Taller de Talento Matemático

http://www.unizar.es/ttm

La Topología II

(20 de Enero 2023)

Álvaro Rodés

Departamento de Matemáticas – Universidad de Zaragoza

LA TOPOLOGIA II

En la charla del año pasado vimos una introducción a la Topología y realizamos algunos problemas de grafos como primeros ejemplos de problemas topológicos.

Veamos a continuación algunos problemas más de grafos y a continuación pasaremos a otros problemas topológicos.

1.- ALGUNOS PROBLEMAS DE GRAFOS

1.- En un futuro no muy lejano habrá viajes interplanetarios. Supón que en el sistema solar se establecieran las siguientes rutas (y sólo éstas): Tierra-Mercurio, Plutón-Venus, Tierra-Plutón, Plutón-Mercurio, Mercurio-Venus, Urano-Neptuno, Neptuno-Saturno, Saturno-Júpiter, Júpiter-Marte, y Marte-Urano. ¿Se podría realizar el viaje desde La Tierra hasta Marte?

2.- En cierto país hay nueve ciudades que llamaremos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Las rutas aéreas entre ellas son un tanto curiosas, pues sólo hay vuelo de una ciudad a otra si el número de dos dígitos formado por los nombres de las ciudades de salida y de llegada es divisible entre 3. ¿Se puede viajar de la ciudad 1 a la 9?

3.- Un trozo de alambre tiene 120 cm de longitud. ¿Se puede construir con él un cubo de 10 cm de lado simplemente doblándolo? ¿Cuál es el número mínimo de cortes que tendremos que hacer en el alambre para conseguir construir el cubo?

4.- En Pequeñelandia hay 15 teléfonos. ¿Podríamos conectarlos con cables de modo que cada teléfono tenga línea exactamente con otros cinco?

5.- Volvemos a los teléfonos de Pequeñelandia. ¿Podrían conectarse de modo que haya cuatro teléfonos que tengan cada uno línea con otros tres, ocho teléfonos que la tengan cada uno con otros seis y tres teléfonos que estén conectados cada uno con otros cinco?

6.- En un país hay cien ciudades y de cada ciudad salen (o llegan) cuatro carreteras. ¿Cuántas carreteras hay en ese país?

7.- En una clase hay treinta alumnos. ¿Puede ocurrir que nueve de ellos tengan exactamente tres amigos cada uno, once tengan cuatro amigos cada uno y diez tengan cinco amigos cada uno?

8.- En el país del Siete hay quince pueblos cada uno de los cuales está comunicado a por lo menos siete de los otros. Demuestra que se puede viajar de un pueblo a otro cualquiera, aunque para ello haya que pasar posiblemente por algún otro pueblo en medio.

2.- CARACTERISTICA DE EULER

La fórmula de Euler para poliedros: ***v-a+c=2***

Esta famosa fórmula descubierta por Euler en 1750, relaciona el número de vértices, aristas y caras de un poliedro convexo (en particular, homeomorfo a una esfera). Es curioso que verdaderos expertos en poliedros como Arquímedes o Descartes cayeran en la cuenta de esta relación, quizás fue porque se trataba de una fórmula en la que no intervenía ninguna magnitud de medida.

Ejercicio: Demostrar que los únicos poliedros regulares son los cuerpos platónicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Un poliedro regular es aquél en el que cada cara tiene el mismo número de aristas, y en cada vértice concurren el mismo número de aristas.

En la fórmula anterior Euler supone que los poliedros son convexos. En general, para poliedros no convexos se tiene que

$$v-a+c=2-2g,$$

donde g denota el número de agujeros del poliedro. Descubierta en 1813 por Anoine-Jean Lhuilier (1750-1840), es el primer **invariante topológico** que se conoce. Se suele denotar por $\chi = v-a+c$, se le llama característica de Euler .

Ejercicio: Probar que para un poliedro en forma de toro se cumple $v-a+c=0$. Se puede concluir entonces que el toro y la esfera no son homeomorfos ya que tienen características de Euler distintas.

Páginas web relacionadas:

El matemático como naturista, del libro "Cuentos con cuentas" de Miguel de Guzmán.

Euler's formula for poliedra, Euler's formula in higher dimensions, Visualizing the hypercube de la página de Zbigniew Fiederorwicz

$$V - E + F = 2$$

donde

V = número de vertices
E = número de lados
F = número de caras

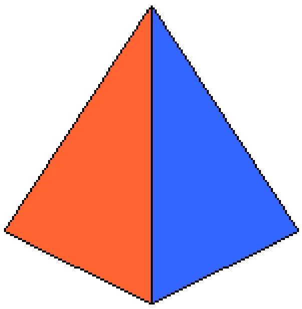
Tetrahedron

V = 4

E = 6

F = 4

4 - 6 + 4 = 2



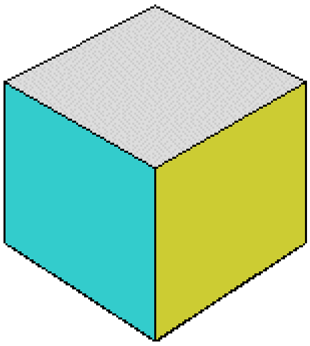
Cube

V = 8

E = 12

F = 6

8 - 12 + 6 = 2



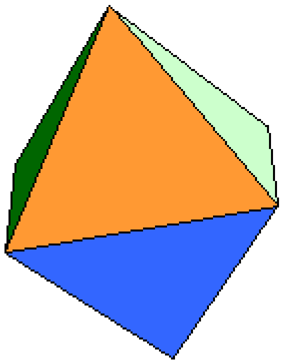
Octahedron

V = 6

E = 12

F = 8

6 - 12 + 8 = 2



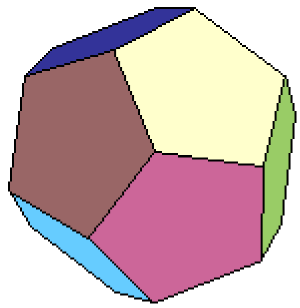
Dodecahedron

V = 20

E = 30

F = 12

20 - 30 + 12 = 2



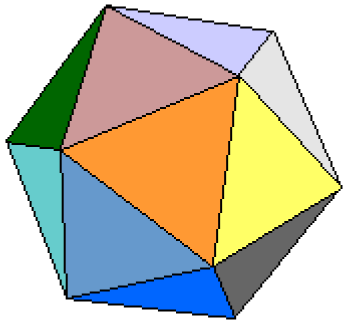
Icosahedron

V = 12

E = 30

F = 20

12 - 30 + 20 = 2



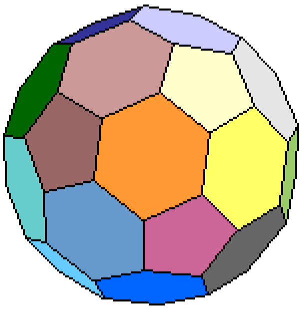
Buckyball

V = 60

E = 90

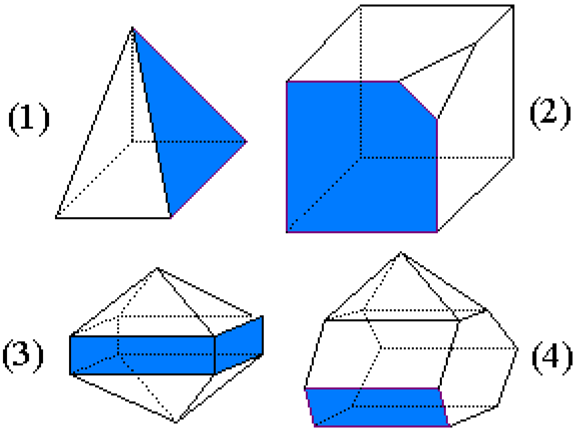
F = 32 (12 pentagons + 20 hexagons)

60 - 90 + 32 = 2



http://www.ual.es/~jlrodri/Topgen5/introduccion.html
http://www.math.ohio-state.edu/~fiedorow/math655/Euler.html

Poliedro	N° de caras (C)	N° de vértices (V)	N° de aristas (A)
(1)			
(2)			
(3)			
(4)			

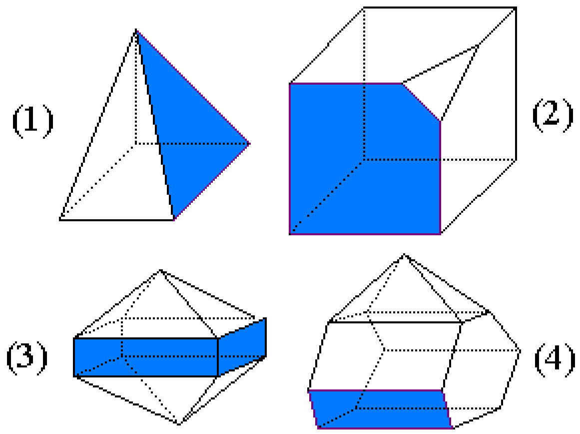


En http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/4eso/geometria/poliedros/poliedros.htm

se pueden ver mas propiedades de poliedros relacionados con lo que tratamos

FÓRMULA DE EULER

En los poliedros de la figura, cuenta el número de caras, vértices y aristas y escríbelos en la tabla.



Poliedro	N° de caras (C)	N° de vértices (V)	N° de aristas (A)
(1)			
(2)			
(3)			
(4)			

¿Encuentras alguna relación entre C, V y A?
Inténtalo con otros poliedros.

En todos los poliedros convexos se verifica siempre que el número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas más dos:

$$C + V = A + 2$$

Esta es la **fórmula de Euler**

En la tabla siguiente se dan algunos datos de poliedros convexos. Complétala e intenta dibujar alguno de ellos.

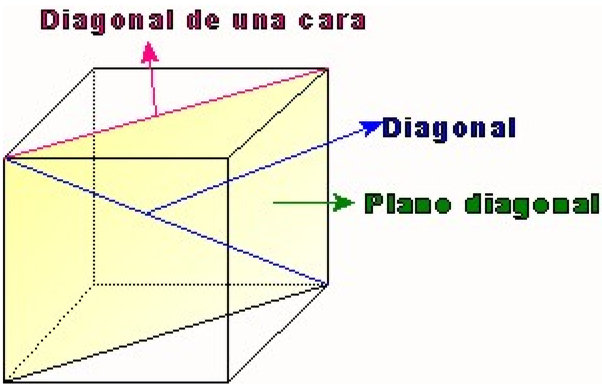
Poliedro	C	V	A
1	4		6
2		8	12
3	5	6	

1. Un poliedro tiene 7 caras. Cuatro de ellas son pentágonos y tres cuadriláteros.
   ¿Cuántas aristas tiene?
   ¿Cuántos vértices tiene?

   Nota: Observa que cada arista se forma uniendo dos lados de dos polígonos, lo cual nos permite relacionar el número total de lados con el de aristas.

2. Un poliedro tiene dos caras hexagonales y todas las demás son triángulos. Llamamos **t** al número de caras triangulares.
   a) Escribe una expresión para el número de aristas del poliedro.
   b) Usa la fórmula de Euler para una expresión del número de vértices.

