Superficies minimales, hablemos de pompas de jabón y de curvatura

Víctor M. Manero

Comencemos con una cuestión: ¿qué pasaría si introducimos, en una solución jabonosa, un alambre con forma de curva cerrada? Al extraer el alambre del jabón, posiblemente tras varios intentos, se formará una superficie que tiene a dicho alambre por borde.

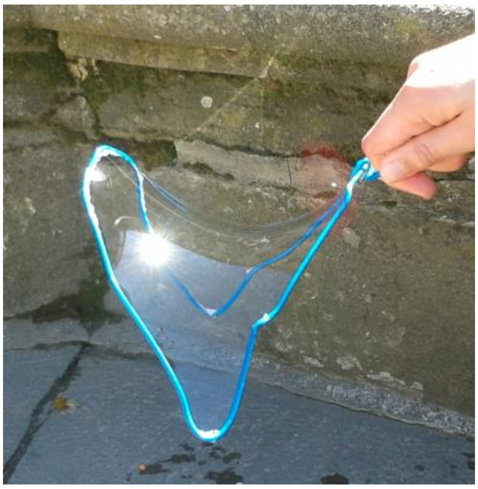


Figura 1. Película de jabón

Existen muchas posibles superficies que tienen a este alambre por borde, sin embargo, al repetir el proceso vemos que la superficie de jabón que se obtiene es siempre la misma. Y es que, de entre todas las posibles formas que puede adquirir la película de jabón, ésta adopta siempre una configuración concreta que depende, únicamente, de la forma del alambre que constituye su borde. Pero, ¿qué tiene esta superficie, escogida por el jabón, que la hace preferible a las demás? La característica que hace especial a la superficie adoptada por el jabón es que de todas las posibles superficies que tienen por borde al alambre ésta es la que posee menor área. Esto ocurre debido a que al ser la superficie con menor área, es la que requiere menos energía para formarse.

Orígenes

El origen del estudio de este tipo de superficies es atribuido a Lagrange (1760) quien en la segunda mitad del siglo XVIII se planteó el siguiente problema:

Dada una curva cerrada en $\mathbb{R}^3$, ¿cuál es la superficie $z = z\ (x,y)$ que tiene a dicha curva cerrada por borde y cuya área es mínima?

Quienes se dedicaron al estudio de este problema pronto se percataron de que podían dar una caracterización de estas superficies en términos de ecuaciones en derivadas parciales obteniendo que dichas superficies son aquellas que satisfacen la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

Unos años más tarde Meusnier (1785) observó que dichas superficies tenían propiedades geométricas muy interesantes, en particular probó que la ecuación de Euler–Lagrange implica que la **curvatura media** de la superficie sea nula en todos sus puntos. Estas superficies –las que tienen curvatura media nula- se conocen como **superficies minimales**.

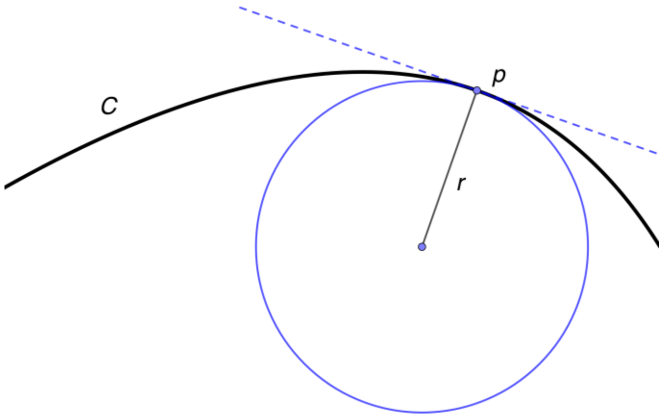
Pero, ¿qué es la curvatura media? Para poder introducir este concepto, tenemos que hacer un pequeño viaje a través de una idea importantísima en geometría: la **curvatura**.

