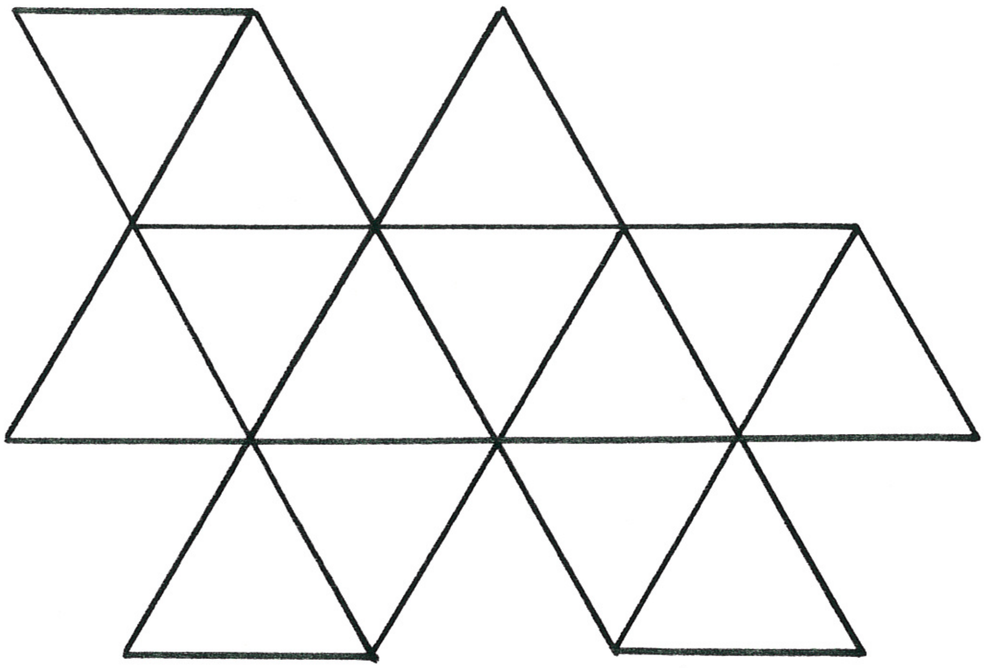
Bipirámide Pentagonal (no regular)



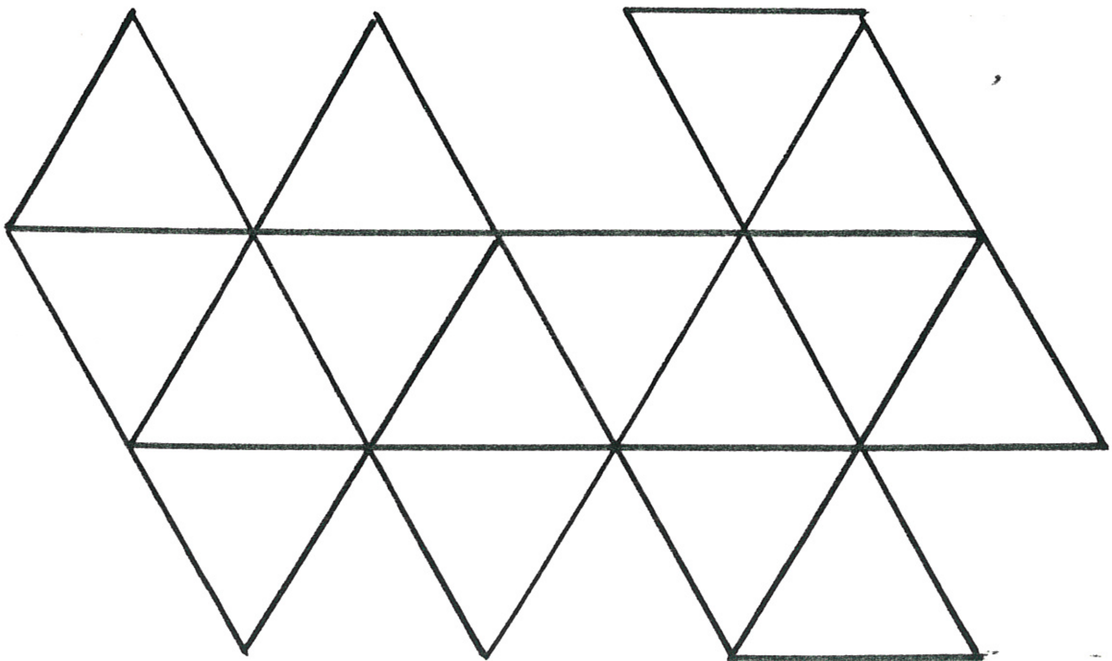
Deltaedro 12 (no regular)



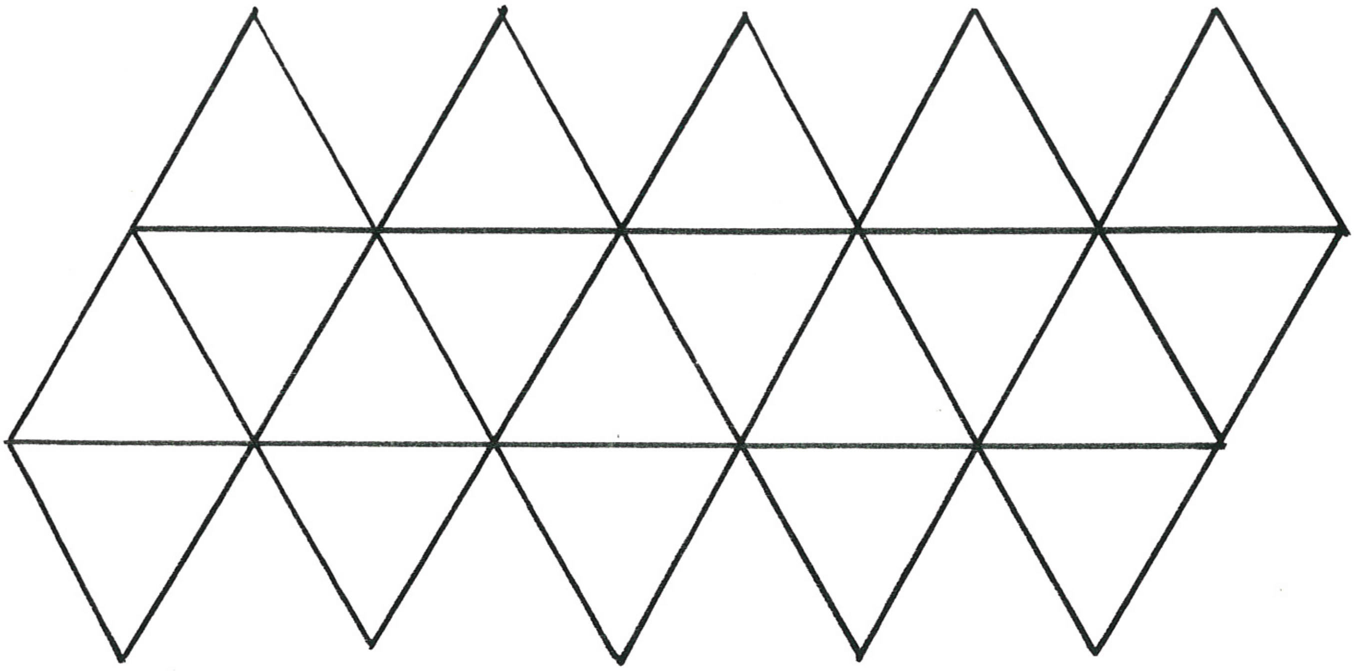
Deltaedro 14 (no regular)



Deltaedro 16 (no regular).



Icosaedro (regular).



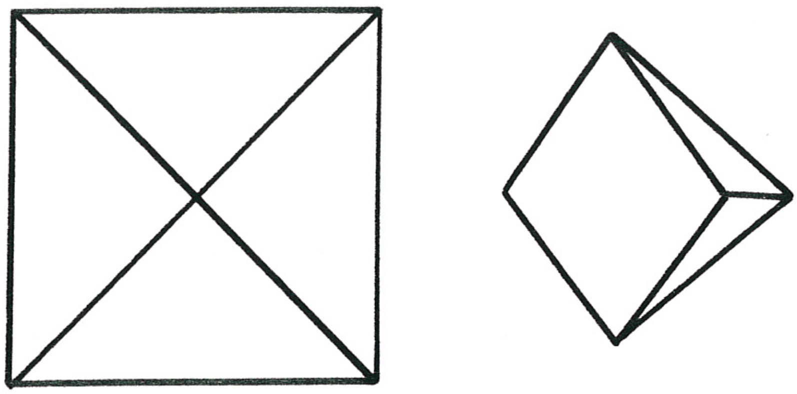
CUERPO ESPECIAL:

"Pirámide cuadrangular"

CARAS → 4 triángulos equiláteros
↘ 1 cuadrado (de lado igual que el de 1 triángulo).

VERTICES → a 4 le llegan 3 aristas
↘ a 1 le llegan 4 aristas.

ARISTAS: 8



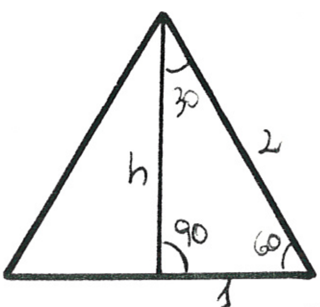
* ¿Cuál es su altura? Su lado es 2 cm.

$$\cos 30 = \frac{h}{2}$$

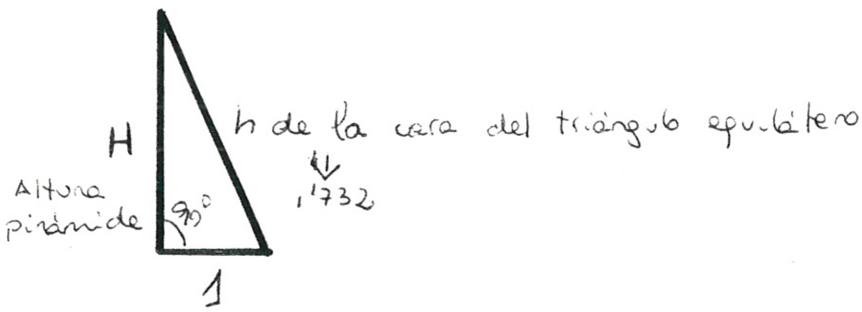
$$0'886 = \frac{h}{2}$$

$$h = 2 \cdot 0'886$$

$$\boxed{h = 1'732}$$



CARA TRIANGULAR.



$$h^2 = 1^2 + H^2$$

$$1'732^2 = 1^2 + H^2$$

$$H^2 = 1'732^2 - 1^2$$

$$H^2 = 1'999824 \simeq 2$$

$$\boxed{H = 1'414513 \text{ cm}}$$

CLASIFICACION

POLIEDROS REGULARES:

TETRAEDRO
OCTAEDRO
ICOSAEDRO } **DELTAEDROS CONVEXOS**

EXAEDRO } **CARAS CUADRADAS**

DODECAEDRO } **CARAS PENTAGONALES.**

Otros de vértices desiguales
- 6 caras
- 10 caras
- 14 caras.
- 12 caras
- 16 caras.