   Hay otros elementos en los poliedros que debes conocer:



¿Cómo definirías la diagonal de un poliedro? ¿Y el plano diagonal?
¿Cuál es el número de diagonales y de planos diagonales del poliedro anterior?

3. Explica razonadamente cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas:

   - El número de aristas de un poliedro que concurren en un vértice es, como mínimo, 4.
   - Las caras de un poliedro son todas iguales.
   - Hay poliedros con tres caras.
   - En cada vértice de un poliedro concurren siempre el mismo número de aristas.
   - Las caras de un poliedro han de ser forzosamente polígonos.
   - Todos los poliedros de cinco caras tienen 8 aristas y 5 vértices.
   - El número mínimo de caras que concurren en un vértice es 3.
   - El cilindro es un poliedro.

POLIEDROS REGULARES

Entre todos los poliedros que existen hay unos especialmente importantes por sus propiedades, belleza y presencia en la vida real: los poliedros regulares. Se les conoce con el nombre de sólidos platónicos en honor a **Platón** (siglo IV a. de C.) que los cita en el ***Timeo***, pero lo cierto es que no se sabe en qué época llegaron a conocerse. Algunos investigadores asignan el cubo, tetraedro y dodecaedro a **Pitágoras** y el octaedro e icosaedro a **Teeteto** (415-369 a. de C.).
Para Platón los elementos últimos de la materia son los poliedros regulares, asignando el ***fuego al tetraedro***(*El fuego tiene la forma del tetraedro, pues el fuego es el elemento más pequeño, ligero, móvil y agudo)*, la ***tierra al cubo*** (el poliedro más sólido de los cinco), el ***aire al octaedro*** (Para los griegos *el aire, de tamaño, peso y fluidez, en cierto modo intermedios, se compone de octaedros)* y el ***agua al icosaedro***(*El agua, el más móvil y fluido de los elementos, debe tener como forma propia o "semilla", el icosaedro, el sólido más cercano a la esfera y, por tanto, el que con mayor facilidad puede rodar)*, mientras que el ***dodecaedro (el universo)*** (Como los griegos ya tenían asignados los cuatro elementos, dejaba sin pareja al dodecaedro. De forma un tanto forzada lo relacionaron con el Universo como conjunción de los otros cuatro: *La forma del dodecaedro es la que los dioses emplean para disponer las constelaciones en los cielos.* Dios lo utilizó para todo cuando dibujó el orden final).
A finales del siglo XVI, **Kepler** imaginó una ***relación entre los cinco poliedros regulares y las órbitas de los planetas del sistema solar entonces conocidos*** (Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno). Según él cada planeta se movía en una esfera separada de la contigua por un sólido platónico.

Un poliedro es regular si todas sus caras son regulares e iguales y todos sus vértices son del mismo orden.

Teniendo en cuenta las dos condiciones básicas para que se forme un poliedro:
- En un vértice de un ángulo poliédrico han de concurrir tres o más caras.
- La suma de los ángulos de las caras de un ángulo poliédrico ha de ser menor que 360 grados.

Razona por qué sólo hay 5 poliedros regulares.

Algebraicamente también se puede deducir que sólo existen 5 poliedros regulares. En un poliedro regular, llamamos **C** a su número de caras, **n** al número de lados de cada cara, **V** a su número de vértices, **A** el de aristas y **m** al número de aristas concurrentes en un mismo vértice.

Se verificarán, por tanto, las igualdades: n.C = 2A; m.V = 2A.

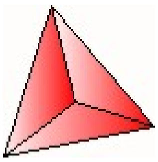
Por tanto: m.V = n.C. Es decir: $A = \frac{nC}{2}$ **y** $V = \frac{nC}{m}$

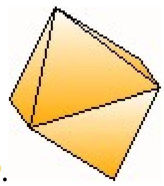
Sustituyendo en la fórmula de Euler: $C + \frac{nC}{m} = \frac{nC}{2} + 2$. Multiplicando por 2m:

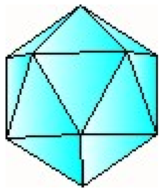
2mC + 2nC = mnC + 4mC. Despejando C: $C = \frac{4m}{2(m+n) - mn}$

Como el mínimo número de lados de un polígono es tres y el mínimo número de aristas que concurren en un vértice de un poliedro es tres, se pueden presentar los siguientes casos:

1.- Si n = 3 y:

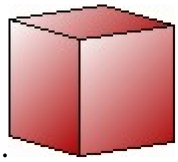
a) m = 3, entonces C = 4 y obtenemos el **tetraedro regular**. 

b) m = 4, entonces C = 8 y obtenemos el **octaedro regular**. 

c) m = 5, entonces C = 20 y obtenemos el **icosaedro regular**. 

d) m = 6, entonces C = 24/0 y no se obtiene ningún poliedro.

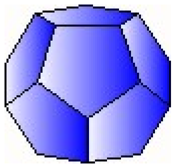
2.- Si n = 4 y:



a) m = 3, entonces C = 6 y obtenemos el **hexaedro regular** o **cubo**.

b) m = 4, entonces C = 16/0 y no se obtiene ningún poliedro.

3.- Si n = 5 y:



a) m = 3, entonces C = 12 y obtenemos el **dodecaedro regular**.

b) m = 4, entonces C = -8 y no obtenemos ningún poliedro.

4.- Si n = 6 y:

a) m = 3, entonces C = 12/0 y no obtenemos ningún poliedro.

Actividad

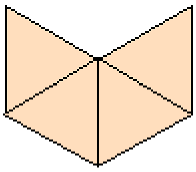
4. Con las hojas de polígonos troquelados, o con el polydrón, construye los cinco sólidos platónicos y comprueba en ellos la fórmula de Euler.

DESARROLLO DE POLIEDROS

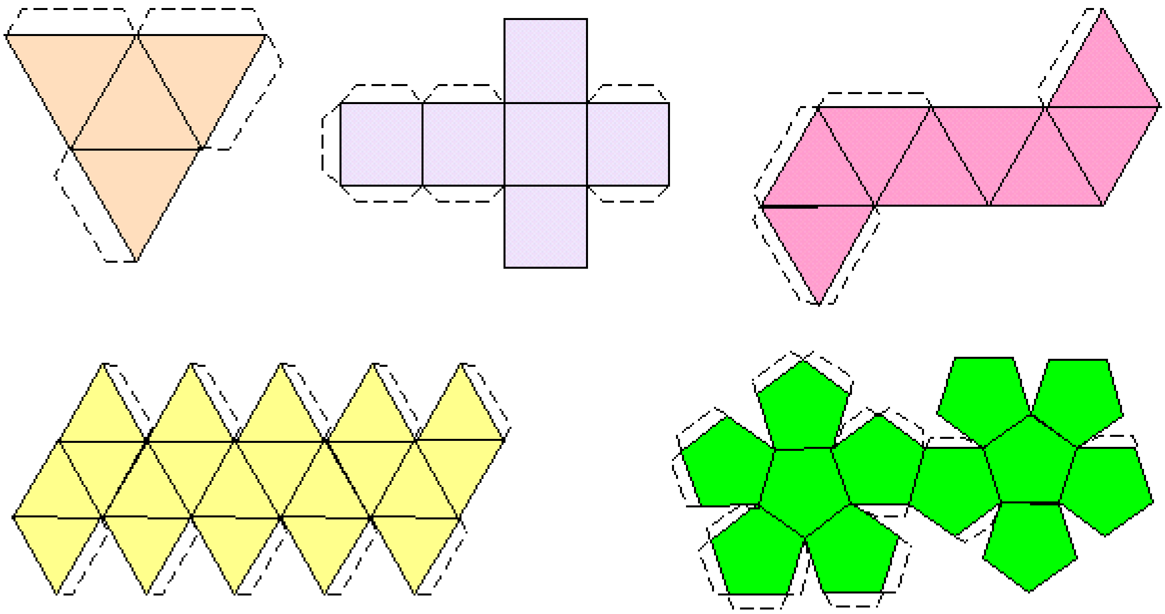
Si en un poliedro cortamos por un número suficiente de aristas de forma que quede una sola pieza y la extendemos en el plano, obtenemos un desarrollo del poliedro.

Actividades

5. Intenta dibujar dos desarrollos diferentes del tetraedro.
   ¿Crees que la figura adjunta es el desarrollo de un tetraedro?



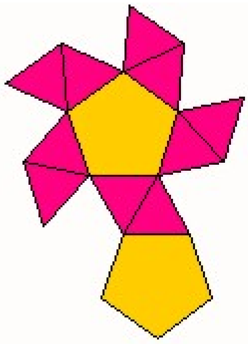
6. En la figura siguiente tienes pintado un desarrollo de cada sólido platónico. Partiendo de ellos, intenta construirlos con el polydrón o con las hojas de polígonos troquelados. (Si no dispones de estas herramientas, entonces dibújalos igual en una cartulina, recórtalos y constrúyelos.
   ¡Ah! ¡No te olvides de las pestañas para poder pegar bien las aristas!.



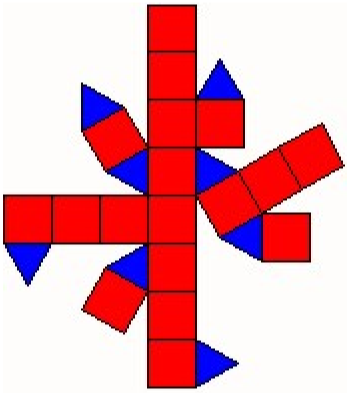
Habrás podido comprobar que, partiendo de un desarrollo del poliedro, es más sencillo construirlos.