Curvatura en dimensión 1

La curvatura es un concepto que transmite la idea de cuánto se aleja una curva o una superficie de ser, respectivamente una recta o un plano. Podemos definir la curvatura, (la llamaremos k) de una curva plana C como una función que a cada punto p de dicha curva le asocia un número real:

$$\begin{aligned} k: C &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\rightarrow k(p) \end{aligned}$$

Dado un punto p de una curva C plana, podemos pensar en la circunferencia tangente a C en p que mejor se ajusta a la curva. La curvatura en p, es decir $k(p)$, se puede interpretar como el inverso del radio dicha circunferencia.

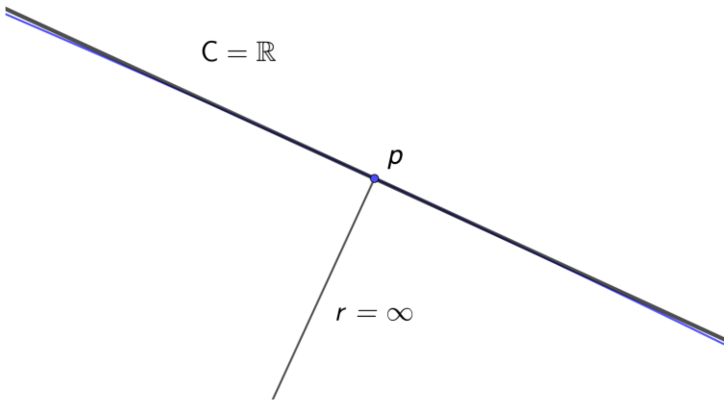


$$k(p) = 1/r$$

Figura 2. Curvatura de una curva plana en un punto de la misma.

Notar que esta idea de curvatura es congruente con nuestra intuición original de que se trate de una función que mida, como de distinta es nuestra curva, respecto de una recta. Los puntos en los que la curva se parezca más a una recta la circunferencia tangente a la curva tendrá radio grande por lo que la curvatura será pequeña. Por el contrario, los puntos de la curva en los que ésta se aleje más de ser una recta la circunferencia tangente tendrá un radio menor por lo que su curvatura, al venir dada por el inverso del radio, será mayor.

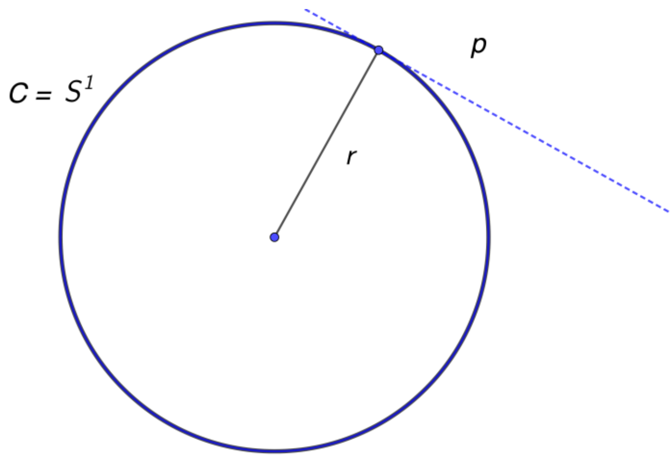
En el caso particular de que nuestra curva fuera una recta se puede interpretar que la circunferencia tangente que mejor se ajusta dicha recta en cada punto, es aquella que tiene radio infinito lo cual nos aporta, tal y como deseábamos, un valor nulo para la curvatura en todos los puntos de la recta.



$$k(\mathbb{R}) = 0$$

Figura 3. Curvatura de una recta.

Por otra parte si nuestra curva fuera por ejemplo, una circunferencia, S^1 la circunferencia tangente que mejor se ajusta a ella en cada punto es ella misma, por lo que la curvatura sería, en todo punto, el inverso de su radio.



$$k(S^1) = 1/r$$

Figura 4. Curvatura de una circunferencia.

En estos dos casos particulares la curvatura permanece constante para todo punto de la curva, pero en general este valor variará para los distintos puntos de la misma.

Conocido como se define la curvatura en cada punto de una curva plana, ¿cómo podemos definir la curvatura de una superficie?

Curvatura en dimensión 2

Pensemos ahora en una superficie M cualquiera y tomemos un punto p de la misma. Podemos escoger un vector normal $\vec{n}$, es decir, que sea perpendicular a la superficie en ese punto. Digo escoger, porque nuestro vector normal puede apuntar hacia un lado de la superficie o hacia el otro, este hecho hará que podamos tener curvaturas positivas y negativas.