DELTAEDROS: Son polígonos, cuyas caras son triángulos equiláteros.

Adquieren este nombre, por la letra griega "Delta", que es más o menos un triángulo equilátero.

Deltaedros cóncavos: infinitos ∞

Deltaedros convexos: 3 regulares ,

" " : 5 irregulares

POLIEDROS REGULARES "PLATONICOS"

NOMBRE	CARAS	VERTICES	ARISTAS
TETRAEDRO	4	4	6
CUBO	6	8	12
OCTAEDRO	8	6	12
DODECAEDRO	12	20	30
ICOSAEDRO	20	12	30

En el cubo y el octaedro las caras y vértices (el nº) son al revés. Las aristas son las mismas.

En el dodecaedro e icosaedro ocurre lo mismo.

- Estos poliedros son regulares, porque tienen todas las caras, vèrtices y aristas iguales

- De caras triangulares, se pueden hacer regulares el tetraedro, octaedro e icosaedro.
- De caras cuadradas, sòlo el cubo.

- De caras pentagonales, el dodecaedro.

- No se pueden construir màs, porque ya tendrian vèrtices diferentes, por ejemplo: el bitetraedro.

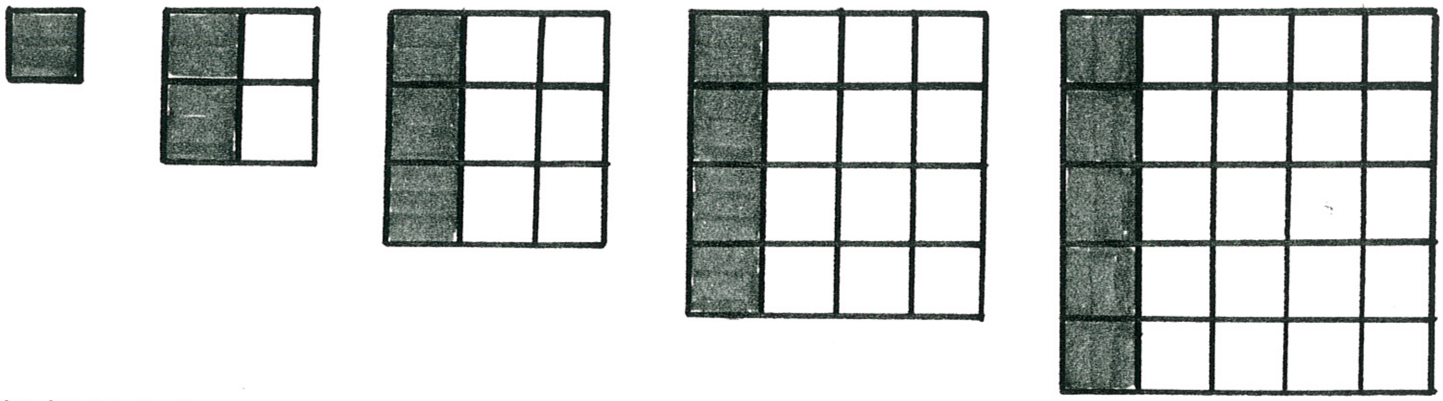
* SI SE CONSTRUYEN DOS TETRAEDROS, UNO DE ARISTA 1 Y EL OTRO DE ARISTA 2.

a) ¿Qué relación hay entre el área de sus caras?

b) ¿Qué relación hay entre sus volúmenes?

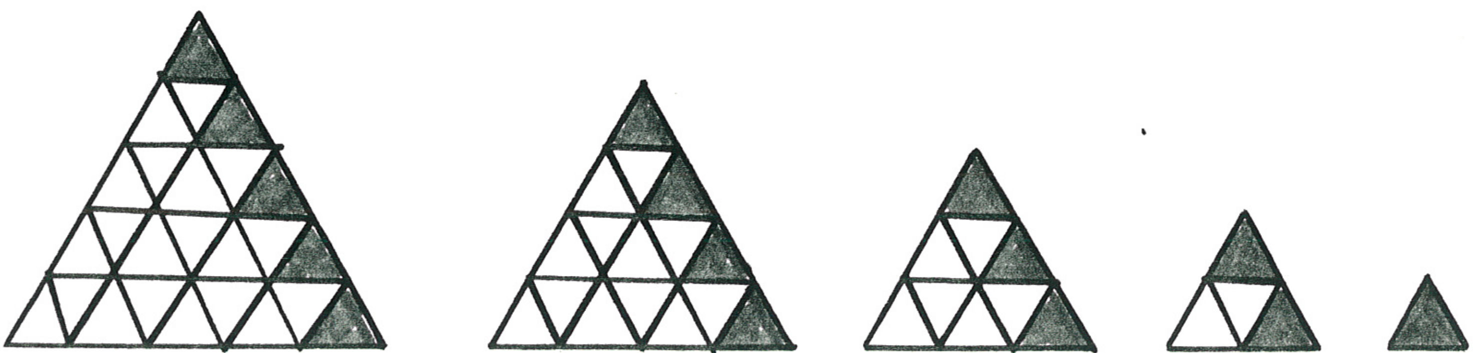
CUADRADO:

						General
LADO	1	2	3	4	5	ℓ
AREA	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	ℓ^2
VOLUMEN	1^3	2^3	3^3	4^3	5^3	ℓ^3

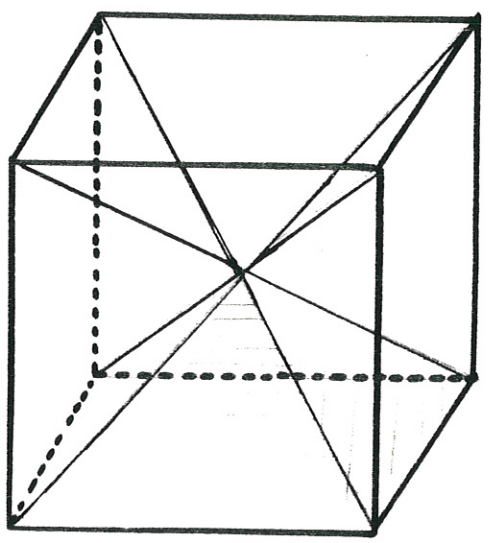


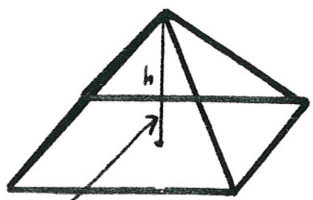
TRIANGULO:

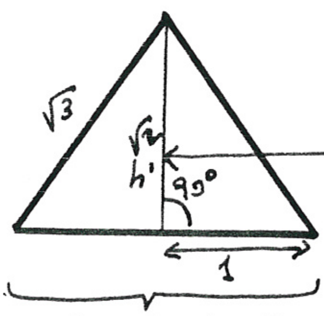
						General
LADO	1	2	3	4	5	2ℓ
AREA	Δ	$2^2\Delta$	$3^2\Delta$	$4^2\Delta$	$5^2\Delta$	4Δ
VOLUMEN	V	2^3V	3^3V	4^3V	5^3V.	$8V$



* En un cubo, ver el centro, dibujar las pirámides interiores de cada cara. Medir el ángulo de una cara de las pirámides formadas.







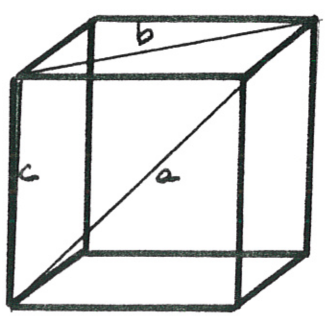
$$(\sqrt{3})^2 = 1^2 + h'^2$$

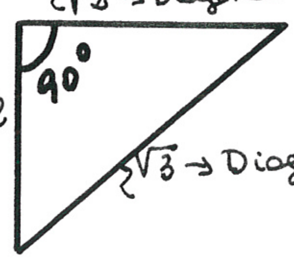
$$h'^2 = (\sqrt{3})^2 - 1^2$$

$$h'^2 = 3 - 1$$

$$\boxed{h' = \sqrt{2}}$$

- La altura de la pirámide (h) mide 1, porque es la mitad de la altura del cubo, que vale 2.

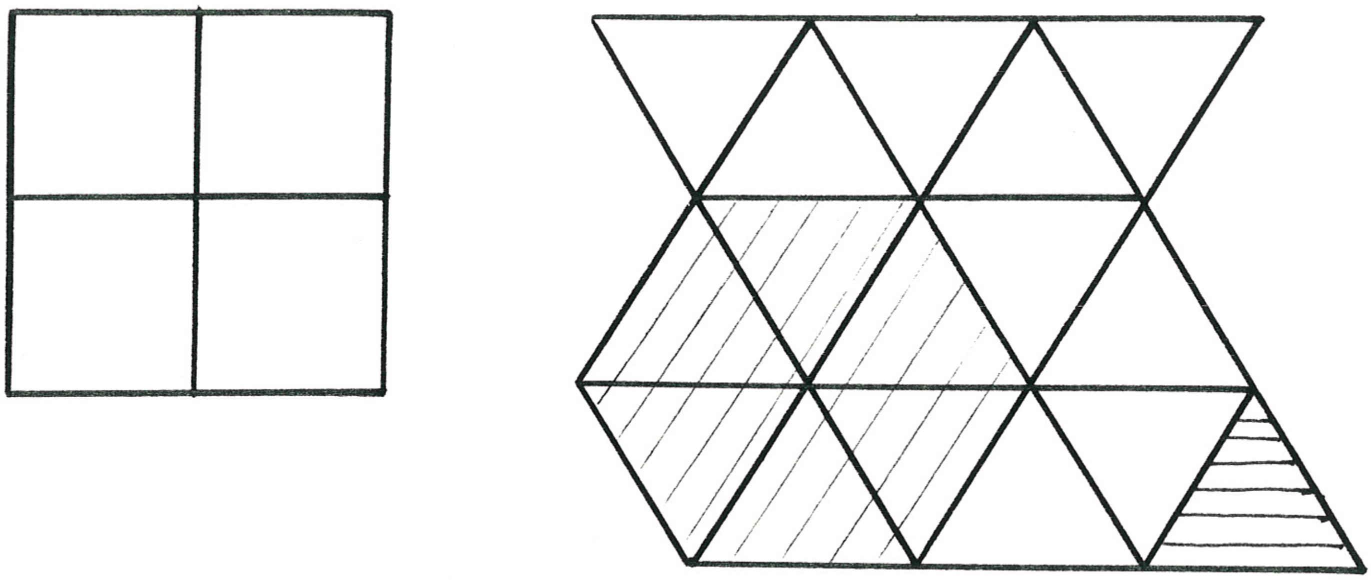




• Es de igual forma que la mitad de la cara de la pirámide cuadrangular, pero es el doble de grande.

