Sergio Martínez Juste
Universidad de Zaragoza

Preparación Olímpica: Razones geométricas y semejanza

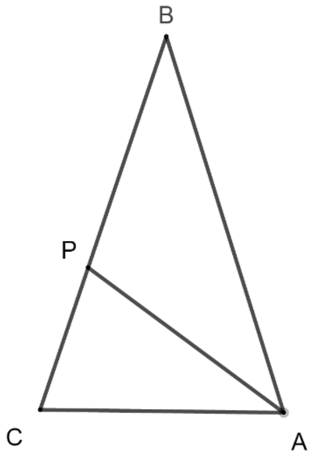
Soluciones

[1] *En un triángulo isósceles ABC cuyos lados iguales son AB y BC existe un punto P en el lado BC tal que $\overline{BP} = \overline{PA} = \overline{AC}$.*

[1.1] *Calcula la medida de los ángulos del triángulo ABC.*

[1.2] *Halla el valor de la razón $\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}$. ¿Qué relación tiene con la proporción áurea?*

<u>Solución:</u> [1.1] Si dibujamos el segmento AP, el tríangulo ABC queda dividido en dos triángulos, ABP y PCA.



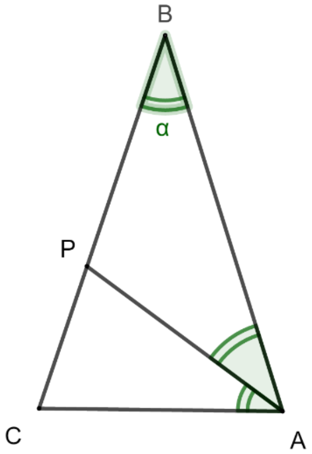
El enunciado nos dice que $\overline{BP} = \overline{PA}$, por tanto, el triángulo ABP es isósceles.

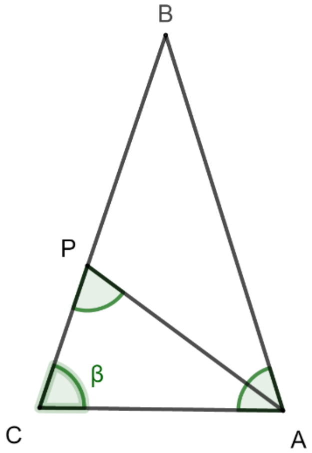
Por otro lado, $\overline{PA} = \overline{AC}$ y, por tanto, el triángulo PCA también es isósceles.

Además, el ángulo $\hat{C}$, es común para el triángulo ABC y PCA. Dicho ángulo es adyacente al lado desigual de dichos triángulos isósceles, por tanto, ambos triángulos son semejantes. Es decir

$$ABC \sim CAP$$

De las observaciones anteriores se pueden deducir las igualdades de ángulos que se ven en las figuras.





Pero entonces, claramente $2\alpha = \beta$

Como $2\beta + \alpha = \pi$, tenemos que

$$4\alpha + \alpha = \pi$$

Es decir, $\alpha = \frac{\pi}{5}$ y $\beta = \frac{2\pi}{5}$, que son los ángulos que nos pedía el ejercicio.

[1.2] Por ser $ABC \sim CAP$, tenemos las siguientes igualdades de razones:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{PC}}$$

Pero como $\overline{BP} = \overline{PA} = \overline{AC}$, podemos escribir

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{BP} + \overline{PC}}{\overline{BP}}$$

Si en el término de la derecha dividimos arriba y abajo por $\overline{PC}$, llegamos a:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} + 1}{\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}}$$

Llamemos $x = \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}$ a la razón que queremos calcular, entonces la anterior expresión nos dice que:

$$x = \frac{x+1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0$$

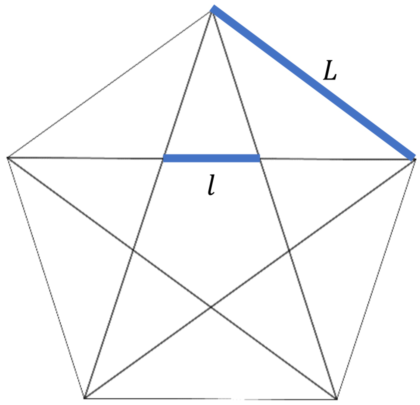
Resolviendo dicha ecuación, y teniendo en cuenta que x debe ser un valor positivo obtenemos que:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Es decir, la razón solicitada es exactamente el número áureo.

[2] Al trazar las diagonales de un pentágono regular se forma en su interior un nuevo pentágono regular. ¿Qué relación existe entre las áreas de los dos pentágonos?

Solución: Llamemos L a la longitud del lado del pentágono grande y l a la longitud del lado del pentágono pequeño. Recordemos que:

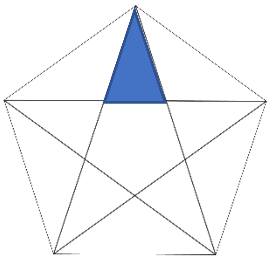


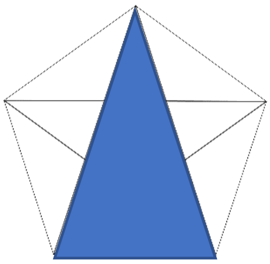
- todos los polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes
- y que, si dos figuras son semejantes, la razón entre sus áreas es igual al cuadrado de la razón entre la longitud de segmentos correspondientes.

