

PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

PROBABILIDAD

- Se selecciona al azar un punto P del interior del pentágono de vértices $A(0,2)$, $B(4,0)$, $C(2\pi+1,0)$, $D(2\pi+1,4)$ y $E(0,4)$. ¿Cuál es la probabilidad de que el ángulo $\angle APB$ sea obtuso?
- A, B son dos puntos de una circunferencia \mathcal{C} de radio r , tales que la cuerda AB vale r . Se elige al azar un punto P del círculo, hallar la probabilidad de que el triángulo ABP sea acutángulo si:
 - P está en la circunferencia.
 - P es un punto del interior del círculo.
- En una ciudad, debido al tráfico, los autobuses no consiguen cumplir los horarios establecidos aunque logran mantener sus frecuencias de paso. En una parada de autobús paran los de las líneas A y B con frecuencias respectivas de 8 y 12 minutos. Si llegamos a la parada en un momento cualquiera, calcular la probabilidad de que:
 - Pase un autobús (de las líneas A o B) antes de 2 minutos.
 - El primer autobús que pase sea de la línea A .
- Sea E el punto medio del segmento AB . Se eligen, al azar, un punto C del segmento AE , y otro D de EB . ¿Cuál es la probabilidad de que CD sea menor que la cuarta parte de AB ?
- Una barra se rompe al azar en dos puntos. ¿Cuál es la probabilidad de que con las tres partes resultantes se pueda formar un triángulo?

SANGAKUS

- $ABCD$ es un romboide, E el punto medio del lado AB , y P el punto intersección de BD con CE . Hallar el área de las regiones que determinan dichos segmentos en el paralelogramo.
- En el rectángulo $ABCD$ se trazan los segmentos que unen cada vértice con los puntos medios de los lados opuestos. Calcular el área del octógono que determinan.

- En el cubo $ABCD A' B' C' D'$ se consideran las diagonales de dos caras contiguas BD y CB' . Hallar dos puntos de estas diagonales que determinen un vector paralelo a la diagonal AC' del cubo.
- En el cubo $ABCD A' B' C' D'$ se considera el plano $BA'D$. Calcular el radio de la esfera inscrita al cubo y a este plano en la esquina del vértice A .
- En el cuadrado $ABCD$ de lado a , se traza el triángulo equilátero ABE , se prolonga CE hasta encontrar AD en F . Probar que se puede encontrar un punto G en AB tal que CFG sea equilátero. Sea H el punto intersección de AE con FG , e I de BE con CG , probar que el radio r del círculo inscrito a AHG es el doble de r' , radio del círculo inscrito a BCI .

VARIA

- El lado de la base de una pirámide cuadrangular regular mide a y su altura h . Se inscribe un cubo, apoyado sobre la base de la pirámide, y tal que cuatro de las aristas del cubo son paralelas a una diagonal de la base de la pirámide. Calcular la arista del cubo en función de a y h .
- En el triángulo ABC , M es el punto medio de BC . Si $AB=1$, $AC=2$ y $AM=BC$, calcular $x = BM$.
- En un cuadrilátero arbitrario $ABCD$ se trazan las bisectrices de los cuatro ángulos. Demostrar que los cuatro puntos de intersección de las bisectrices A y C con B y D son concíclicos.
- Dada una circunferencia \mathcal{C} y un punto A exterior a ella, demostrar que el lugar geométrico de los puntos medios de A y un punto P genérico de \mathcal{C} es otra circunferencia.
- Demostrar que si las coordenadas de los vértices de un polígono son racionales, su área es racional.
- Sea AC la diagonal mayor del paralelogramo $ABCD$. Desde C se trazan las perpendiculares a AB y AD . Sean E y F los pies de estas perpendiculares. Demostrar que: $\overline{AB} \cdot \overline{AE} + \overline{AD} \cdot \overline{AF} = \overline{AC}^2$.
- En un billar perfectamente circular, de radio R , se halla situada en el punto A una bola a una distancia x del centro. Se lanza sobre un punto del borde y , tras rebotar dos veces, vuelve a A . ¿Sobre qué punto se ha lanzado?
- Dado un cono recto de generatriz a y diámetro de la base b , determinar un plano paralelo a la generatriz de modo que el segmento parabólico que resulta en la sección tenga área máxima.