UNIDAD DE AREA

Para llenar una superficie o área, se eligen polígonos regulares: hexágonos, triángulos equiláteros, cuadrados.



Se ha escogido el cuadrado como la "medida patrón"

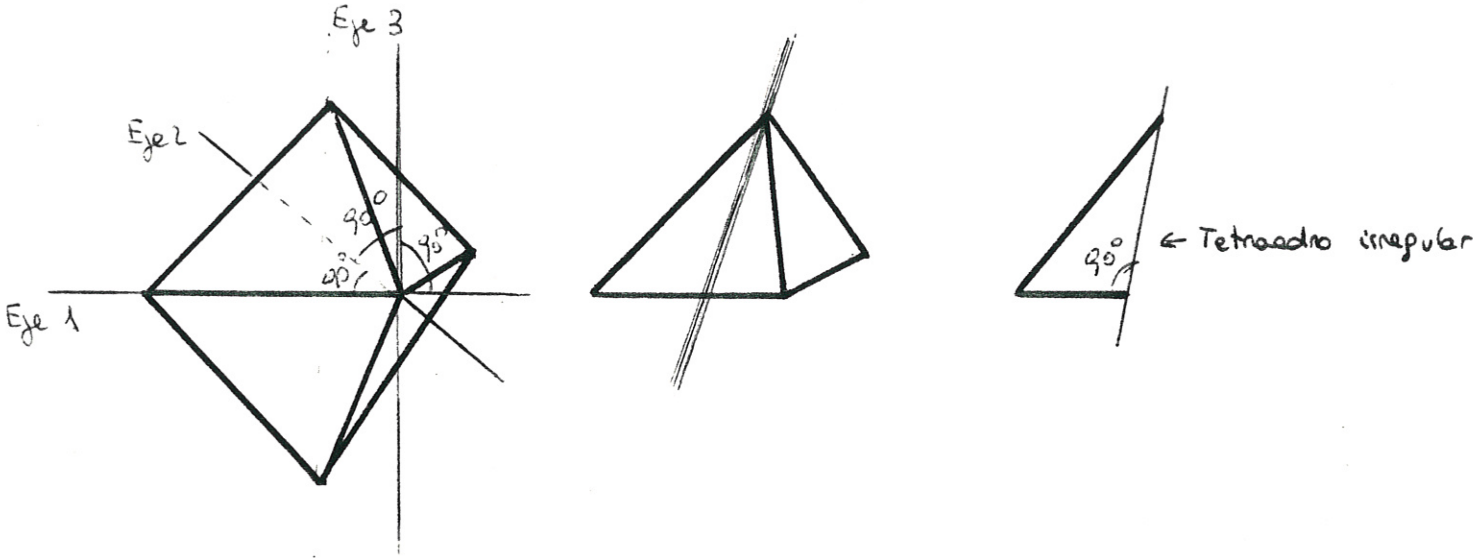
VOLUMEN

De los poliedros regulares: cubo, dodecaedro, tetraedro, icosaedro, y octaedro, sólo rellena bien el espacio el cubo.

* ¿Un octaedro, se puede descomponer en 4 tetraedros regulares?

Las diagonales son perpendiculares e iguales, por lo tanto habrá 90°. Hay 3.

Al dividir el octaedro, se obtienen 2 pirámides cuadrangulares. Al hacer una sección más, a cada pirámide, salen algunas caras con ángulo recto, por lo tanto el tetraedro que se obtenga no será regular.

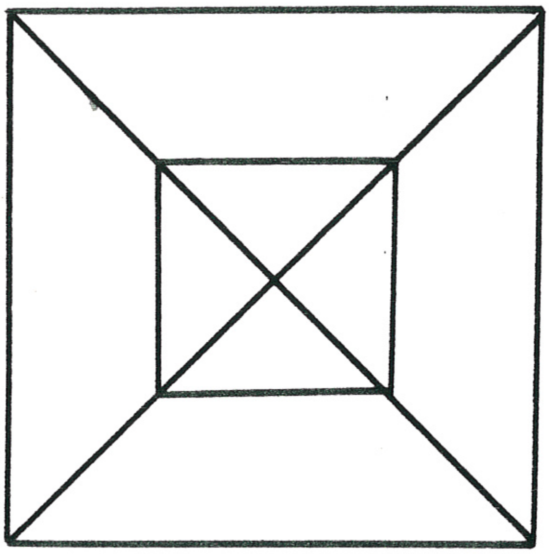


	LADO	DIAGONAL
CUBO	l	$l\sqrt{3}$
OCTAEDRO	l	$l\sqrt{2}$

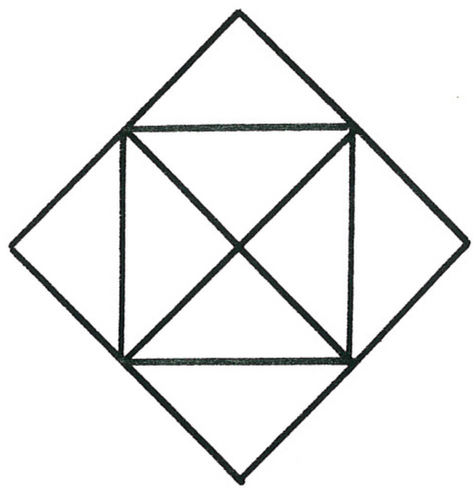
• La diagonal del octaedro se sabe, porque según cómo lo miras se ve un cuadrado con 2 diagonales, y una de ellas es la de este cuerpo.

• Al meter el octaedro en un cubo, el lado del cubo es la altura del octaedro

• Al cortar las esquinas del octaedro, se obtiene un cuerpo que mezcla caras triangulares y cuadradas.



VISTA DEL OCTAEDRO

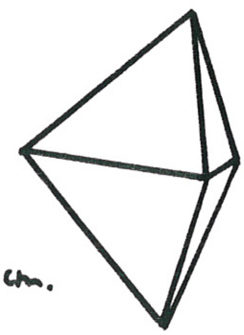


OCTAEDRO TRUNCADO.

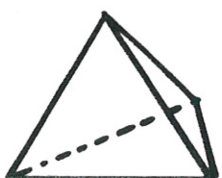
* Volumen de la bipirámide triangular, con un tetraedro.

1 cm

Tetraedro de arista 2 = 8 veces el de arista 1
Tetraedro de arista 3 = 27 " " " " "
Bipirámide triangular de
arista 3 = 54 " " " " "



3cm.



POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

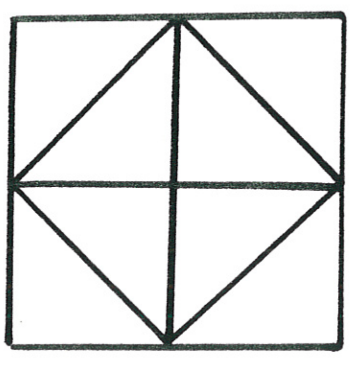
OCTAEDRO:

Se truncan los vértices, todos en pirámides cuadrangulares iguales. El nuevo cuerpo, tiene caras cuadradas y triangulares. Si el octaedro es grande, en vez de triángulos pueden ser hexágonos, como en el de arista 3.

	C	V	A
Octaedro:	8	6	12
Sólido de Kelvin:	14	24	36

- Las caras se pueden obtener mentalmente, ya que si había 8 al principio, y al truncarlo, se han quitado 6 pirámides, quedan 6 caras más.

- Los vértices se pueden hallar, contando los vértices de las caras cuadradas, ya que no hay más.



El octaedro de arista 3, al truncarlo, se obtienen 6 cuadrados y 8 hexágonos.

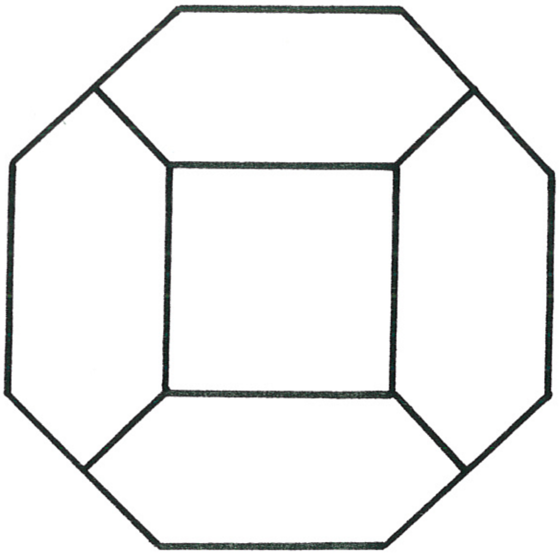
POLIEDROS ARQUIMEDIANOS: Son poliedros irregulares. Sus caras ~~vértices~~, no son todos iguales.
SUS VÉRTICES, SÍ.