Actividad

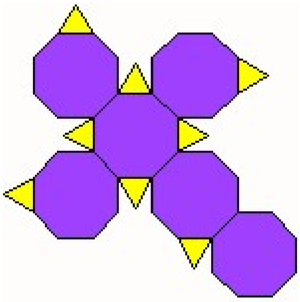
7. Con un polydrón o con hojas de polígonos troquelados, intenta construir los poliedros cuyos desarrollos son los siguientes:



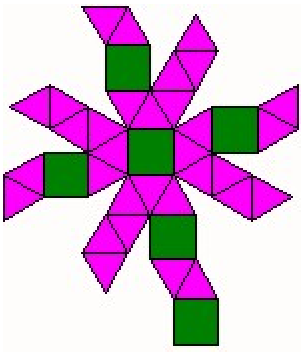
Antiprisma Pentagonal



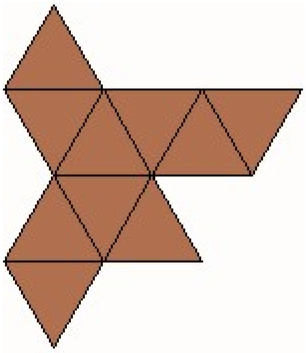
Rombicuboctaedro



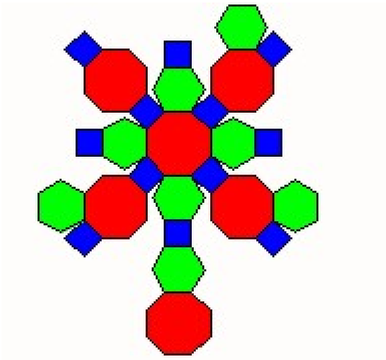
Cubo truncado



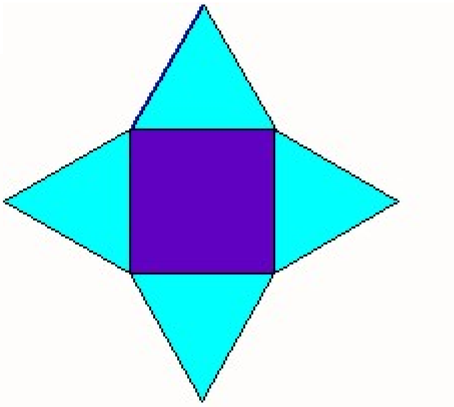
Cubo chato



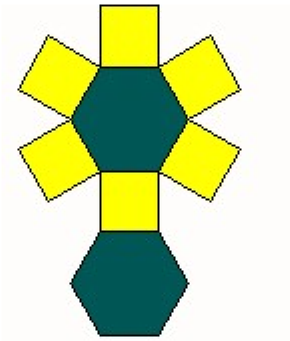
Deltaedro-10



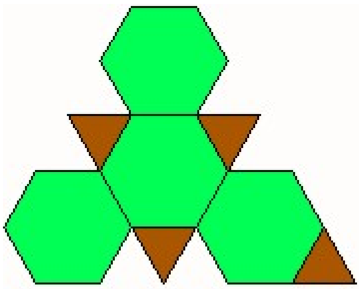
Gran rombicuboctaedro



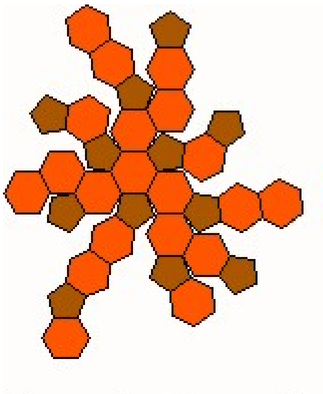
Pirámide de base cuadrada



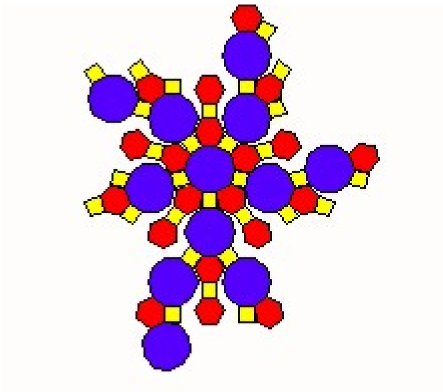
Prisma hexagonal



Tetraedro truncado



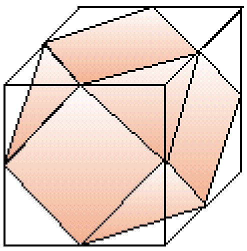
Icosaedro truncado



Gran rombicosidodecaedro

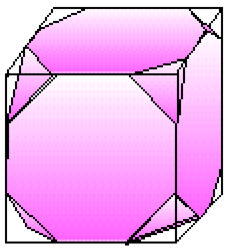
CORTANDO POLIEDROS

Son muchas e interesantes las actividades que se pueden hacer con los poliedros mediante secciones o cortes adecuados. Así, cortando adecuadamente los poliedros regulares se obtienen otros poliedros que tienen todas sus caras regulares pero no iguales (aunque sí de la misma arista). A estos poliedros se les llama **arquimedianos**, en honor a **Arquímedes** que los describió por primera vez, o **semirregulares** ya que mantienen la regularidad de las caras y de los vértices, aunque no la igualdad de las caras.
Para practicar secciones con los poliedros puede trabajarse con plástico poroso (***porespan***) cortando con una segueta eléctrica.
Obtenemos los poliedros arquimedianos haciendo dos tipos de secciones:
1.- Cortando por un plano que pase por el punto medio de todas las aristas que concurren en cada vértice. El nuevo poliedro tendrá unas caras cuyo número de lados será igual al orden del vértice y otras del mismo número de lados que las caras del poliedro inicial.



Cuboctaedro

2.- Cortando por un plano que pase a una distancia del vértice igual a un tercio del valor de la arista. El poliedro resultante tendrá unas caras con un número de lados igual al orden del vértice y otras con doble número de lados que las del poliedro inicial.



Cubo truncado

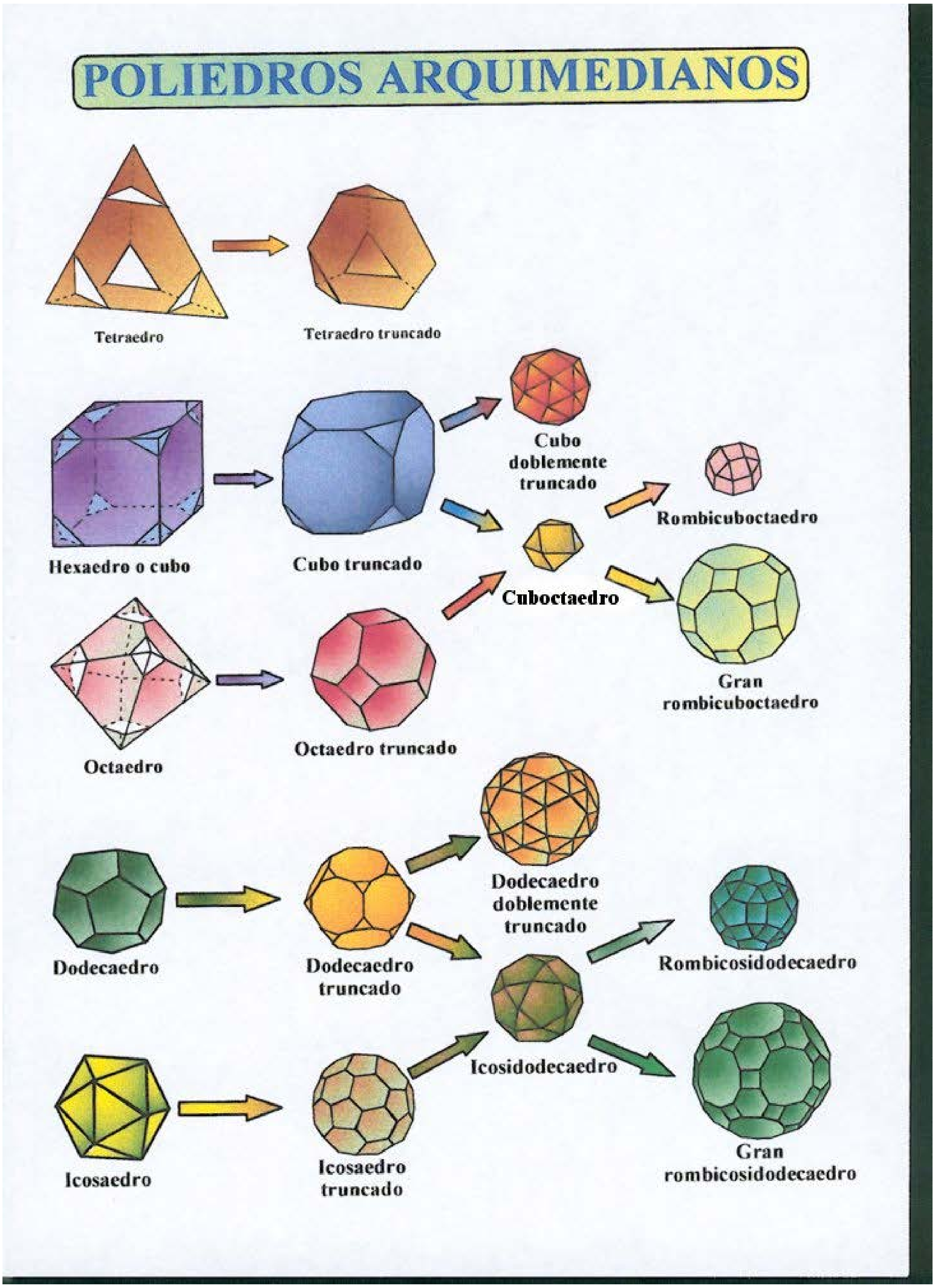
Con esta forma cristaliza, por ejemplo, la **Fluorita**.

Actividad

8. Construye tú algunos poliedros semirregulares.

   Hay sólo 13 poliedros arquimedianos. En la tabla siguiente tienes alguna información de ellos y después los tienes dibujados según la forma de obtenerlos.

V A			Nombre (Procede del...)	Polígonos que lo forman:Tr Cu Pe Ex Oc De					
12	18	8	**Tetraedro truncado (T)**	4			4		
24	36	14	**Cubo truncado (C)**	8				6	
24	36	14	**Octaedro truncado (O)**		6		8		
60	90	32	**Dodecaedro truncado (D)**	20					12
60	90	32	**Icosaedro truncado (I)**			12	20		
12	24	14	**Cuboctaedro (C,O)**	8	6				
24	48	26	**Rombicuboctaedro (C,O)**	8	18				
48	72	26	**Gran rombicuboctaedro (C,O)**		12		8	6	
24	60	38	**Cubo doblemente truncado (C)**	32	6				
30	60	32	**Icosidodecaedro (D,I)**	20		12			
60	120	62	**Rombicosidodecaedro (D,I)**	20	30	12			
120	180	62	**Gran rombicosidodecaedro (D,I)**		30		20		12
60	150	92	**Dodecaedro doblemente truncado (D)**	80		12			



Algunos ejemplos de poliedros

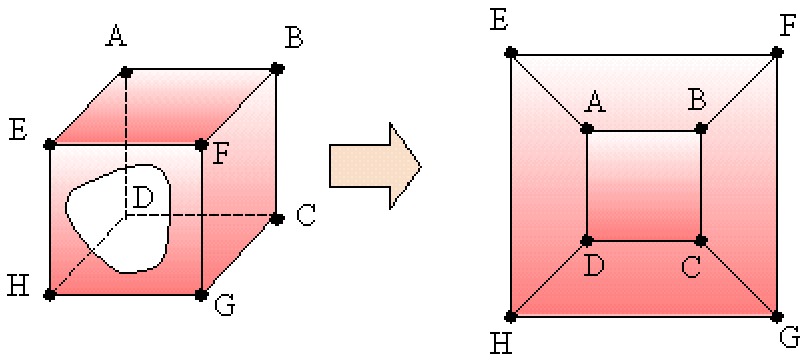
Los poliedros arquimedianos aparecen continuamente en la naturaleza y también el ser humano los ha utilizado para ornamentaciones, en farolas, lámparas, etc. Los mismos balones de fútbol han estado hechos siempre con 12 pentágonos y 20 hexágonos (icosaedro truncado), aunque hoy día se han cambiado por otra forma poliédrica más

redondeada (el pequeño rombicosidodecaedro) que tiene 20 triángulos, 30 cuadrados y 12 pentágonos (ocupa más del 94% de la esfera circunscrita).
En 1.996 se concedió el premio Nobel de Química a tres investigadores por el descubrimiento del **fullereno** cuya forma es un icosaedro truncado.
Los panales de abejas tienen forma de prismas hexagonales; El virus de la poliomelitis y de la verruga tienen forma de Icosaedro; Las células del tejido epitelial tienen forma de Cubos y Prismas; Los **Radiolarios** presentan formas de Octaedros con apéndices, Icosaedros regulares y dodecaedros; etc.
En sus formas naturales, muchos minerales cristalizan formando poliedros característicos. Así, por ejemplo, algunos de los más conocidos son:
- Galena, Sal Gema, Platino y Diamante, cristalizan formando Hexaedros.
- Fluorita, Magnetita, Oro y Cobre, cristalizan formando Octaedros.
- Cinabrio, Calcita o Bismuto, cristalizan formando Romboedros.
- La Pirita cristaliza formando Dodecaedros.
- El Azufre forma Prismas Rómbicos.
- El Lapislázuli cristaliza en forma de Rombododecaedros.
- El Azufre adquiere forma de Bipirámide Rómbica y la Discrasita y el Cuarzo de Bipirámide Hexagonal.

