TALLER DE TALENTO MATEMÁTICO

OLIMPIADA MATEMÁTICA

PROBLEMAS FASE LOCAL Y NACIONAL 2004 Y FASE LOCAL 2007

Mª ESTHER GARCÍA GIMÉNEZ

Problema 1 (2004)

Encontrad todas las funciones $f: N \to N$ tales que $f(f(n)) = n+2$ para todo número natural n.

Problema 2 (2004)

Un triángulo tiene sus vértices en cada uno de los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio; ninguno está en el origen, ni dos de ellos coinciden el mismo eje, Demostrad que el triángulo es acutángulo.

Problema 3 (2004)

Hallad el número mínimo de apuestas de quiniela que debemos rellenar para asegurar que obtenemos, al menos, 5 aciertos en una de ellas. (Una apuesta de quiniela consiste en un pronóstico de resultado para 14 partidos, en cada partido hay 3 posibles resultados).

Problema 4 (2004)

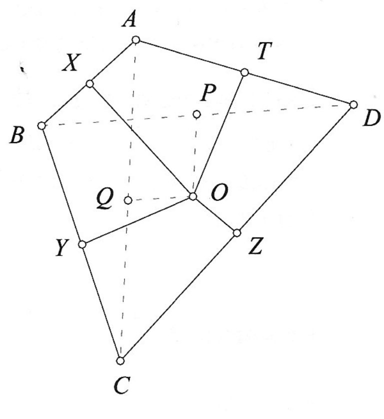
Demostrad que si $-1 < x < 1, -1 < y < 1$, $\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| \le \frac{|x|+|y|}{1+|xy|}$

Problema 5 (2004)

Consideramos los polinomios $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$, $Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ (x es la variable, A, B, C son parámetros). Supongamos que, si *a, b, c* son las tres raíces de *P*, las de *Q* son $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}$. Determinad todos los posibles polinomios *P*, *Q*.

Problema 6 (2004)

ABCD es un cuadrilátero cualquiera, *P* y *Q* los puntos medios de las diagonales *BD* y *AC* respectivamente. Las paralelas por *P* y *Q* a la otro diagonal se cortan en *O*.
Si unimos *O* con las cuatro puntos medios de los lados *X, Y, Z* y *T* se forman cuatro cuadriláteros, *OXBY*, *OYCZ*, *OZDT* y *OTAX*.
Probar que los cuatro cuadriláteros tienen la misma área.



Problema 7 (2007)

Sea $a_n = 1 + n^3$ la sucesión $\{2, 9, 28, 65, \ldots\}$ y $\delta_n = \mathrm{mcd}(a_{n+1}, a_n)$ Hallar el máximo valor que puede tomar δ_n.

Problema 8. (2007)

Sean *a, b, c, d* números enteros positivos que satisfacen *ab* = *cd*. Demostrar que *a* + *b* + *c* + *d* no es un número primo.