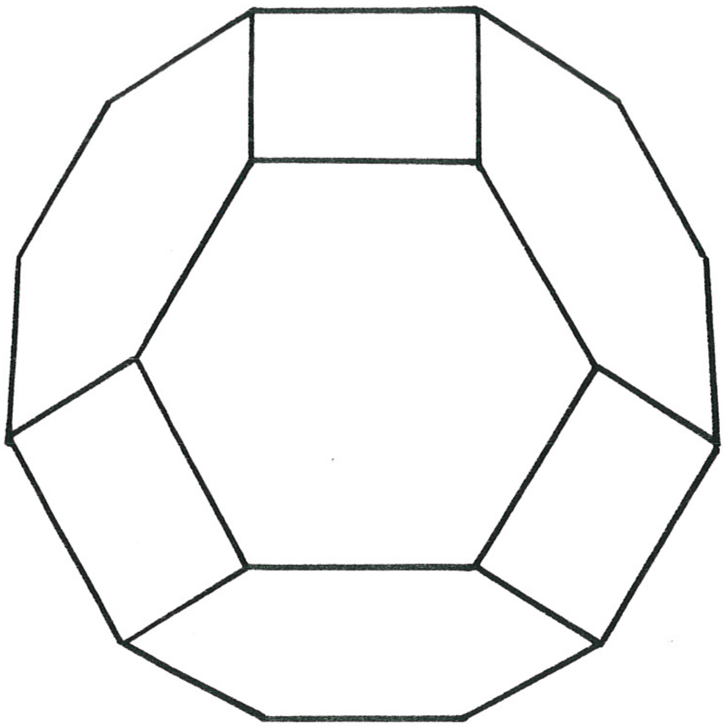
DODECAEDRO:

Al cortar las esquinas, quedan 20 triángulos, ya que tiene 20 vértices.

Quedará un cuerpo con 20 caras triangulares y 12 pentágonos más pequeños que los de las caras iniciales.

	C	V	A
Dodecaedro.	12	20	30
" truncado	32	60	90





ICOSAEDRO:

Al cortar los vértices, resultan 12 pentágonos.

Quedará un cuerpo con 12 caras pentagonales y 20 triangulares = se llamará ICOSIDODECAEDRO

Si el icosaedro es más grande, quedará un cuerpo con: 12 caras pentagonales y 20 hexágonos = ICOSAEDRO TRUNCADO. Es la forma del vulgar balón de fútbol.

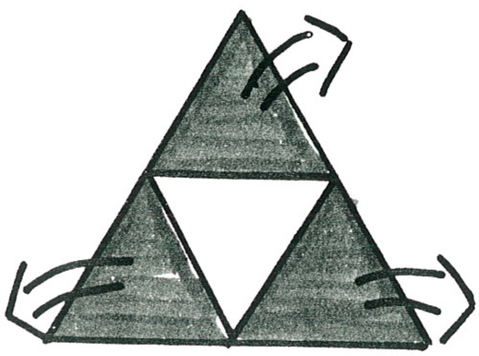
Al formar dentro de cada pentágono, decágonos, y cortar las espuinas, quedan 12 caras decagonales y 20 triángulos equiláteros, (1 por cada espuina). El cuerpo formado es el DODECAEDRO TRUNCADO.

	Caras	Vértices	Aristas
ICOSAEDRO.	20	12	30
ICOSIDODECAEDRO	32		
ICOSAEDRO TRUNCADO.	32	60	90
DODECAEDRO TRUNCADO.	32	60	90

TETRAEDRO :

Cuando se trunca el tetraedro, el nuevo cuerpo, tiene 4 triángulos equiláteros, que salen de los cortes de las pirámides triangulares de las espuinas, y otros 4 triángulos en el centro de las primeras caras. Se forma el octaedro regular.

En el tetraedro de arista 3, se obtienen 4 triángulos y 4 hexágonos regulares.

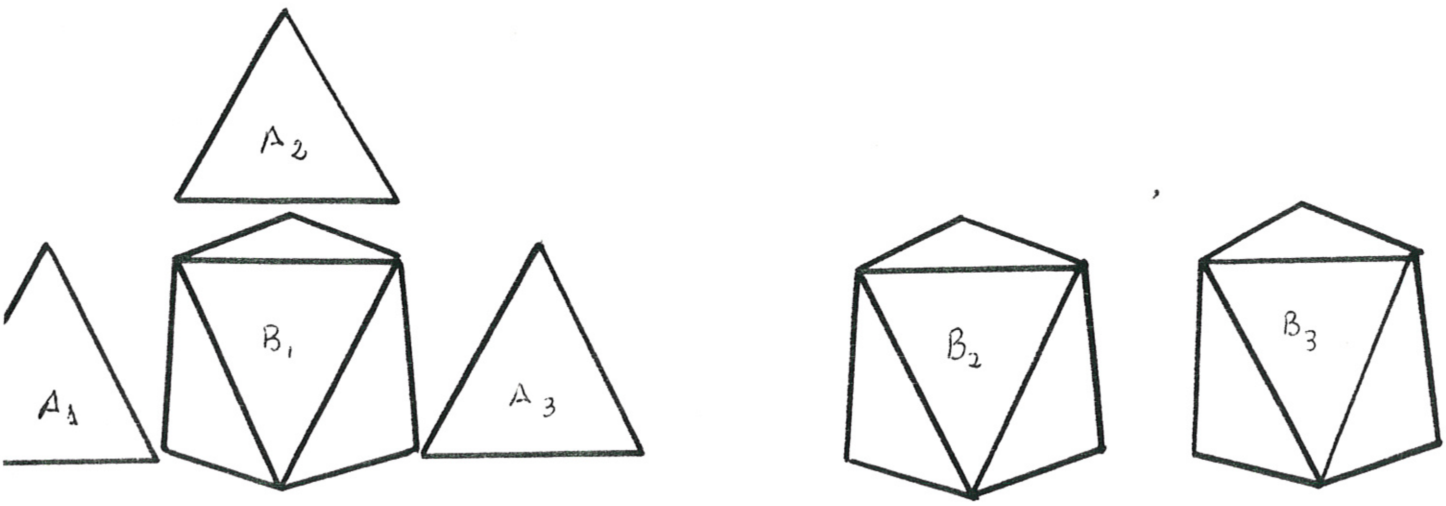


* RELACION ENTRE LOS VOLUMENES DEL TETRAEDRO Y OCTAEDRO.

VOLUMEN TETRAEDRO = Lado 1	T
VOLUMEN OCTAEDRO: Lado 1	O
VOLUMEN TETRAEDRO: lado 2	$2^3 . T$
VOLUMEN OCTAEDRO: lado 2.	$2^3 . O$

$T \times 4 = O$

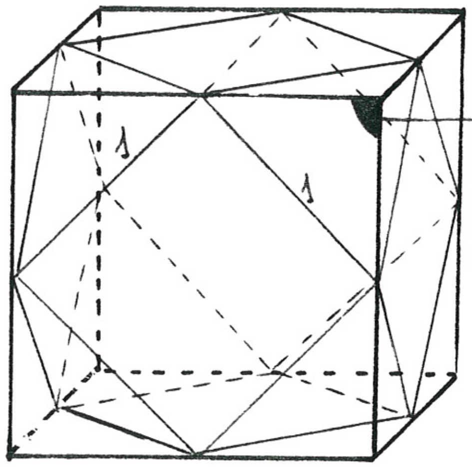
Los 4 tetraedros y el octaedro que forman la pirámide triangular, tienen el mismo volumen que 2 octaedros. Aunque los tetraedros que forman el octaedro sean irregulares.



$A_4 + A_1 + A_2 + A_3 + B_1 = B_2 + B_3$

Son iguales los volumenes.

VOLUMEN DEL CUBOCTAEDRO: (lado 1)



ángulos de 90°.

$$c^2 + c^2 = 1$$

$$c^2 = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

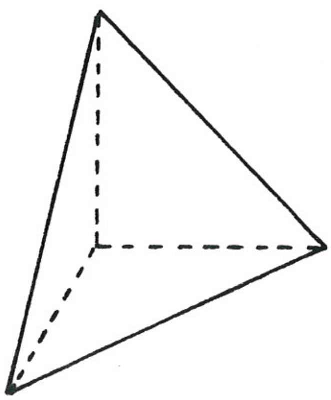
$$\boxed{c = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Lado del cubo grande $= \sqrt{2}$

Volumen $= 2\sqrt{2}$

Volumen (cuboct. 1) $=$ V (cubo $\sqrt{2}$) $-$ V (octaedro 1)

$$V = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \boxed{\frac{5\sqrt{2}}{3}}.$$



Juntando 4 de estas pirámides sale 1 pirámide cuadrangular.

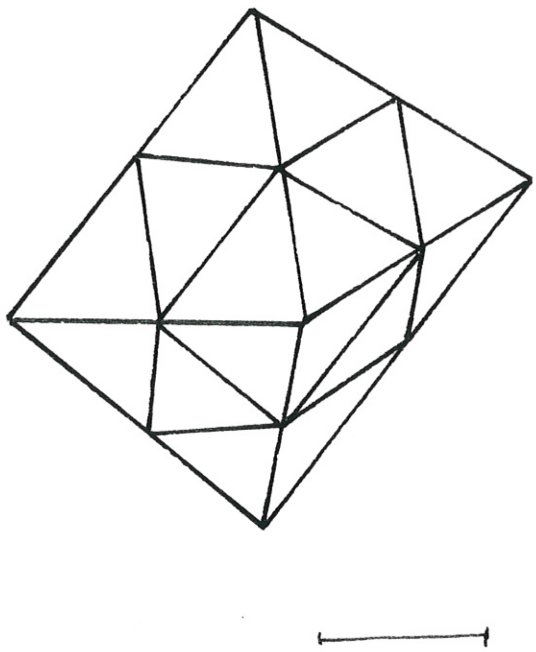
Como hay 8 se forma un octaedro.

Volumen del cuboctaedro, a partir del octaedro:

$$V(\text{cuboct. } 1) = V(\text{octaedro } 2) - 3V(\text{octaedro } 1)$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{3} = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) - 3\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

porque quedan 6 piezas de las espuinas que forman 3 octaedros.



El cuerpo resultante tiene 6 caras cuadradas y 8 triangulares.

Vértices: 12 → a todos llegan 4 aristas.

Aristas: 24

RELACION ENTRE : CUBO Y OCTAEDRO TRUNCADO (SOLIDO DE KELVIN)

- Al Octaedro truncado, si se le alargan las caras cuadradas, se forma un cubo. Si se alargan las hexagonales se forma un octaedro.