Diagramas de Schlegel

Actividad

9. Habrás observado en la actividad anterior que la fórmula de Euler aparece otra vez cambiando la palabra cara por región. La explicación de esto es que todo poliedro se puede transformar en una red. La figura siguiente nos muestra cómo hacerlo en el cubo.
   Apoyamos el cubo en una pared (cara ABCD), rompemos una cara (EFGH) y estiramos las otras caras sobre la pared (sin romper las aristas) rodeando el cuadrado obtenido con la cara rota.

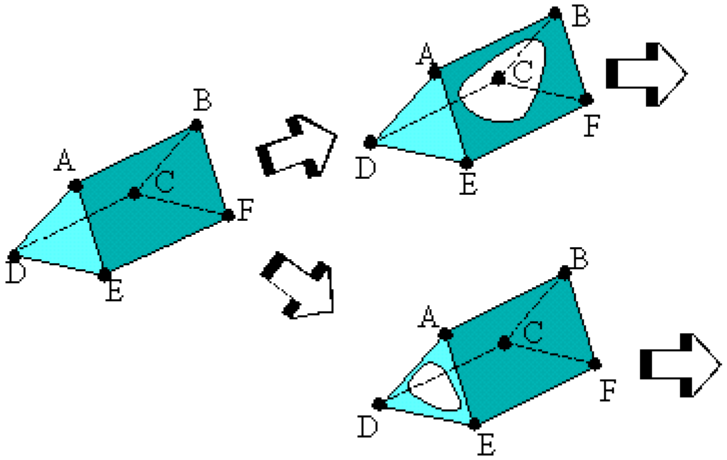


Esta representación de un poliedro es una red que se llama **diagrama de Schlegel**, en donde cada región, incluida la exterior, corresponde a una cara de dicho poliedro.
Los poliedros regulares tienen un diagrama de Schlegel único, pero cualquier otro tendrá varios, dependiendo de la cara que rompamos.

Actividades

10. Dibuja el diagrama de Schlegel de los demás sólidos platónicos. (Una forma de ayudarte consiste en, una vez construido el poliedro, quitar una de sus caras y mirar hacia el interior).

11. Completa el dibujo siguiente:

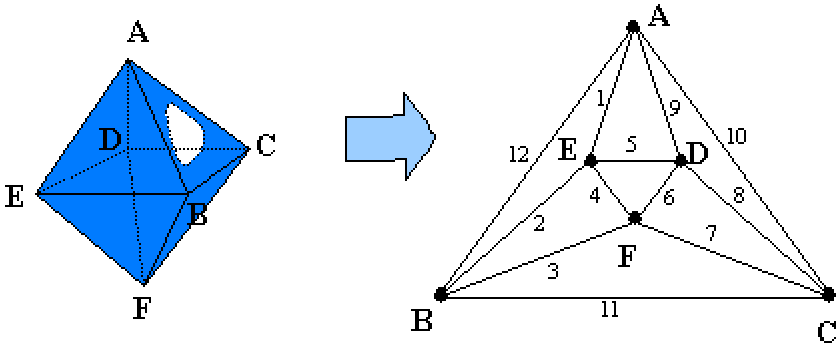


12. Dibuja dos diagramas de Schlegel de una pirámide pentagonal.

Los diagramas de Schlegel nos permiten ver a la vez todas las caras, aristas y vértices de un poliedro, así como el orden de cada vértice, lo que nos facilitará el estudio de determinados problemas, tales como los de **recorrido y coloración**.

Actividad resuelta

13. Una araña está situada en el vértice A del octaedro de la figura. Queremos averiguar el recorrido que ha de hacer la araña, de manera que pase una sola vez por cada una de las aristas y vuelva al punto A de partida.



Si hacemos su diagrama de Schlegel (indicado en la figura), resulta más fácil averiguarlo. Un posible recorrido es el indicado con números.

3.- TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES

Un poco de historia

En 1852, Francis Guthrie, que había salido hacía poco de la Universidad en Londres, escribió a su hermano, aún estudiante allí, si existiría alguna demostración del hecho, que los impresores de mapas constantemente usaban, de que cuatro colores son suficientes para colorear adecuadamente cualquier mapa. Frederick, su hermano, no supo darle ninguna razón, pero preguntó a uno de los profesores, buen matemático y aficionado, por otra parte, a los rompecabezas y juegos matemáticos.

Su nombre era Augustus De Morgan. De Morgan no supo demostrarlo, pero fue pasando la bola, que llegó a uno de los más famosos matemáticos del tiempo, Arthur Cayley. En 1878 Cayley propuso el problema como interesante a la London Mathematical Society.

Apenas un año después, un abogado de Londres, Arthur B. Kempe, publicó un artículo en el que se proponía una demostración de que cuatro colores eran suficientes. La solución de Kempe se dio por buena durante once años.

En 1890 P. J. Heawood encontró un fallo en el ingenioso y complicado argumento de Kempe. Se entusiasmó Heawood tanto con el problema, que toda su vida la dedicó a estudiarlo a fondo. Por más de sesenta años trabajó en él desde ángulos muy distintos, obteniendo resultados interesantes que hicieron avanzar considerablemente la topología, pero no consiguió resolver el problema original.

Francis Guthrie.
Imagen Univ. Sant Andrew

Alfred B. Kempe
Imagen Univ. Sant Andrew

Percy J. Heawood
Imagen Univ. Sant Andrew

Varios matemáticos dieron demostraciones que resultaron tener errores, pero lo que sí se logró con el paso de los años y el trabajo de tanta gente, fue demostrar dos cosas fundamentales:

- Tres colores son insuficientes para colorear todo mapa, es decir, existen mapas que no pueden colorearse de ningún modo usando únicamente tres colores.

- Con cinco colores se puede colorear cualquier mapa correctamente.

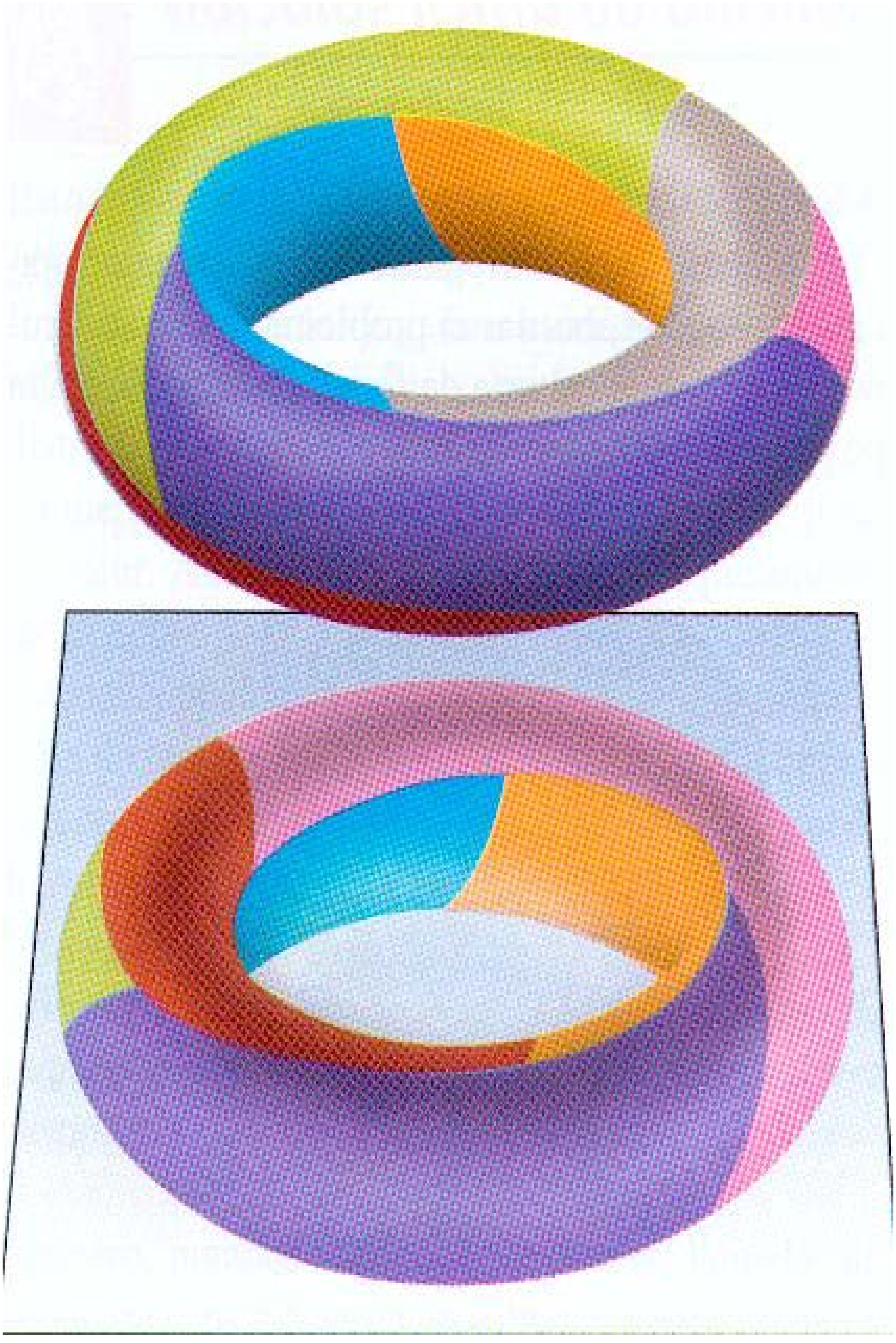
De manera que aunque no se había probado nada respecto a los cuatro colores por lo menos ya se sabía que con tres faltaba y con cinco sobraba, así el número cuatro era el candidato ideal. Había entonces que probarlo o refutarlo.