Tomamos todos los planos que contienen al vector normal, los podemos parametrizar por medio de una dirección α, y hacemos su intersección con la superficie M, obteniendo así para cada dirección α una curva plana sobre M que llamaremos C_α.

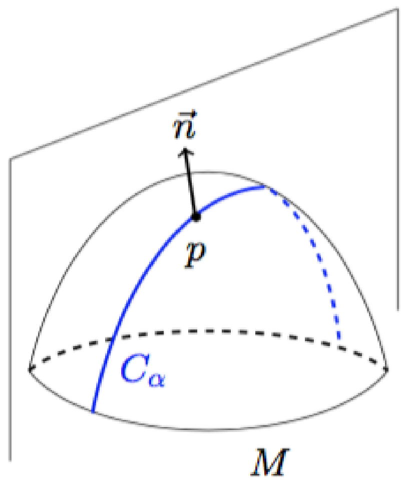


Figura 5. Curva plana en una superficie.

Por tanto, para todo punto p de una superficie M y dada una dirección α podemos definir la curvatura en esa dirección como

$$\begin{array}{rl} k(\alpha)\ : C_\alpha & \rightarrow\ \mathbb{R} \\ p & \rightarrow\ k(\alpha, p) \end{array}$$

Cabe destacar que para una superficie y un determinado punto obtendremos distintos valores de la curvatura según la dirección que tomemos. Los valores máximo y mínimo de estas curvaturas son lo que se conocen como **curvaturas principales** y usualmente se denotan como k_1 y k_2, respectivamente.

Definida la curvatura de una superficie en un punto, en una cierta dirección, sería deseable definir una función curvatura que no dependiera de direcciones. Existen varias maneras; en el presente artículo presentamos dos: la curvatura de Gauss y la curvatura media.

Curvatura de Gauss

Una de las curvaturas más conocidas es la curvatura de Gauss, y se define como el producto de las curvaturas principales

$$K = k_1 k_2,$$

por tanto si M es una superficie, su curvatura de Gauss viene dada por

$$\begin{aligned} K\colon M &\to \mathbb{R} \\ p &\to K(p) = k_1 k_2. \end{aligned}$$

La curvatura de Gauss permite distinguir tres tipos de puntos en una superficie:

- Elípticos si $K > 0$. Las dos curvaturas principales tienen el mismo signo.

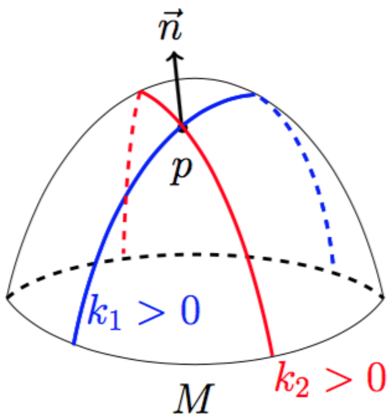


Figura 6. Curvatura de Gauss positiva.

- Parabólicos si $K = 0$. Al menos una de las curvaturas principales se anula.

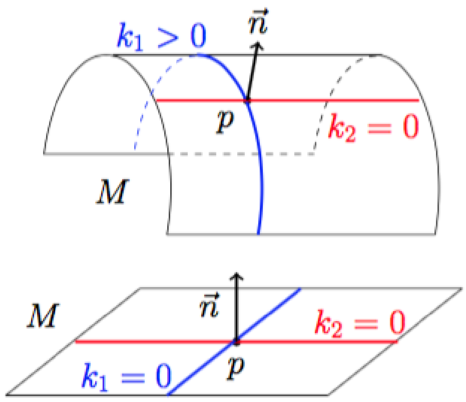


Figura 7. Curvatura de Gauss nula.

- Hiperbólicos si $K < 0$. Las dos curvaturas principales tienen distinto signo.