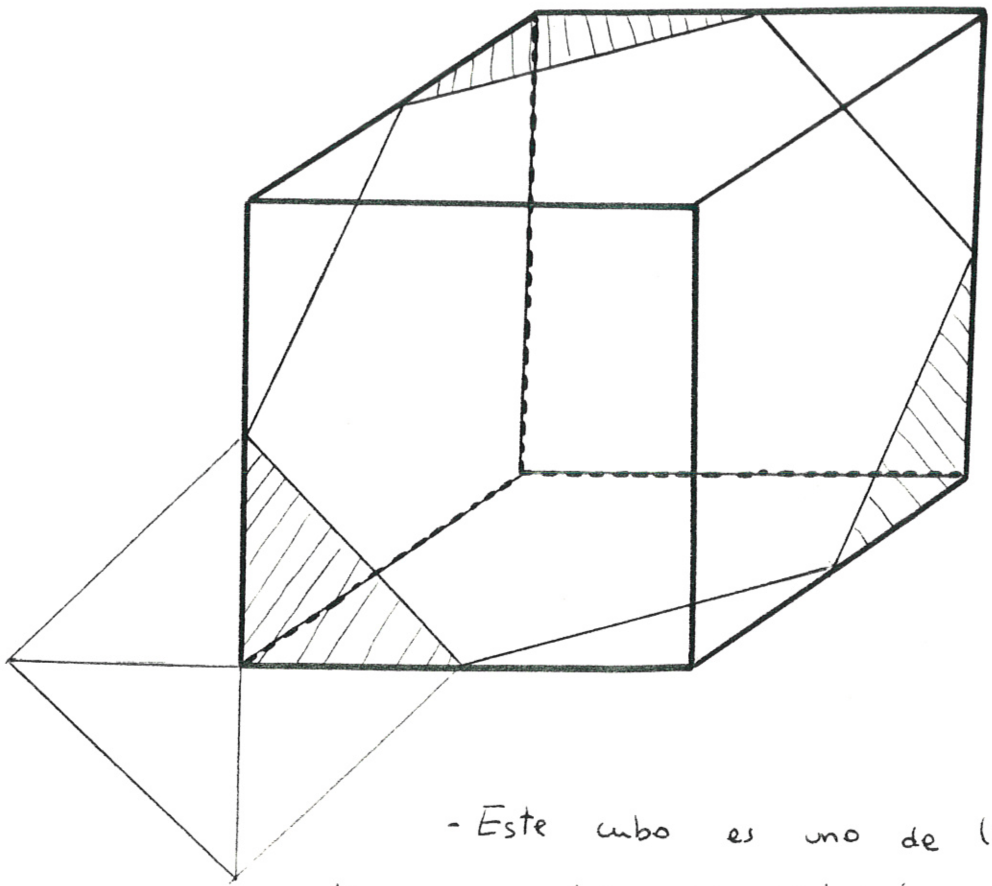
- Los cuboctaedros NO llenan el espacio, haciendo coincidir caras.
  Ejes por centro de caras cuadradas : cuaternarios.
  Ejes por centro de caras hexagonales : ternarios.

- Los dodecaedros no llenan el espacio.
  Los cristales de Silicio, cristalizan como el sólido de Kelvin.

- La retícula cúbica, se obtiene cortando los cuerpos en el espacio con 3 ejes perpendiculares.

- Tiene caras paralelas 2 a 2. Tambien perpendiculares (el cuerpo).

- Para rellenar un cubo con un sólido de Kelvin, se necesita otro igual. El volumen de 2 sólidos de Kelvin forman 1 cubo.

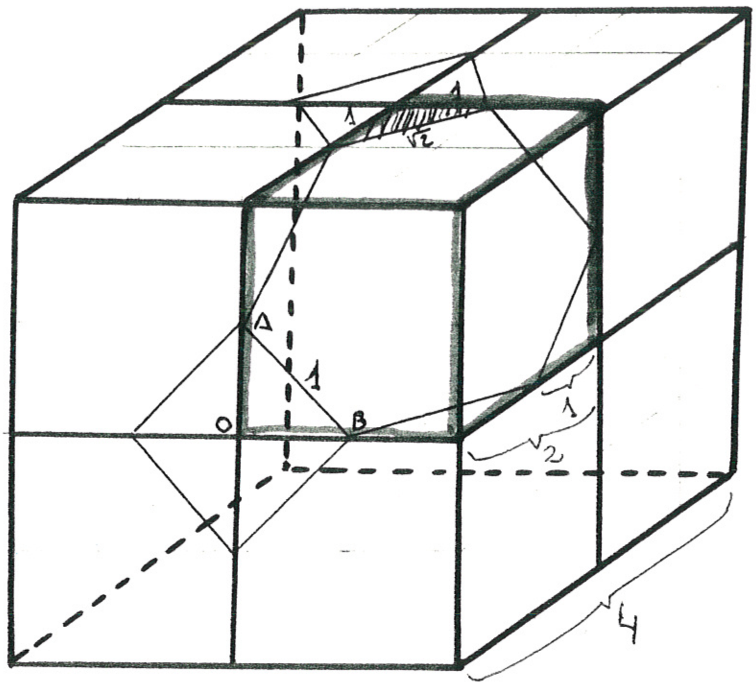


- Este cubo es uno de los 8 cubos que llena un sólido de Kelvin (sin rellenar del todo).
- La figura marcada en rojo, es la octava parte del cubo que encierra al sólido de Kelvin, es decir 1/2 cubo.
  Por lo tanto, un sólido, son 4 cubos de los 8.

- El cuadro azul es uno de los cuadrados (caras), de que se compone el sólido, así se ve que 4 triángulos de las esquinas forman 1.

RELACION DE ARISTAS:

① Si la mitad del cubo pequeño es 1, entera vale 2 y la arista del cubo grande (el que encierra al sólido) vale 4.



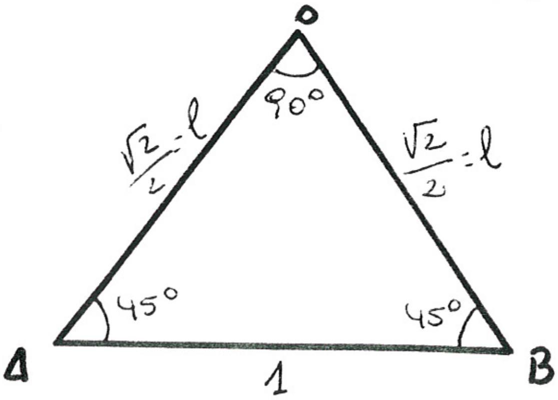
- Para medir el lado del sólido, que tiene todas las aristas iguales, se hace por el método de Pitágoras un triángulo que se forma en cada cuadrado (rayado de rojo)

$$1^2+1^2=d^2$$

$$d^2=2$$

$$\boxed{d=\sqrt{2}}$$

(2) OTRA FORMA: Si el lado del sólido es $=1$



$$\text{sen } 45° = \frac{OB}{1}$$

$$\boxed{OB=\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

- Lado del cubo rosa $\sqrt{2}$, porque es el doble que el lado del triángulo hallado ahora.

- Arista del cubo grande (negro) $2\sqrt{2}$, porque es el doble que el de el cubo rosa.

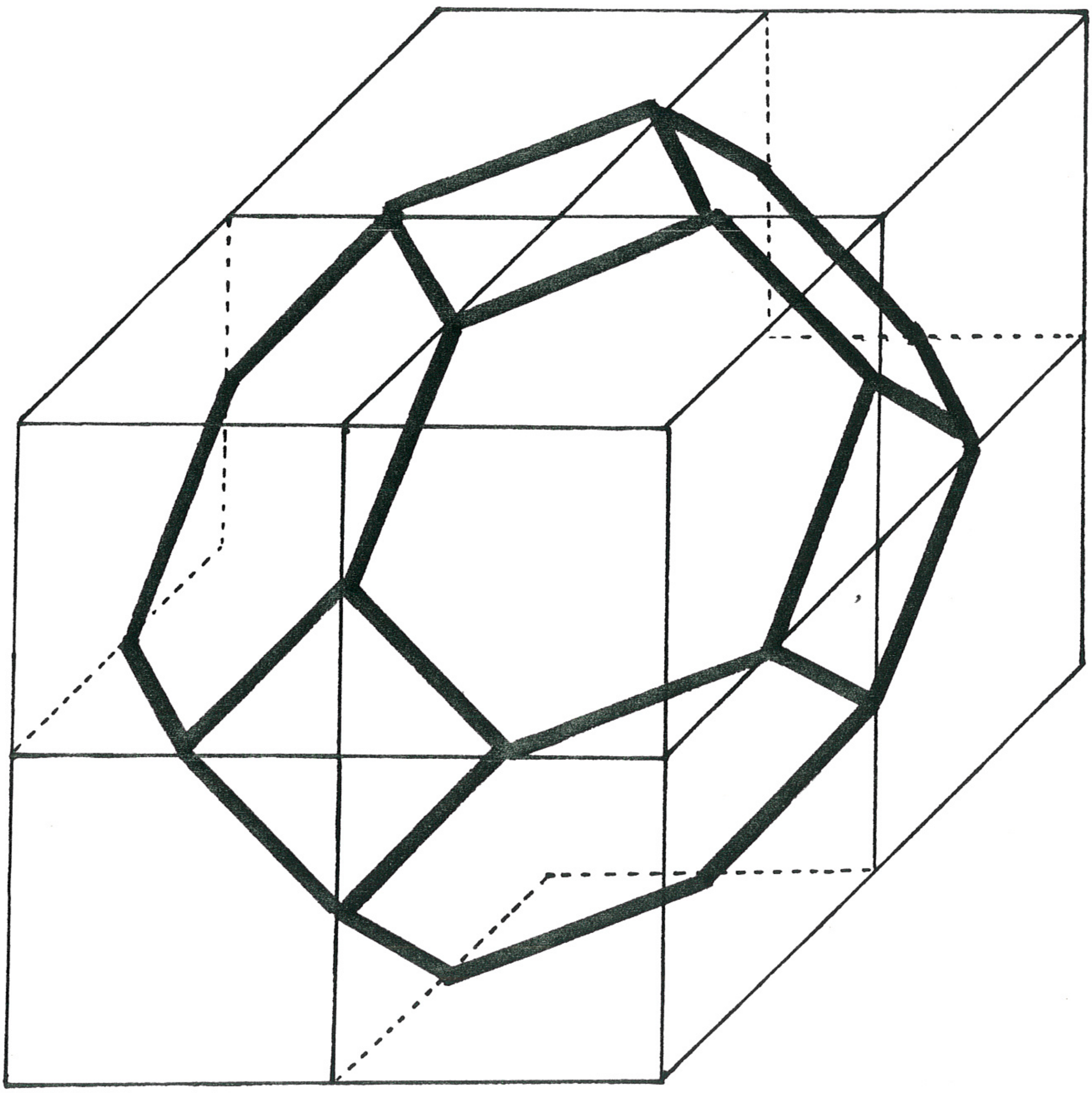
- Volumen del cubo de arista $2\sqrt{2} = (2\sqrt{2})^3 = 8 \cdot 2\sqrt{2} = \boxed{16\sqrt{2}}$

- Volumen de un sólido de Kelvin de arista 1 =

$$\boxed{8\sqrt{2} \simeq 11'313708}$$

Por lo tanto dentro de ese sólido caben 11'3137 0 8 cubos modelo = m^3

Sale la mitad del volumen del cubo de arista $2\sqrt{2}$, porque 2 sólidos de Kelvin, son el mismo volumen que 1 cubo. Se tiene que trocear uno de ellos y poner las piezas alrededor del otro, para formar el cubo.