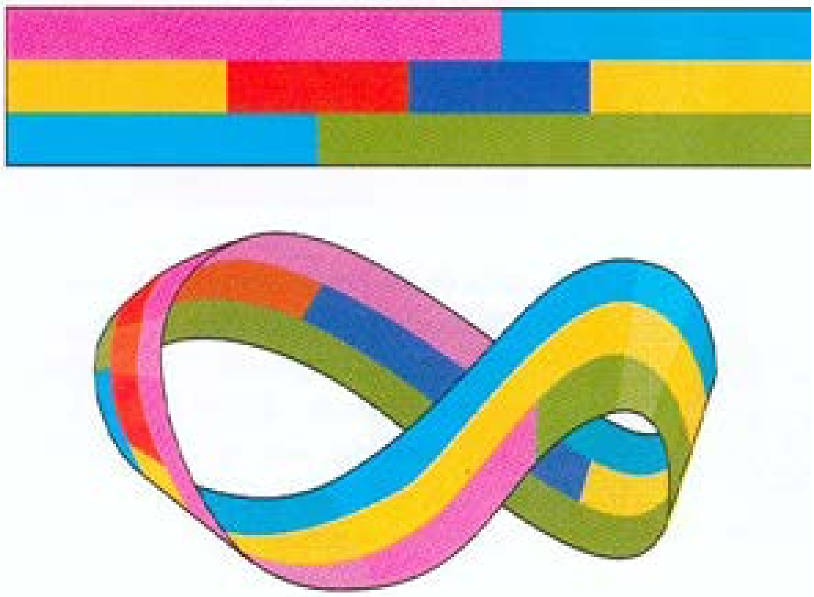
Algunos matemáticos dudaban de su veracidad :

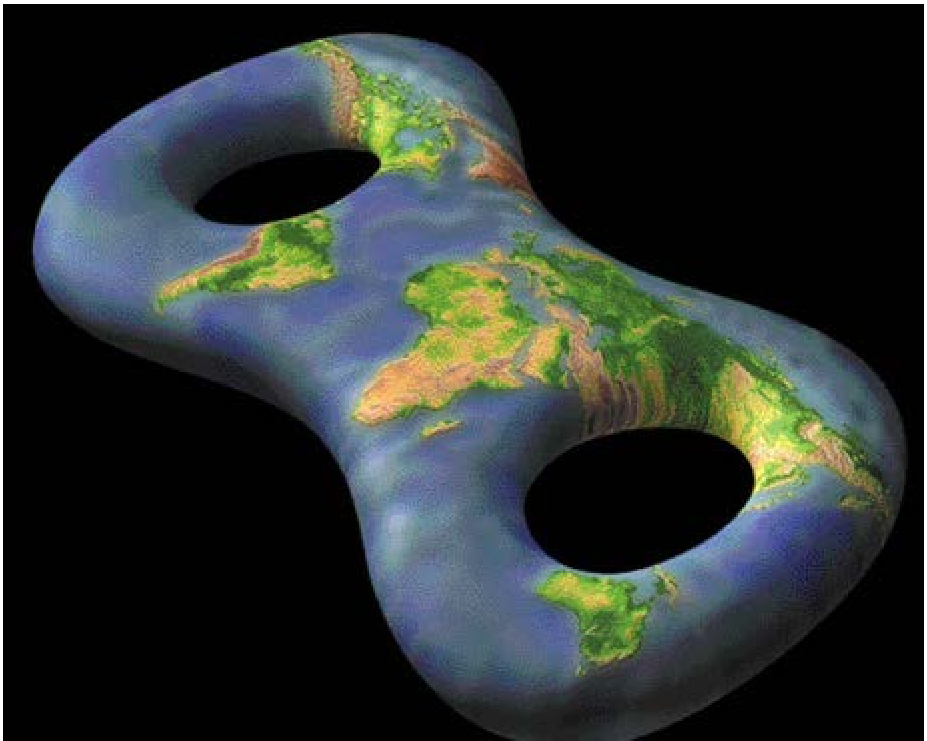
Si hubiera de atreverme a formular una conjetura, diría que posiblemente existan mapas que exigen el empleo de cinco colores, pero que incluso el más sencillo de ellos tendrá tantas regiones, centenares de miles, posiblemente, que nadie enfrentándose a él, tendría el tiempo ni la paciencia para hacer todas las comprobaciones que serían necesarias para excluir la posibilidad de poderlo colorear con cuatro tintas.

Coxeter, H. M.

- Entre otras cosas se averiguó que para un mapa cualquiera en la superficie de un neumático, siete colores bastan, que para un mapa en la cinta de Möbius bastan seis...







¡Problemas aparentemente más complicados fueron pronto resueltos, pero el de Francis Guthrie en el globo ó en el plano hubo de esperar más de cien años la ayuda decisiva del computador!

En 1950 se sabía que cualquier mapa de menos de 36 países se puede colorear con cuatro colores. En los años cincuenta, Heinrich Heesch, profesor en Hannover, empezó a pensar que las ideas de Kempe, junto con la ayuda del computador, podrían tal vez conducir a una solución, pero, aunque presentía cómo se podría hacer la cosa, aún estaba lejos de la realización de su plan de trabajo. Desde 1950 a 1970 Heesch fue desarrollando las técnicas que han conducido a la solución. El perfeccionamiento y realización de este plan de trabajo ha sido llevado a cabo, desde 1970 a 1976, por Kenneth Appel y Wolfgang Haken, de la Universidad de Illinois.

Después de muchas horas de pensar y de trabajo y diálogo con el computador, por fin pudieron anunciar, en junio de 1976, que, efectivamente, **cuatro colores bastan**.

(¡124 años después de que se había propuesto el problema!). La computadora tardó 1,200 horas en correr un programa que tenía miles de líneas de largo, y para todos los mapas encontró una coloración en la que a lo más se usaban cuatro colores. ¡El problema había sido resuelto!

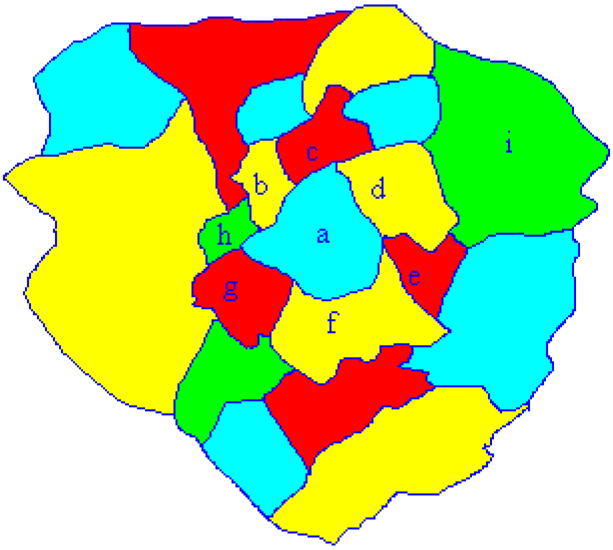
¿De verdad?

Muchos matemáticos aceptaron esto como una prueba irrefutable, pero muchos otros argumentaron que eso no era una demostración matemática, la máquina había comprobado que una gran cantidad de mapas podían colorearse usando a lo más cuatro colores, ¿pero que tal sí existía un mapa, que la computadora no hubiera contemplado, que no podía colorearse de esa forma?

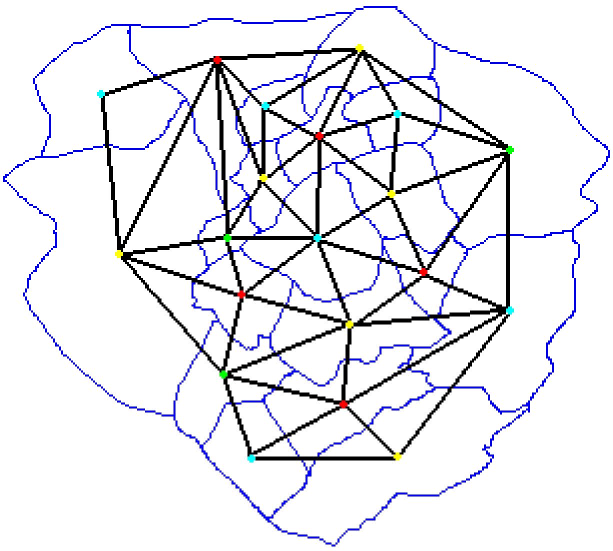
La discusión continuó por veinte años, hasta que en 1996, los matemáticos Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour y Robin Thomas, de la Escuela de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Georgia, en Estados Unidos, publicaron una demostración, aparentemente correcta, del "teorema de los cuatro colores". Y así acaba la historia, pues hasta ahora nadie la ha refutado...

Aquí tenemos unos ejemplos de mapas pintados con cuatro colores :

El mapa siguiente muestra que tres colores no bastan: Si se empieza por el país central **a** y se esfuerza uno en utilizar el menor número de colores, entonces en la corona alrededor de **a** alternan dos colores. Llegando al país **h** se tiene que introducir un cuarto color. Lo mismo sucede en **i** si se emplea el mismo método.

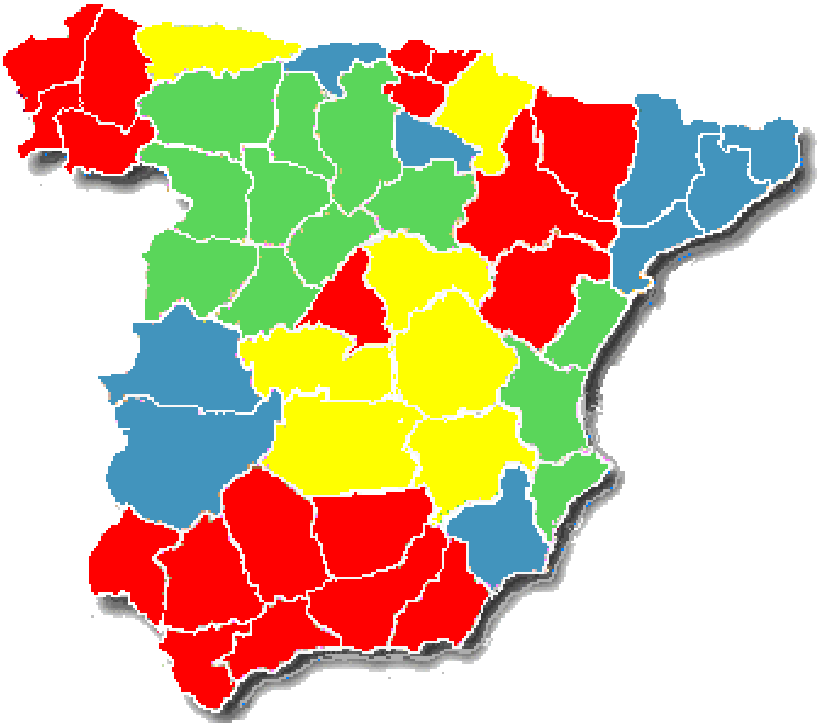


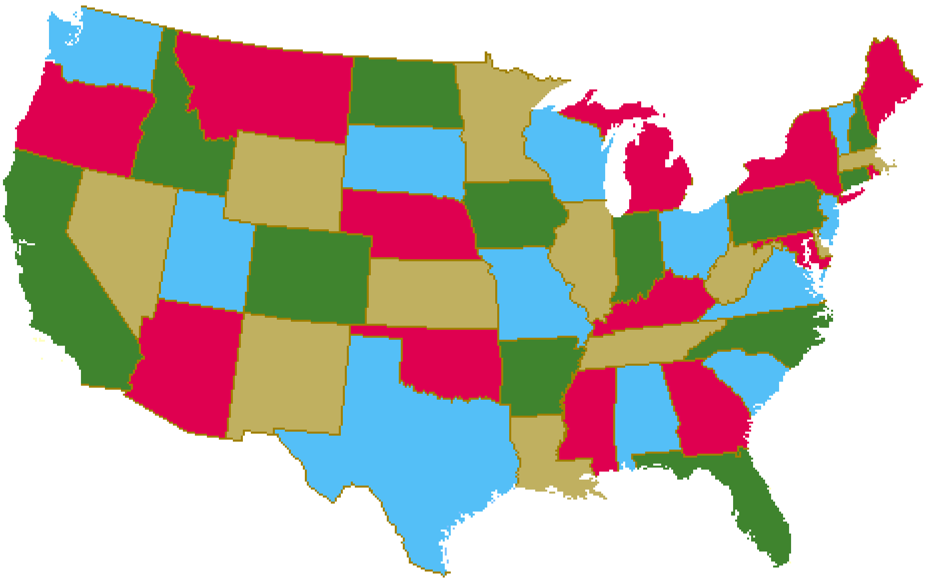
La forma precisa de cada país no importa; lo único relevante es saber cual país toca cual otro.