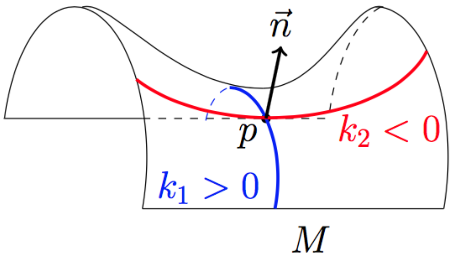


Figura 8. Curvatura de Gauss negativa.

Estos últimos se suelen llamar puntos silla por su semejanza con las sillas de montar de caballos.

Cabe destacar que en una misma superficie podemos encontrar puntos de las tres clases, uno de los ejemplos más sencillos con puntos de las tres clases es el toro $S^1 \times S^1$:

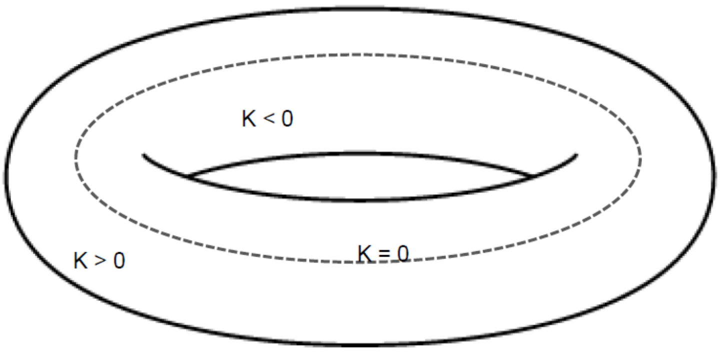


Figura 9. Curvatura de Gauss de los puntos del Toro.

donde la línea punteada está formada por puntos parabólicos, mientras que en la parte central y en la más exterior tenemos, respectivamente, puntos hiperbólicos y elípticos.

Curvatura media

La curvatura media de una superficie, en un punto de la misma, es el valor medio de la curvatura en todas sus direcciones. Es decir se toman todas las curvaturas de las curvas planas C_α que nos aparecen en las distintas direcciones y hacemos la media. Por lo tanto, la curvatura media se define como

$$H = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k(\alpha)\, d\alpha.$$

Gracias al conocido como Teorema de Euler se puede dar una definición equivalente de curvatura media en la que no aparecen integrales utilizando las curvaturas principales.

Dicho teorema (Euler, 1760) establece que dada una superficie y un punto p de la misma las curvaturas principales existen y sus respectivas direcciones son perpendiculares. Además, determina que se puede calcular la curvatura en cualquier dirección sin más que conocer las curvaturas principales y el ángulo α formado por la dirección de la curva y la dirección de la curvatura principal k_1.

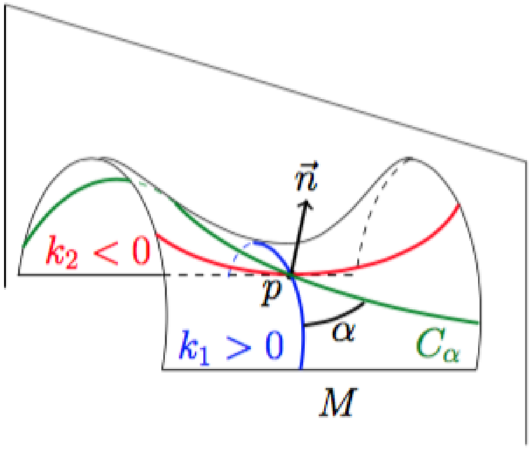


Figura 10. Curva plana sobre una superficie.

Así la curvatura de C_α viene dada por

$$k(\alpha) = k_1\, cos^2\alpha + k_2\, sin^2\alpha,$$

por lo que sustituyendo en la definición de curvatura media e integrando, tenemos que

$$H = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (k_1 cos^2\alpha + k_2 sin^2\alpha)\ d\alpha$$
$$= \frac{1}{2\pi}k_1\int_0^{2\pi} cos^2\alpha\, d\alpha + \frac{1}{2\pi}k_2\int_0^{2\pi} sin^2\alpha\, d\alpha,$$

donde el valor de estas dos últimas integrales es conocido

$$\int cos^2\alpha\, d\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\alpha) + cte_1 \quad y \quad \int sin^2\alpha\, d\alpha = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\alpha) + cte_2$$