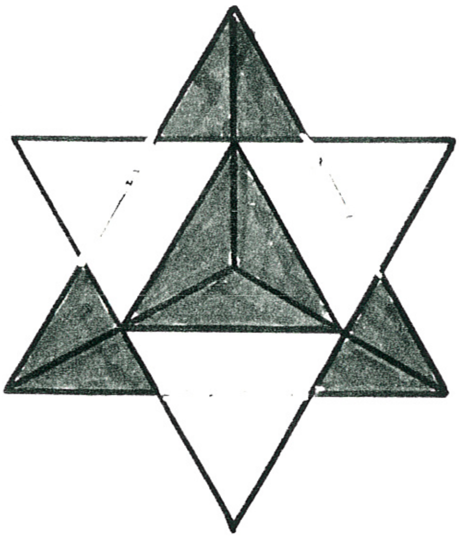


"STELLA OCTANGULA"

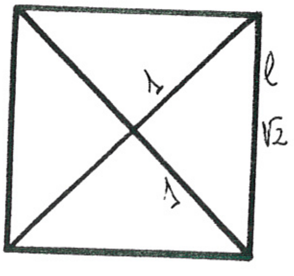
Se puede formar de 2 formas:

- A partir de 2 pirámides triangulares regulares, incrustando uno en otro por la mitad de las caras, así quedan 8 puntas.

- A partir de 1 octaedro y 8 pirámide triangulares, con caras iguales a las del octaedro. Se unen todas las pirámides, una en cada cara del octaedro.



* Si el lado de cada tetraedro que sobresale, es 1, ¿Cuál es el lado del cubo que encierra a esta figura?



$1^2+1^2=l^2$

$2=l^2$

$\boxed{l=\sqrt{2}}$

- El lado del cubo que encierra a la "stella", coincide con una de las alturas del octaedro.

- El volumen del cubo de lado $\sqrt{2}$ es $\sqrt{2}^3 = \boxed{2\sqrt{2}}$

- Para rellenar la "stella" y que forme un cubo, hacen falta 12 tetraedros irregulares, que son los que forman los 3 octaedros.

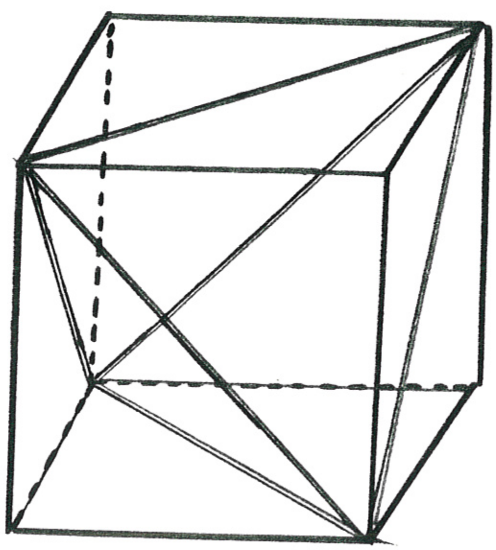
$$\left\{\begin{array}{l} 1 \text{ CUBO de arista } \sqrt{2} = 8 \text{ tetraedros de arista } 1 + 4 \text{ octaedros de arist} \\ 1 \text{ CUBO de arista } \sqrt{2} = 6 V \text{octaedros de arista } 1 = 24 V \text{ (tetraedros 1)} \end{array}\right.$$

→ VOLUMEN $2\sqrt{2} = 2'88\ldots$

VOLUMEN del octaedro de arista $1 = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{1^2}_{\text{área de la base}} \cdot \underbrace{\sqrt{2}}_{\text{altura}}$

(sigue en la pag siguiente)

DESCOMPOSICION DEL CUBO:



Quedan: - 4 tetraedros irregulares, que juntos, forman $\frac{1}{2}$ octaedro.

- 1 tetraedro en el interior.

- 1 cubo de arista $1 = 1$ tetraedro $\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ octaedro de arista $\sqrt{2}$

- Volumen de una pirámide cuadrangular: $\frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\text{altura}}$

- 1 cubo arista 1 = [illegible] tetraedro de arista $\sqrt{2}$ + $\frac{1}{2}$ octaedro de arista $\sqrt{2}$

- Volumen del cubo de arista 1 $= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) V\sqrt{2} = \frac{3}{4}$. Volumen del octaedro $\sqrt{2}$.

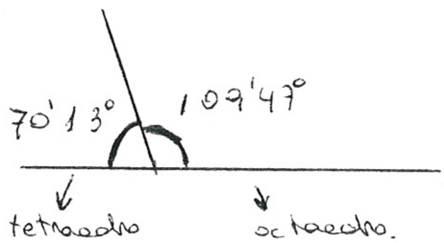
- Volumen del octaedro $\sqrt{2}$ $= \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \times 4$ = Volumen de la pirámide cuadrangular, de arista $\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 2$.

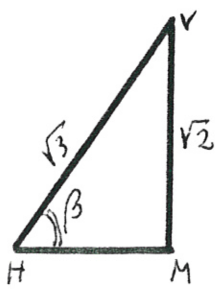
- Volumen tetraedro arista $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

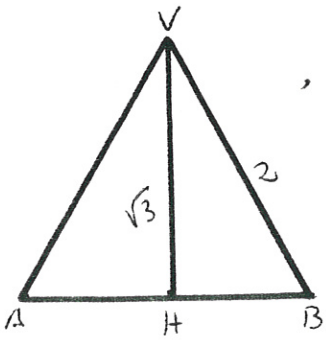
(Viene de la anterior pag.)

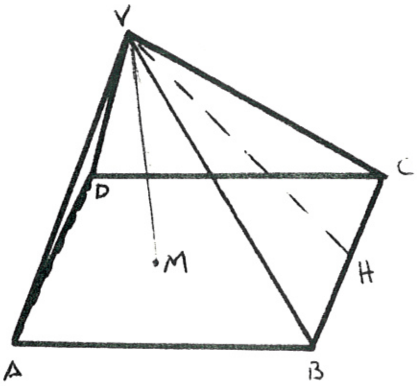
EQUISUPERFICIAL: de igual superficie.

- El ángulo diedro del tetraedro y octaedro, entre los 2 son suplementarios







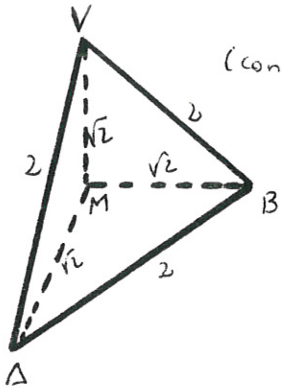


$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1'7320..}{3} = \boxed{0'5773..}$$

$$\beta = 54'73561$$

$$\boxed{2\beta = 109'47122}$$

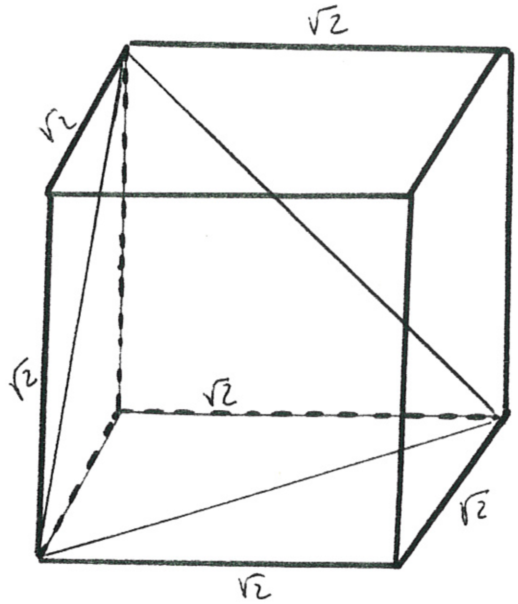
* DIVIDIR LA PIRAMIDE CUADRANGULAR:



(con las letras y cifras de la anterior)

1 cara: triángulo equilátero.
3 caras: triángulos isósceles rectángulos.

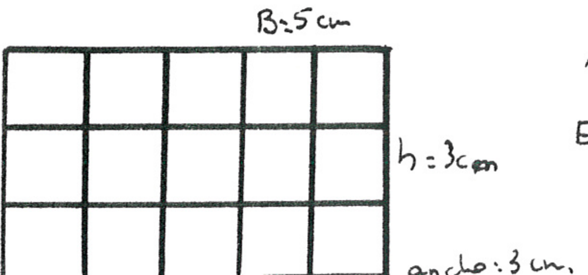
- 8 de estas pirámides, forman un octaedro



INTRODUCCION:

- Para medir el espacio: se ha elegido el cubo, porque es fácil de reproducir y porque llena el espacio.

- dos ejes en el espacio sirven para ver el volumen. Son perpendiculares.
- Prismas rectos en el espacio.



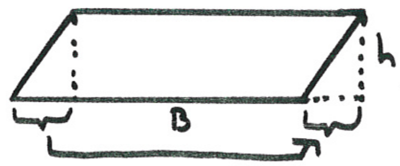
Area = B · h = 5 · 3 = 15 cm^2

En el espacio: 15 · 3 = 45cm^3

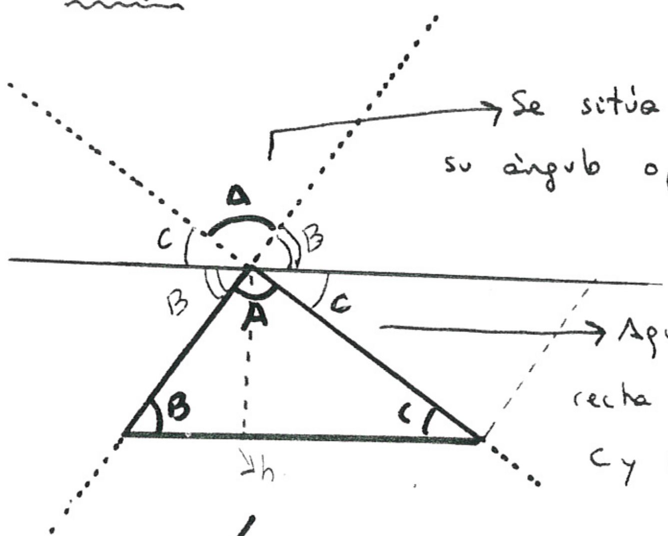
AREAS PLANAS:

• Triángulo I se reduce a la medida de un rectángulo.
(abajo)

• Paralelogramo: hay que conocer la altura ya que también se reduce a un rectángulo.