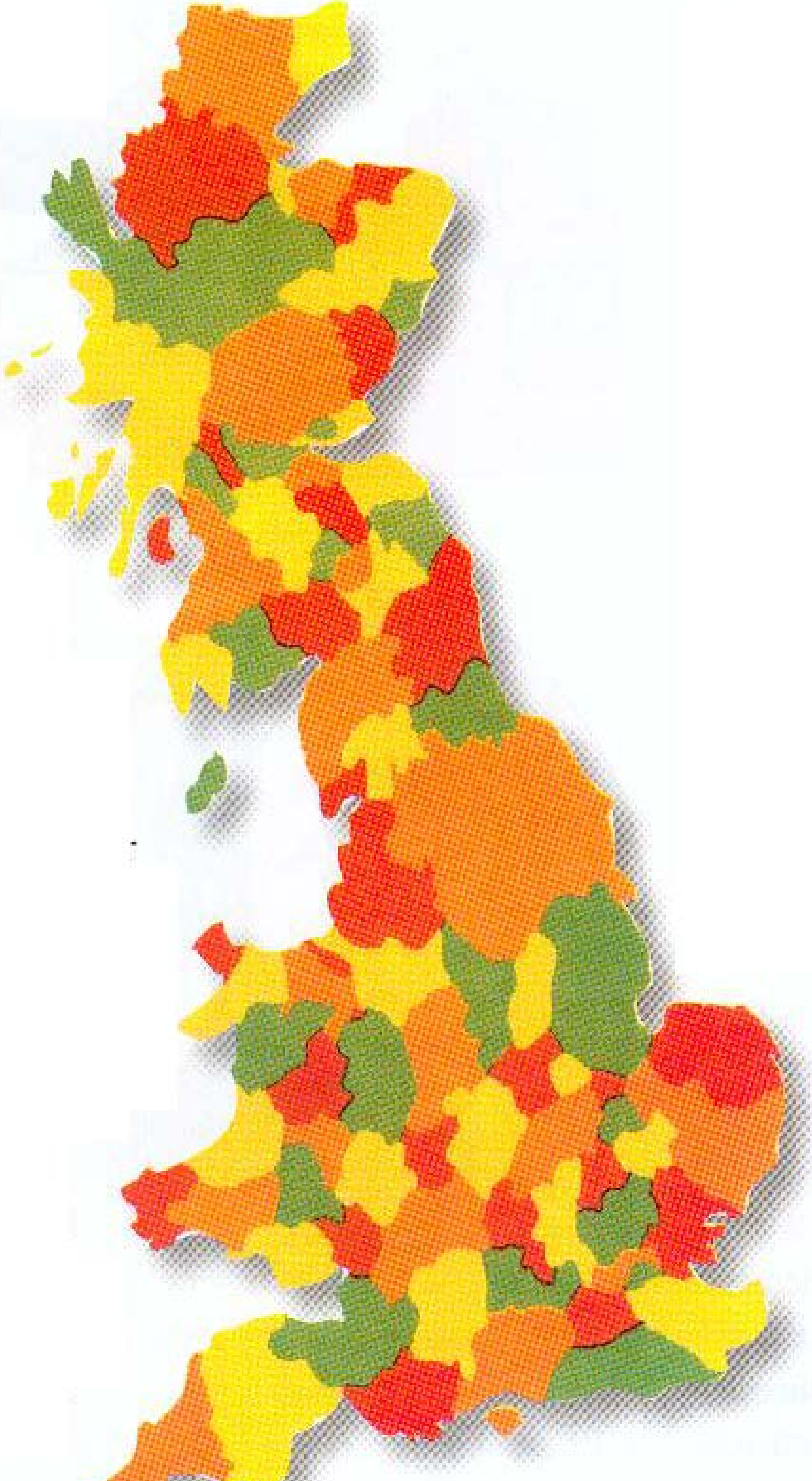


Estos datos están incluidos en el grafo donde los vértices son los países y las aristas conectan los que justamente son adyacientes . Entonces la cuestión equivale a atribuir a cada vértice un color distinto del de sus vecinos.

Aquí te ponemos un ejemplo con el mapa de España. Si quieres puedes intentarlo tú, de otra manera o con otros cuatro colores distintos con el mapa de España que está en blanco.







Algunas de las falsas demostraciones que se han dado a éste problema se basaban en resolver el siguiente, que aunque parecido al de cuatro colores, dista mucho en dificultad.

Algunas de las falsas demostraciones que se han dado a éste problema se basaban en resolver el siguiente, que aunque parecido al de cuatro colores, dista mucho en dificultad.

OTROS PROBLEMAS RELACIONADOS CON EL DE LOS CUATRO COLORES

A.- EL PRINCIPE ORIENTAL Y SUS CINCO HIJOS.

Moebius en una conferencia que dio en 1840, presentó éste problema en forma de cuento acerca de un príncipe oriental que legó su reino a sus cinco hijos con la condición de que fuera dividido en cinco regiones, cada una de ellas fronteriza con las otras cuatro**. ¿Es posible hacer el reparto?**

Este problema es equivalente al siguiente de la teoría de gráficos:

¿Es posible disponer cinco puntos sobre el plano de manera que sea posible unir cada uno con los otros cuatro mediante líneas rectas que no se corten?

Se podría creer que el teorema de los cuatro sería consecuencia inmediata de éste, pero tal conjetura es errónea.

B.- JUEGO DE BARR: PARA VER LA DIFICULTAD DEL TEOREMA

La dificultad para colorear un mapa concreto adecuadamente se pone de manifiesto rápidamente en el siguiente juego ideado por Stephen Barr. Dos jugadores, A y B, se sientan con cuatro lápices de diferentes colores y un papel. El jugador A dibuja una región. El jugador B le da un color y dibuja otra región. Entonces A la colorea y dibuja otra región... Gana quien, a base de mala idea al diseñar las regiones sucesivas, haga que el otro no pueda colorear adecuadamente la región propuesta.

C.- MAPAS BICOLORES

Hay muchos mapas que pueden colorearse con menos de cuatro colores. Naturalmente, en cuanto el mapa tenga al menos dos regiones, un color es insuficiente. Podemos preguntarnos si habrá muchos mapas para los que basten dos colores.

Si nos fijamos en un papel cuadriculado, es inmediato ver que dos colores bastan para colorearlo. Hay que recordar también que estamos trabajando en topología donde las distorsiones no cambian el problema topológico. Con ello no es difícil probar los resultados siguientes para mapas bicolores.

Todos posibles mapas planos que se formen utilizando sólo líneas rectas, como por ejemplo un damero, pueden colorearse con dos colores.

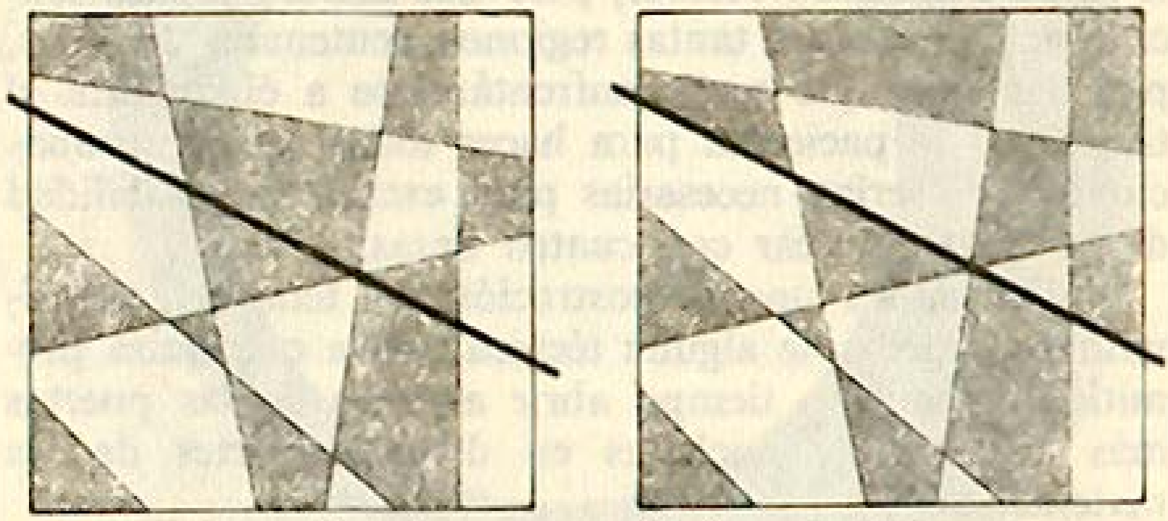


FIG. 45. Dos colores bastan para iluminar cualquier mapa construido con rectas que lo atraviesan en toda su extensión.

¿Y si las líneas no son rectas? Recordar que estamos en topología.