siendo cte_1 y cte_2 constantes de integración. Por tanto, sin más que sustituir se obtiene que la **curvatura media** puede ser definida equivalentemente como la media de las dos curvaturas principales

$$H = \frac{1}{2}\,(k_1 + k_2).$$

En conclusión, dada una superficie M, su curvatura media viene dada por

$$H: M \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}$$

$$p \;\rightarrow\; H(p) = \frac{1}{2}\,(k_1 + k_2)$$

Superficies con curvatura medía nula

Habíamos comentado, al comienzo del artículo, que las superficies minimales se pueden describir como aquellas que tienen curvatura media nula en todos sus puntos, es decir $H = 0$. Cabe destacar que una primera consecuencia de este hecho es que en las superficies minimales se satisface que

$$k_2 = -k_1,$$

por lo que la curvatura de Gauss en todos sus puntos será

$$K = -k_1^2.$$

Esto último implica que **en una superficie minimal todos sus puntos son hiperbólicos**, es decir, puntos silla (si k_1 es no nulo) o es una superficie plana (si k_1 es nulo). Maravilloso resultado de estructura el que acabamos de obtener sin más que aplicar las definiciones de curvatura media y de Gauss.

Ejemplos

Dos de las superficies minimales más conocidas -además del plano- son el parabolide hiperbólico y el hiperboloide de una hoja, los cuales podemos ver en las figuras siguientes:

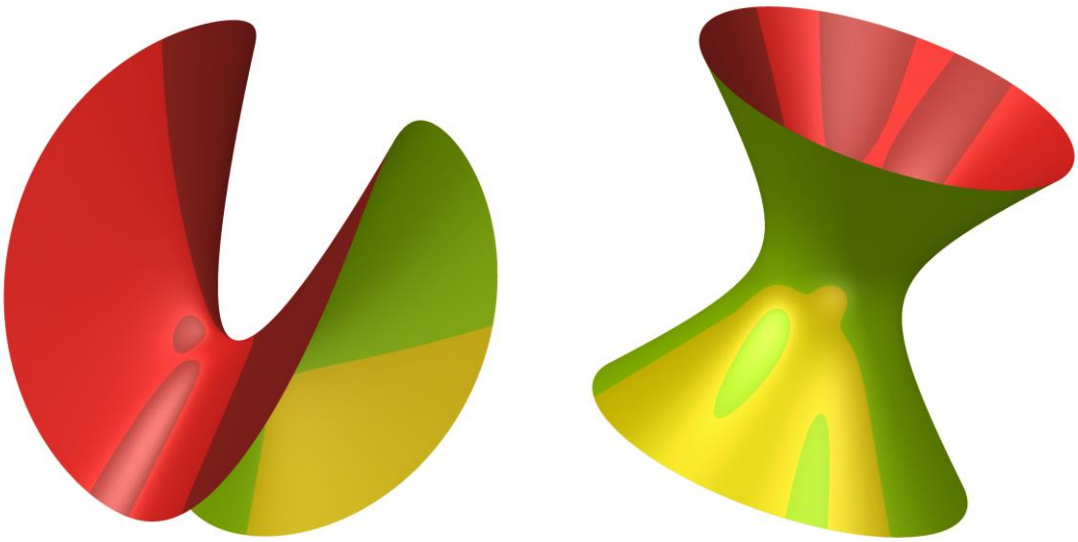


Figura 11. Parabolide hiperbólico (izda.) e hiperbolide de una hoja (dcha.)

Si nos fijamos en un punto cualquiera de alguna de estas dos superficies podemos apreciar como las curvaturas principales tienen signos distintos.

Un poco de física

El hecho de que las películas de jabón adopten siempre, entre todas las posibles formas, aquellas que tienen curvatura media nula, no es un hecho ni mucho menos casual.

“La justificación física de este fenómeno está en la ecuación de Laplace-Young, en honor del matemático francés Pierre Simon Laplace (1749-1827) y del físico inglés Thomas Young (1773-1829), la cual establece que la diferencia de presión entre ambos lados de una película o pompa de jabón viene dada por el producto de la tensión superficial y la curvatura media de la superficie que se forma.” (Alias, 2002, p.38)

Concretamente la ecuación de Laplace-Young se puede expresar como

$$\Delta p = -\gamma H,$$

donde Δp es la diferencia de presión a ambos lados de la película de jabón, γ es la tensión superficial y H es la curvatura media.