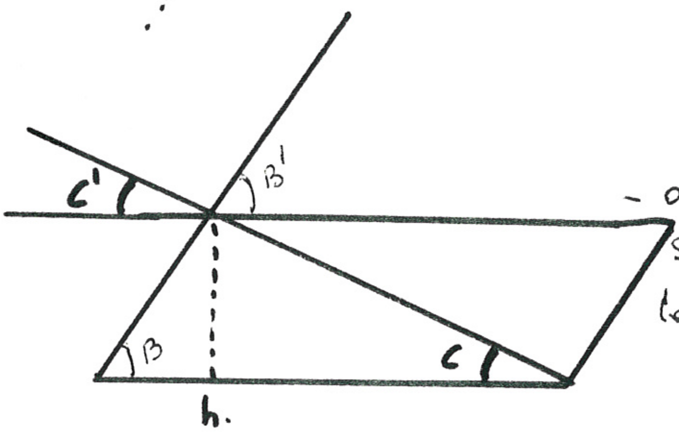


• Triángulo II:



Se sitúa aquí A, porque tiene que ser igual al su ángulo opuesto por el vértice.

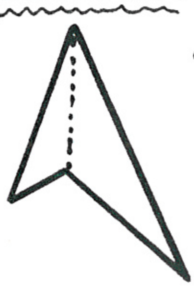
Aquí se sitúa C, porque al prolongar una recta paralela a la base se forman los ángulos C y B



- otra relación es la que tienen C y C' o B y B'. Son iguales porque tienen una recta común y las diferentes, son paralelas.

• Con 2 triángulos se forma un paralelogramo y el paralelogramo se reduce al rectángulo. Por lo tanto $\frac{B \cdot h}{2}$

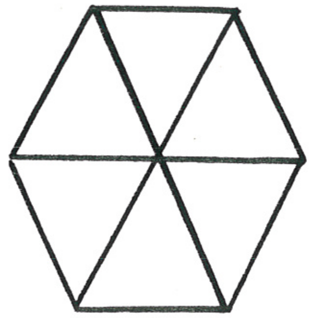
• Cuadrilátero:



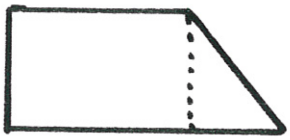
Como ya se sabe el área de los triángulos, se reduce a triángulos fáciles y luego el resultado se suma.

- **Hexágono**:

Al ser 6 triángulos iguales, se halla 1 y se multiplica por 6.

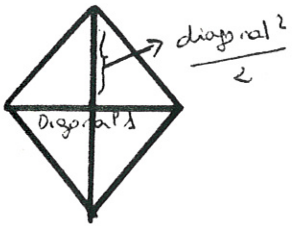


- **Trapecio**: Descomponer en un triángulo y cuadrado o rectángulo.



- **Rombo**:

$$\frac{1}{2} d_1 \times \frac{d_2}{\cancel{2}} \times \cancel{2} = \boxed{\frac{d_1 \times d_2}{2}}$$



- Se puede hallar también el área del rombo con la regla del paralelogramo.

ANTIPRISMAS

ANTIPRISMAS: son poliedros que tienen 2 caras paralelas. Puede haber regulares e irregulares. Hay infinitos.

Antiprisma de base cuadrada:

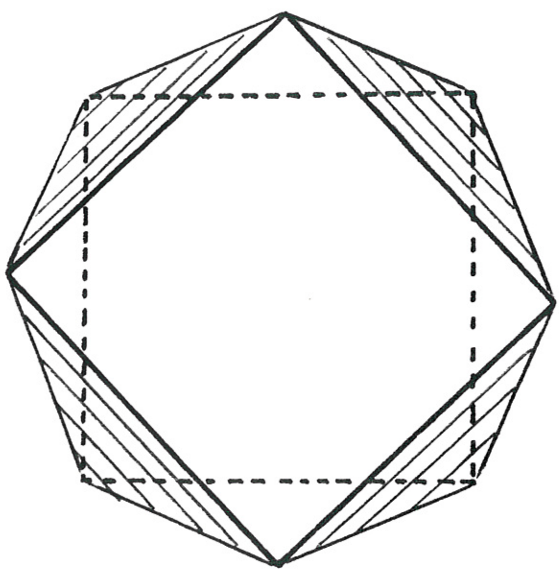
CARAS: 10 → 2 son cuadrados
→ 8 son triángulos.

VERTICES: 8 → a todos le llegan 4 aristas.

ARISTAS: 16

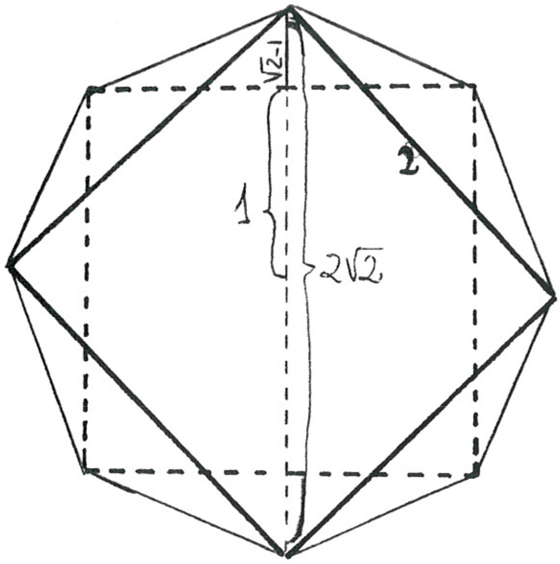
• Se obtiene de la descomposición del Delta-16 en 2 pirámides cuadrangulares y este cuerpo.

• Las bases están giradas 45°



• Las caras rayadas son los triángulos que unen las 2 bases.

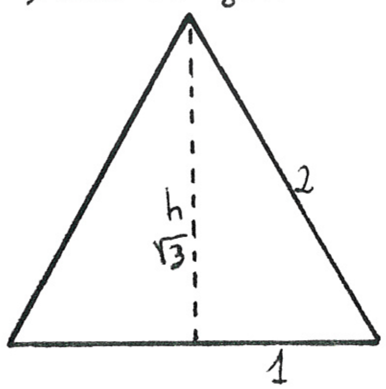
* ¿Cuál es su altura? (lado 2)



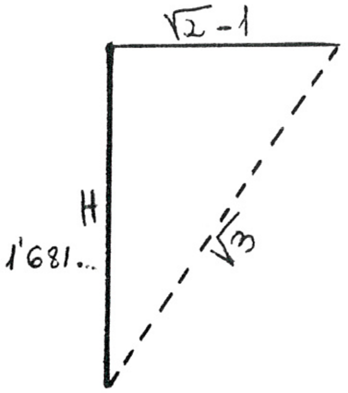
lado: 2
Diagonal de la cara: $2\sqrt{2}$

$$\underbrace{\frac{2\sqrt{2}}{2}}_{\frac{1}{2}\text{ diagonal}} - \underbrace{1}_{\frac{1}{2}\text{ arista}} = \boxed{\sqrt{2} - 1}$$

1 cara triangular

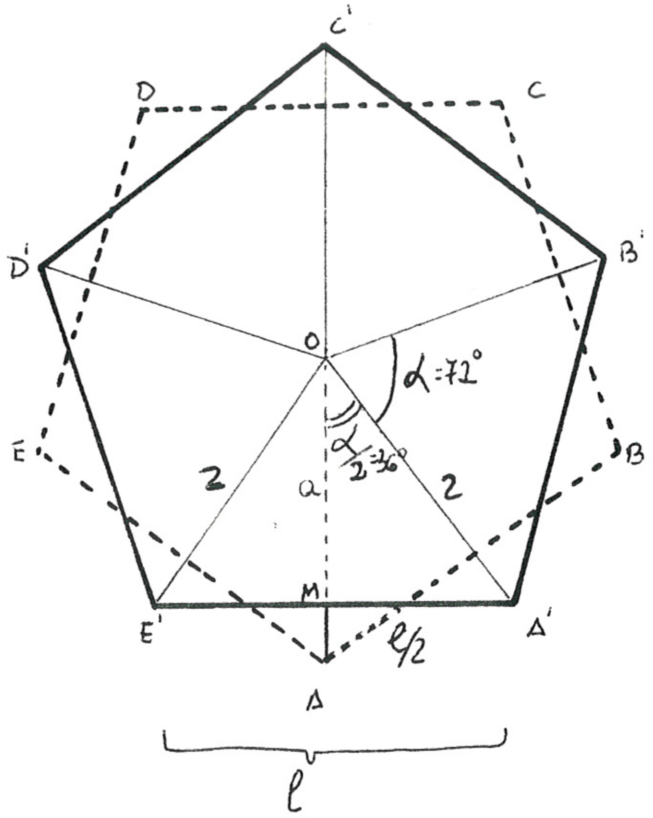


$$1^2 + h^2 = 2^2$$
$$h^2 = 2^2 - 1^2$$
$$\boxed{h = \sqrt{3}}$$



$$(\sqrt{2}-1)^2 + H^2 = (\sqrt{3})^2$$
$$H^2 = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2}-1)^2$$
$$H^2 = 3 - (2 - 2\sqrt{2} + 1)$$
$$H^2 = 3 - 2 + 2\sqrt{2} - 1$$
$$H^2 = 2\sqrt{2}$$
$$H = \sqrt{2\sqrt{2}} = \boxed{1'6817927}$$