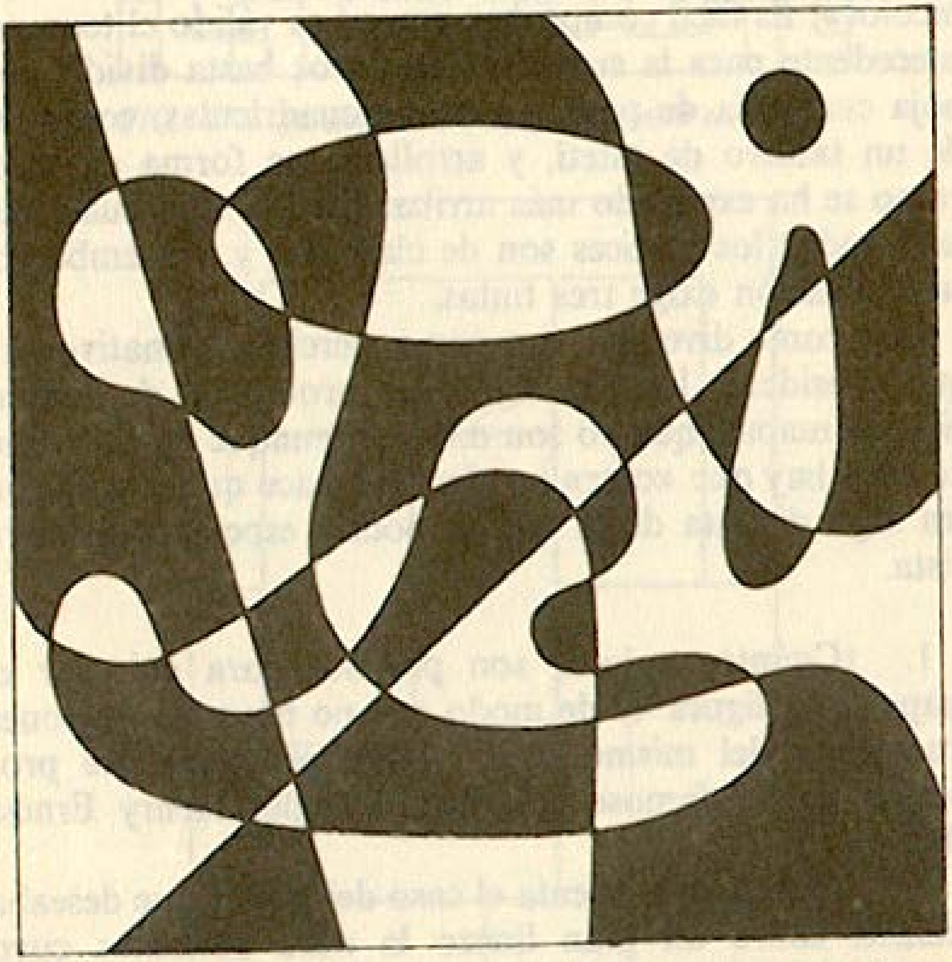
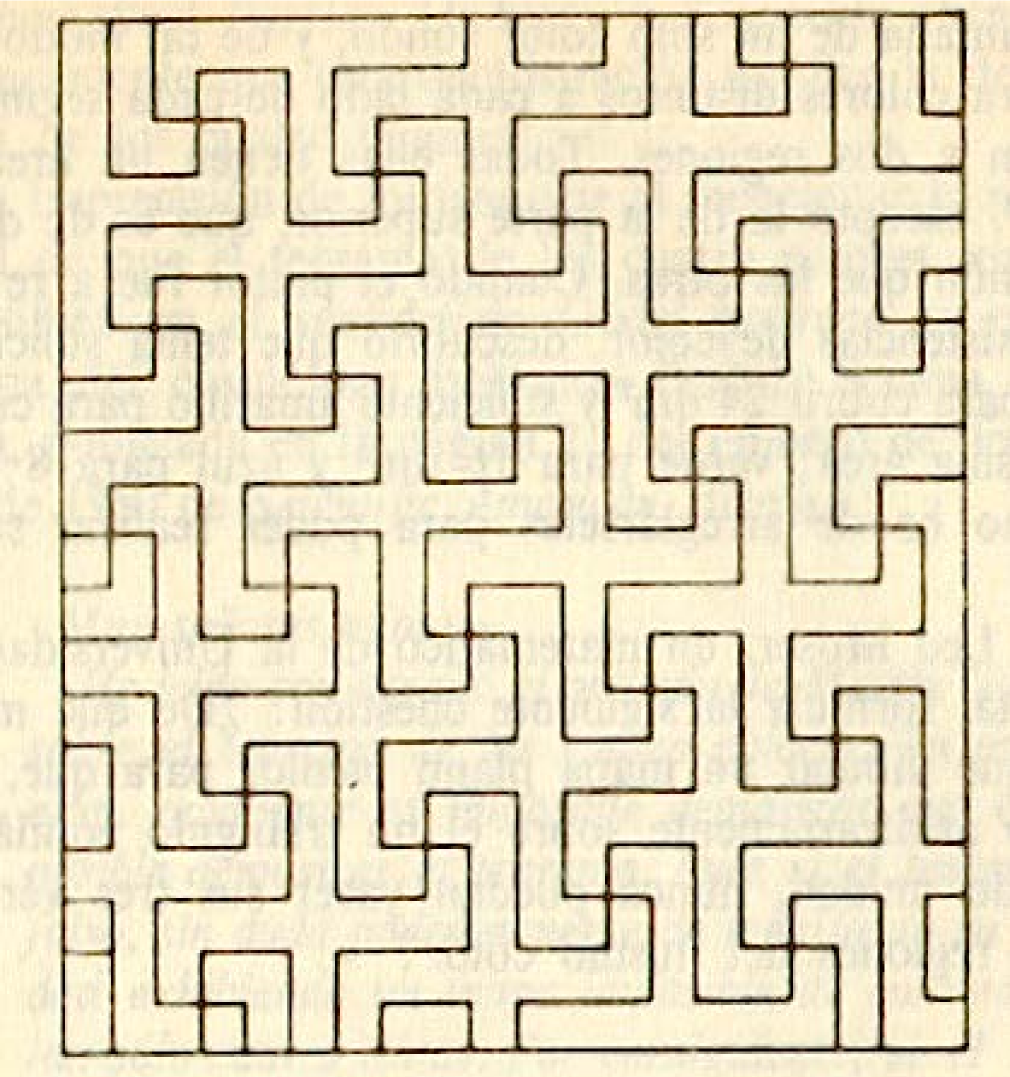
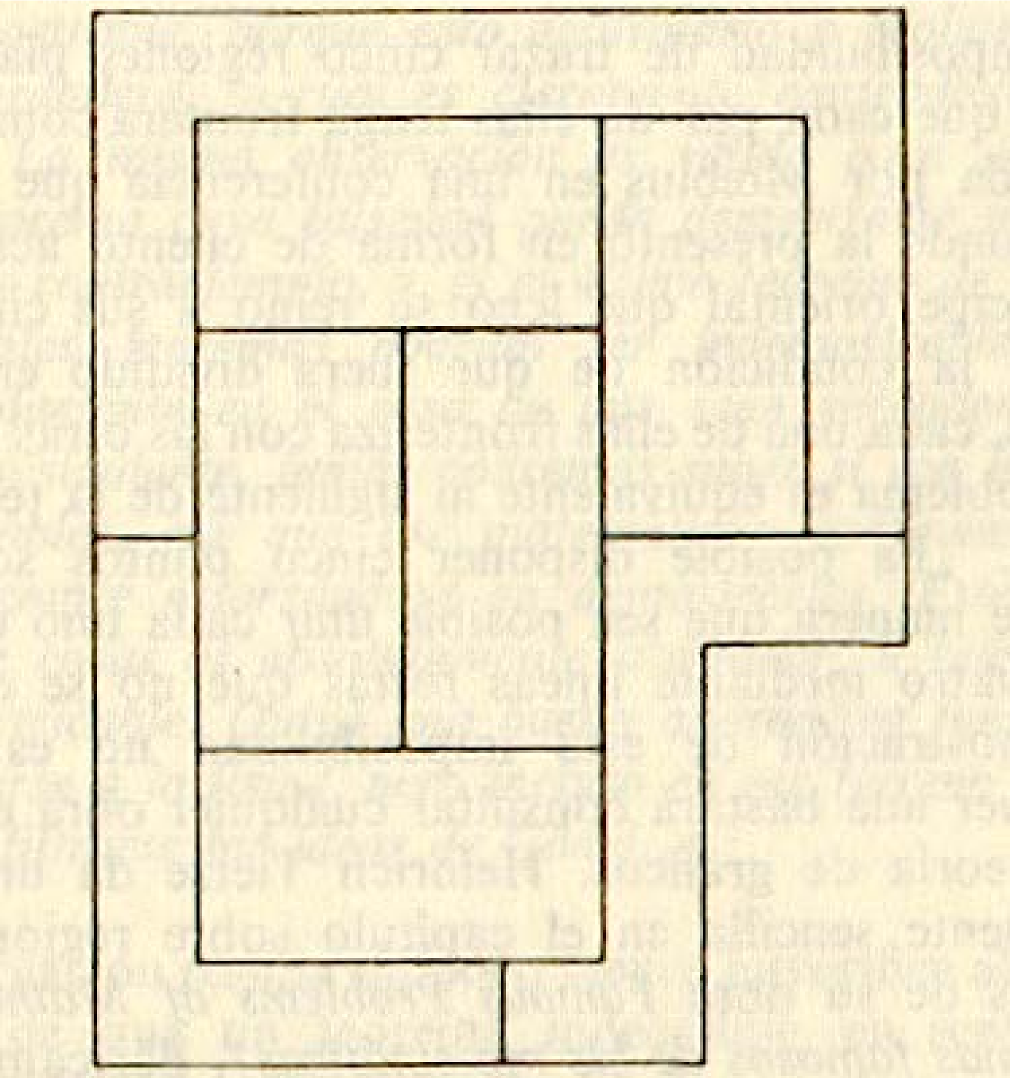


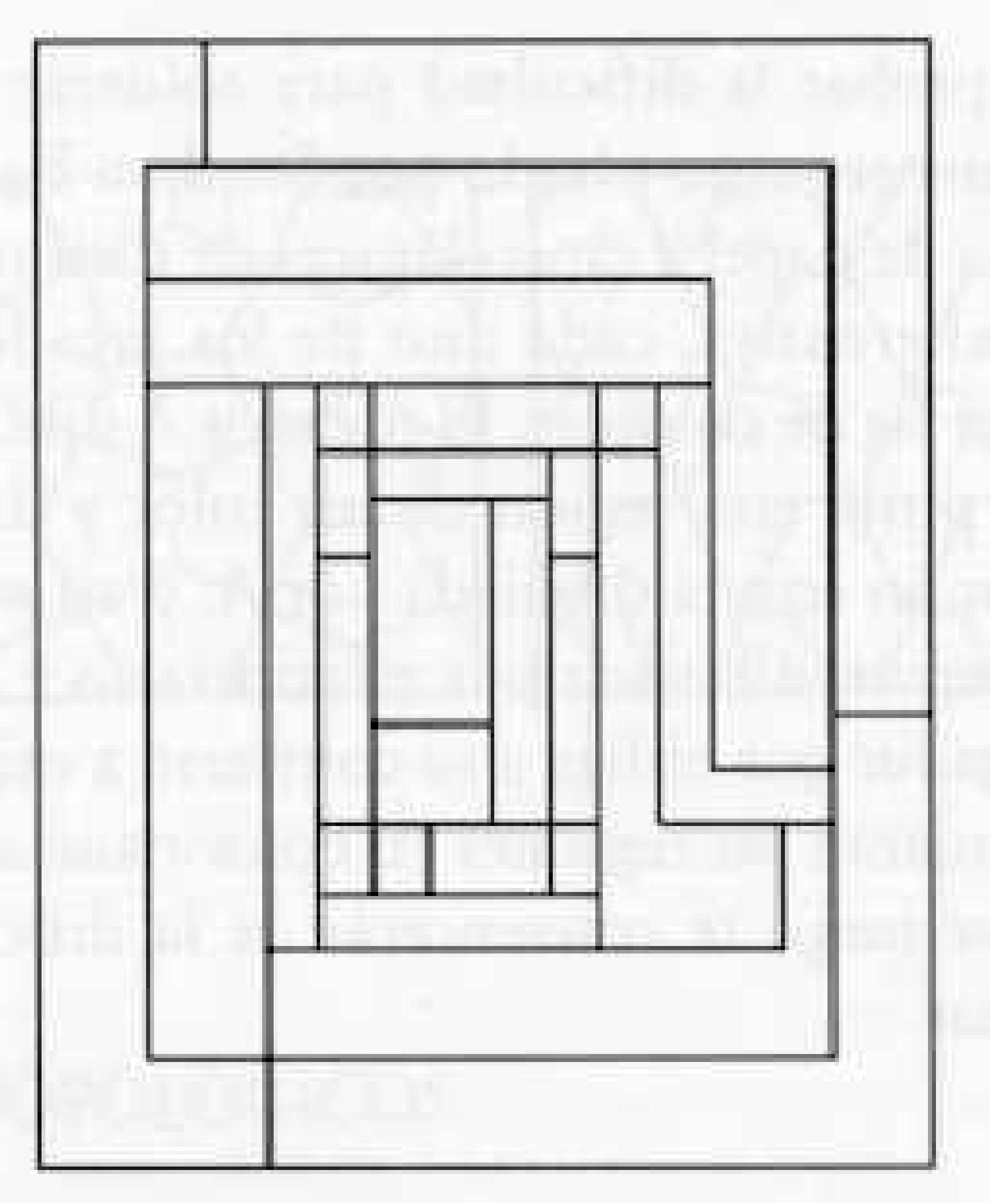
FIG. 46. Dos colores son también suficientes para un mapa formado por líneas que lo atraviesan o que forman curvas cerradas.