Por lo tanto, si pensamos en películas de jabón lo suficientemente finas y que no separen el espacio Euclídeo, se tiene que la presión a ambos lados de las mismas es exactamente igual por lo que la diferencia de presión Δp es nula. Teniendo en cuenta que existe tensión superficial en la película de jabón, la ecuación de Laplace-Young fuerza a que la curvatura media de la superficie adoptada ésta sea exactamente nula en todos sus puntos.

Superficies minimales en la vida cotidiana

Desde un punto de vista práctico, las superficies minimales han sido muy utilizadas en múltiples y diversos campos como por ejemplo en industria, arquitectura y música.

- Superficies minimales en industria.

Puesto que estas superficies minimizan el área, su uso puede producir importantes reducciones de gastos y por ello no es nada extraño encontrar ejemplos incluso en las patatas fritas:

Figura 12. Patata frita con forma de paraboloide hiperbólico.

- Superficies minimales en arquitectura.

La arquitectura también es un campo habitual de aparición de superficies minimales. Su uso puede permitir abaratar costes en materiales al minimizar el área, pero además, al tratarse de las superficies que se forman de manera natural tienen buenas propiedades físicas como la reducción de tensiones superficiales.

Figura 13. Estadio Olímpico de Munich.

Por otra parte, tal y como indica Alsina (2005, pp.122-123) este tipo de superficies tienen buenas propiedades difusoras por lo que no es extraño que las centrales nucleares las hayan adoptado para las chimeneas que expulsan el vapor.

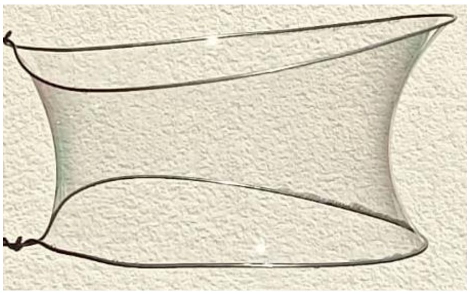


Figura 14. Chimeneas de una central nuclear con forma de hiperboloide de una hoja.

- Superficies minimales en música.

Las buenas propiedades difusoras de estas superficies, ya apuntadas por Alsina (2005, pp.122-123) han fomentado su aparición en herramientas de difusión del sonido como pueden ser gramófonos, campanas, instrumentos musicales…


Figura 15. Gramófomo con forma de medio hiperboloide de una hoja.

"La forma de una campana tiene la función de difundir […] los sonidos lejos del campanario y resulta ser más idóneo en forma de medio hiperboloide …" (Alsina, 2005, p.122)

Experimentación

Para obtener nuestros propios ejemplos de superficies mínimas basta coger un alambre cerrado, (o varios), al que daremos distintas formas y una solución jabonosa en la que sumergirlo. Experimentando se puede comprobar que, en efecto, las superficies obtenidas cumplen que todos sus puntos son puntos silla a no ser que se trate de una superficie plana.

Además podremos identificar la aparición de superficies que nos resultan familiares debido al gran uso que aparece de superficies minimales en la vida cotidiana.

Referencias

Alías, L. J. (2002), *El significado geométrico de la curvatura: superficies de curvatura media constante*. Conferencia pronunciada con motivo de la concesión del Premio Jóvenes Investigadores de la Región de Murcia.

Alsina, C. (2005), *Geometria Cotidiana*, Rubes Editorial, Barcelona.

Euler, L. (1760), «Recherches sur la courbure des surfaces», *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, **16**: 119–143.

Lagrange, J. L. (1760), «Essai d'une nouvelle methode pour determiner les maxima et les minima des formules integrales indefinies». *Miscellanea Taurinensia* 2, 325(1):173-199.

Meusnier, J. B (1785), «Mémoire sur la courbure des surfaces». *Mém. Mathém. Phys. Acad. Sci. Paris*, prés. par div. Savans, 10:477–510, 1785.