ANTIPRISMA DE BASE PENTAGONAL:



$$\text{sen } 36^\circ = \frac{l/2}{2}$$

$$l = \text{sen } 36^\circ \cdot 4$$

$$l = 4 \cdot 0'5878$$

$$l = 2'3512$$

$$\boxed{l/2 = 1'1756}$$

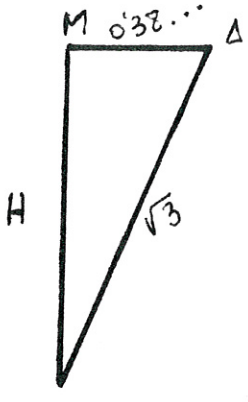
$$\overline{AM} = 2 - a = 2 - 1'6180111 = \boxed{0'3819889}$$

$$1'1756^2 + a^2 = 2^2$$

$$a^2 = 4 - 1'38203$$

$$a = \sqrt{2'61796} = \boxed{1'6180111}$$

Altura de una cara triangular $\sqrt{3}$.



$$(\sqrt{3})^2 = 0'3819889^2 + H^2$$

$$H^2 = 3 - 0'1459155$$

$$H = \sqrt{2'8540845} = \boxed{1'6894035}$$

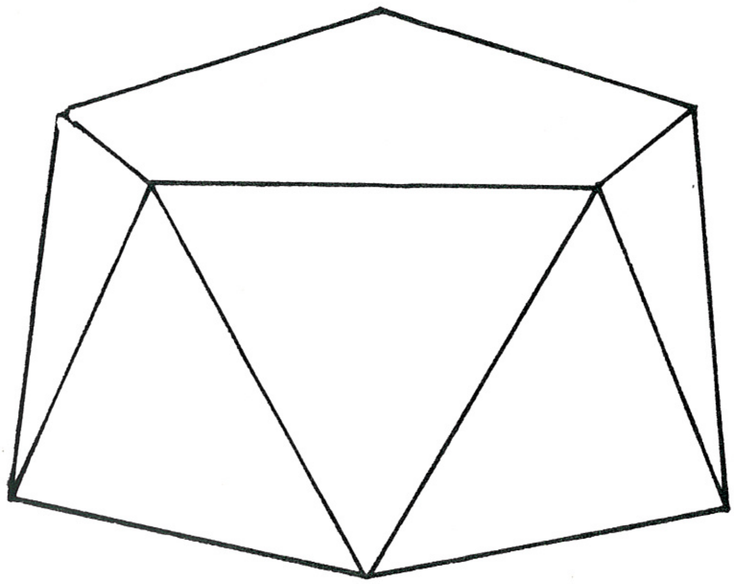
- Esta figura procede de la sección de las 2 pirámides pentagonales al icosaedro.

- Para formar el antiprisma, una base se gira 36°.

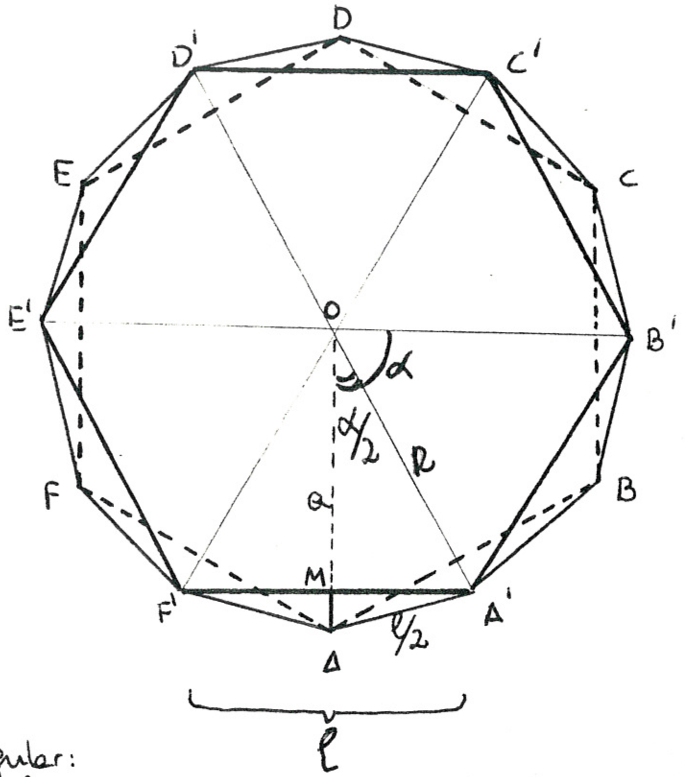
CARAS: 12 → 2 son pentágonos regulares
↘ 10 son triángulos equiláteros.

VERTICES: 10 → a todos le llegan 4 aristas.

ARISTAS: 20.



Antiprisma de base hexagonal.



Medidas:

$\overline{F'A'} = 2 \quad \ell$

$\overline{MA'} = 1 = \ell/2$

$\overline{OM} = \sqrt{3} = a\ \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

$\overline{AM} = 2-\sqrt{3}$

$R = 2 = \overline{OA'}$

$\alpha = 60°$

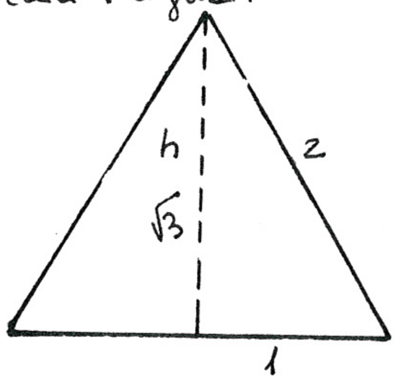
$\overline{AM} = \overline{OA} - \overline{OM} = 2-\sqrt{3} = 2 - 1'732\ldots$

$= \boxed{0'268}$

$\frac{2\ell - \ell\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell}{2}\left[2-\sqrt{3}\right]$

Por ello cogemos como medida del lado $= 2$, para que se ~~anule~~ [illegible] con el denominador y puede sólo $2-\sqrt{3}$.

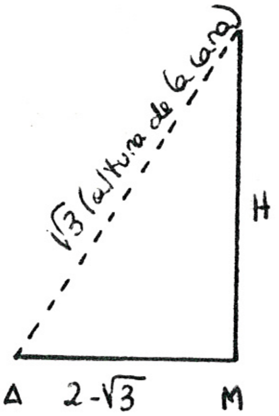
Cara triangular:



$2^2 = 1^2 + h^2$

$h^2 = 2^2 - 1^2$

$\boxed{h = \sqrt{3}}$



$(\sqrt{3})^2 = H^2 + (2-\sqrt{3})^2$

$H^2 = (\sqrt{3})^2 - (2-\sqrt{3})^2$

$H^2 = 3 - (4 - 4\sqrt{3} + 3)$

$H^2 = 3 - 4 + 4\sqrt{3} - 3$

$H = \sqrt{4\sqrt{3} - 4} = \boxed{1'7111993}$

$H = 2\sqrt{\sqrt{3} - 1}$

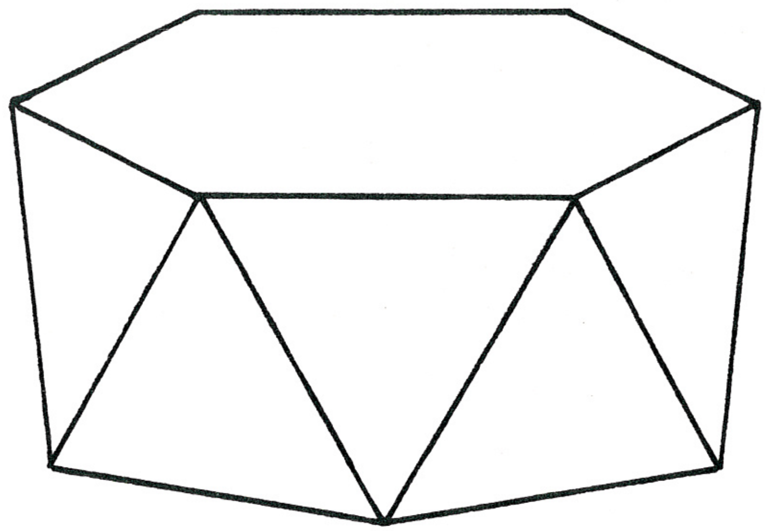
$$\boxed{H = \ell\sqrt{\sqrt{3} - 1}}$$

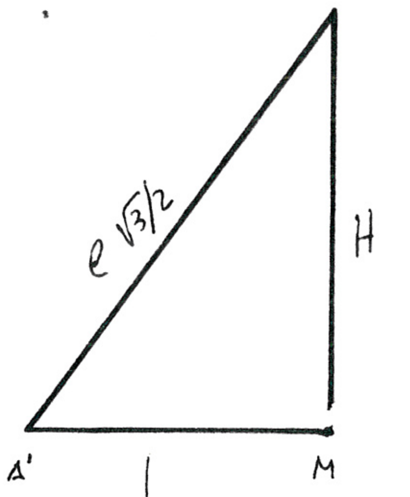
- En el antiprisma de base hexagonal, se gira una base 30°, para que las caras triangulares coincidan.

CARAS: 14 → 2 de ellas son hexagonales
↓ 12 son triángulos equiláteros.

VERTICES: 12 → a todos le llegan 4 aristas

ARISTAS: 24





$$\frac{\ell}{2\,\mathrm{sen}\,\alpha/2}\left[1-\cos\alpha/2\right]$$

$$h^2 = \ell^2\frac{3}{4} - \frac{\ell^2}{4\,\mathrm{sen}^2\alpha/2}\left[1-\cos\frac{\alpha}{2}\right]^2 =$$

$$= \frac{\ell^2}{4}\left[3 - \frac{1+\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\cos\alpha/2}{\mathrm{sen}^2\alpha/2}\right]$$

- En los antiprismas si los ángulos diedros son mayores, la altura de los cuerpos es menor que si los ángulos diedros son más pequeños.

- Cuantos más lados se ponen, más alto es el cuerpo y el ángulo diedro se acerca a 90°.

- Para saber cuántos grados hay que girar una base para formar un antiprisma, se divide 360° que son los grados de una circunferencia entre el doble de nº de aristas que tiene una base.

Ejemplo: Polígono regular de 64 aristas ¿Cuántos grados hay que girar una base?

$$\frac{360°}{128} = \boxed{2'8125°}$$

- Hay siempre 2 caras màs que el nº de vèrtices y la comparación de caras - aristas, es que aumenta sucesivamente a partir de 4 hasta 10 la resta de aristas y caras.

- Relación vèrtices - aristas: hay el doble de aristas que de vèrtices.

- El nº de vèrtices de un cuerpo es el nº de caras del antiprisma anterior.

- Son siempre nºs pares.