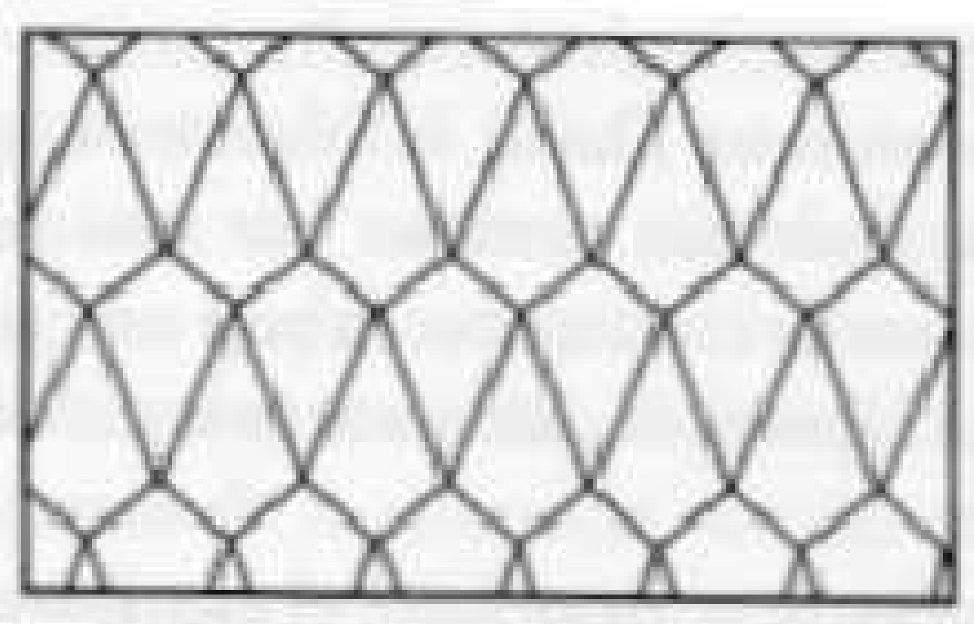
D.- ¿CUANTOS COLORES?

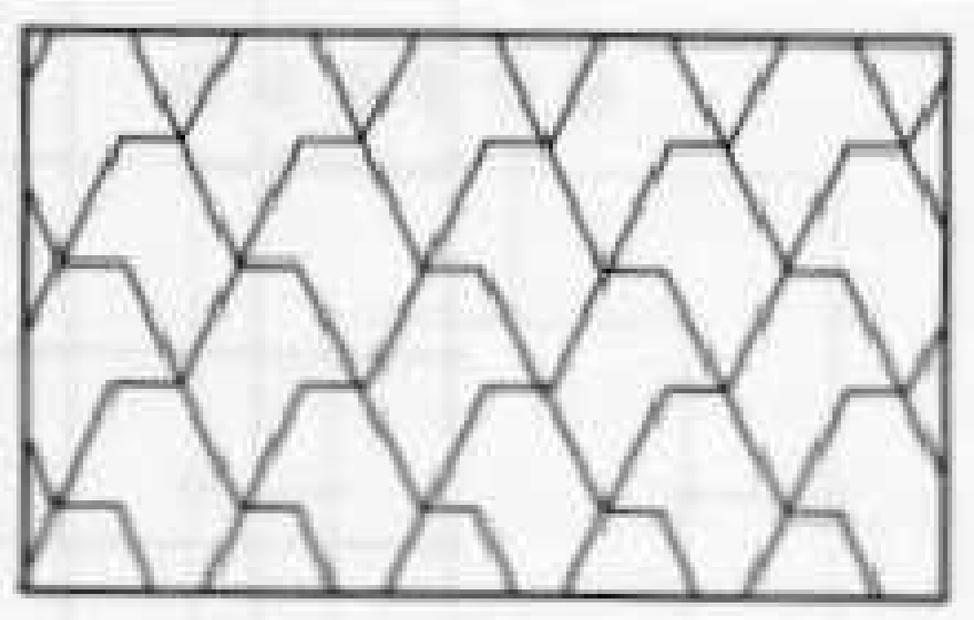
¿Cuántos colores requieren estos mapas?

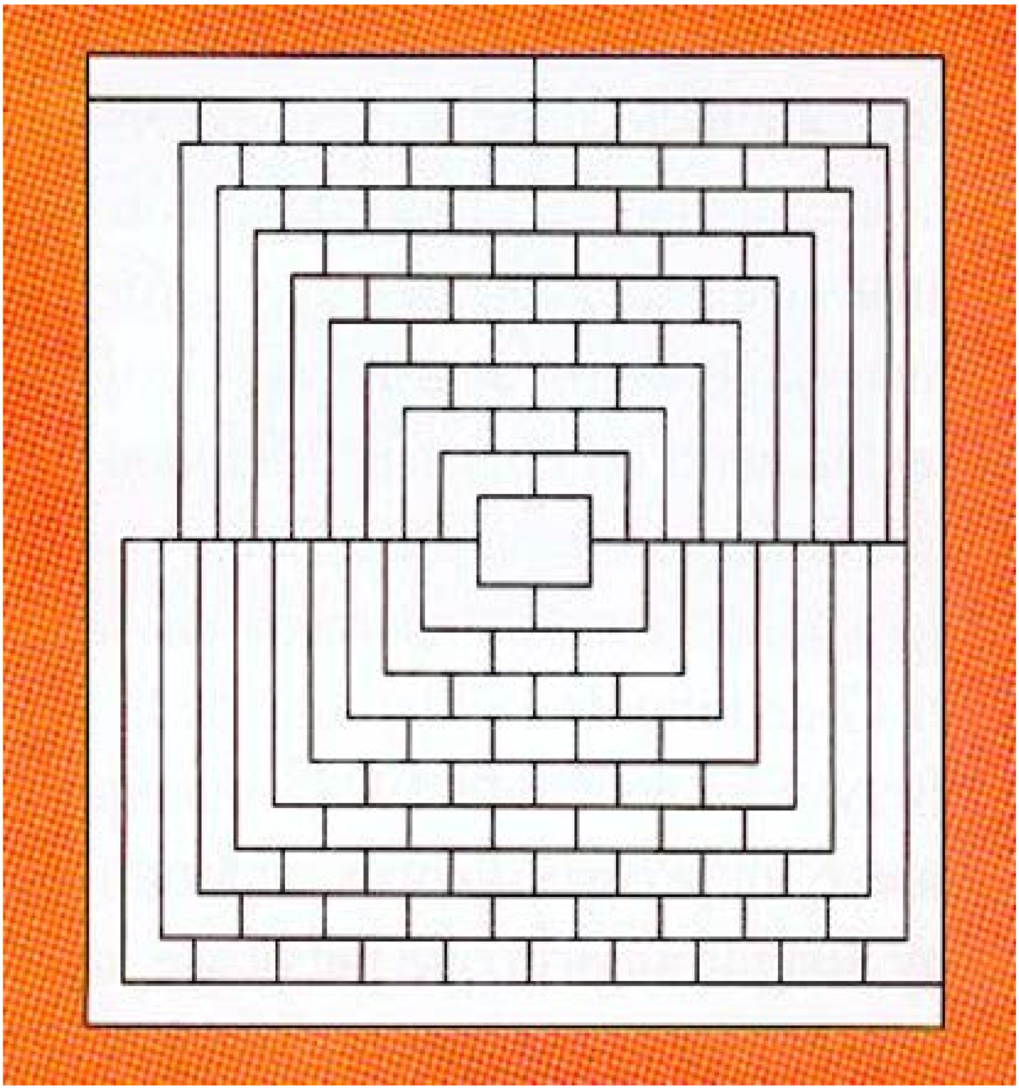












En
http://www.millicomperu.com.pe/flaviomoreno/4colores_archivos/libro1_archivos/primeraparte.htm

Pueden verse algunos resultados para mapas que pueden colorearse con dos ó tres colores.

4.- REFERENCIAS :

TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES

ALSINA, C. TRILLAS, E. (1989). Lecciones de Álgebra y Geometría. Ed. GustavoGili.

DAVIS, P., HERSH R. (1989). Experiencia Matemática. Ed. Labor Barcelona.
ENCICLOPEDIA SALVAT (1997). Tomo 5. Salvat Editores S.A. Barcelona.
GARDNER , M. (1980). "Nuevos pasatiempos matemáticos" Alianza Editorial.
JUEGOS DE INGENIO. Coleccionable. Ed. Orbis.
STEWART, I. (1998). De aquí al infinito. Ed. Grijalbo Mondadori Barcelona.

http://www.acanomas.com/
http://es.wikipedia.org/)
http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/mate1o.htm
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/The_four_colour_theorem.html
http://enciclopedia.us.es/index.php/Teorema_de_los_cuatro_colores
http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/cuentosconcuentas/cuatrocolores/cuatrocolores0004.htm
http://www.matematicas.profes.net/archivo2.asp?id_contenido=44287
http://www.arrakis.es/~mcj/index.htm.
http://www.explora.cl/otros/metro/mapas.html
http://www.millicomperu.com.pe/flaviomoreno/4colores_archivos/libro1_archivos/primeraparte.htm

CARACTERISTICA DE EULER

http://www.albaiges.com/matematicas/historiamatematicas%5Cteoremacuatrocolores.htm

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/4eso/geometria/poliedros/poliedros.htm