Por tanto, la razón entre las áreas que nos piden será igual a:

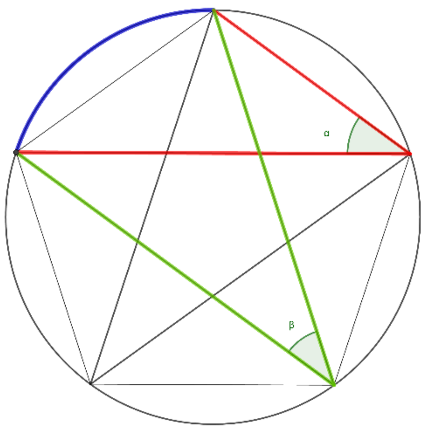
$$\left(\frac{L}{l}\right)^2$$

Vamos a buscar triángulos semejantes en el dibujo del pentágono y sus diagonales.





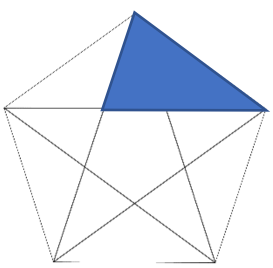
Una primera observación sencilla es que los triángulos marcados en la figura de la izquierda son isósceles y semejantes, ya que tienen un ángulo común, y los lados iguales sobre las semirrectas que forman dicho ángulo y además tienen lados desiguales paralelos.



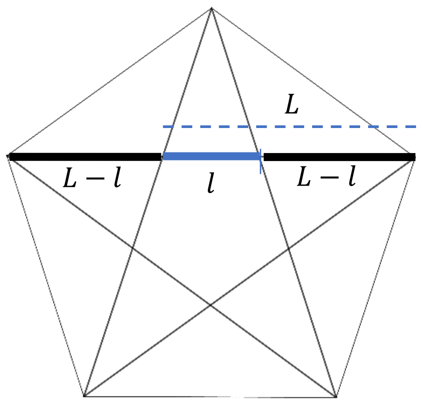
Ahora, consideremos los ángulos α y β de la siguiente imagen, en la que hemos inscrito el pentágono regular en una circunferencia (todos los polígonos regulares se pueden inscribir en una circunferencia, el centro de dicha circunferencia es el centro del polígono regular).

α y β son ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco, por lo tanto, son iguales. Además, su valor es igual a la mitad del arco que abarcan. Como la circunferencia se divide en cinco de esos arcos iguales, tenemos que:

$$\alpha = \beta = \left(\frac{2\pi}{5}\right) : 2 = \frac{\pi}{5}$$

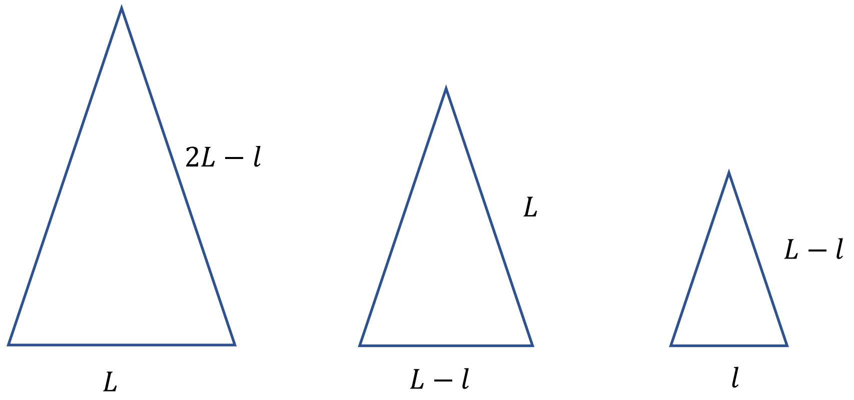


Con todo lo anterior, es fácil demostrar que el triángulo que marcamos en la figura de la izquierda es isósceles y semejante a los dos anteriores, con ángulo desigual $\frac{\pi}{5}$ y ángulos iguales $\frac{2\pi}{5}$ (¿A qué suenan estos triángulos?).



Notemos que, ahora podemos ver que la diagonal del pentágono está dividida en los siguientes segmentos:

Por tanto, hemos encontrado tres triángulos isósceles semejantes, cuyos lados los podemos poner en función de L y l. Resumamos toda esta información.



Para acabar, basta con aplicar la semejanza a una pareja cualquiera de los tres triángulos anteriores. Por ejemplo, si nos fijamos en el mediano y el pequeño obtenemos:

$$\frac{L}{L-l}=\frac{L-l}{l}$$

Si dividimos numerador y denominador por l, en ambos términos, obtenemos:

$$\frac{\frac{L}{l}}{\frac{L}{l}-1}=\frac{L}{l}-1$$

Si como en el ejercicio anterior, llamamos x a la razón que queremos calcular, obtenemos q

$$\frac{x}{x-1}=x-1 \;\Leftrightarrow\; x=x^2-2x+1 \;\Leftrightarrow\; 0=x^2-3x+1$$

Resolviendo la ecuación anterior y teniendo en cuenta que x debe ser una cantidad mayor que 1 (ya que $L>l$), tenemos que:

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=1+\Phi$$

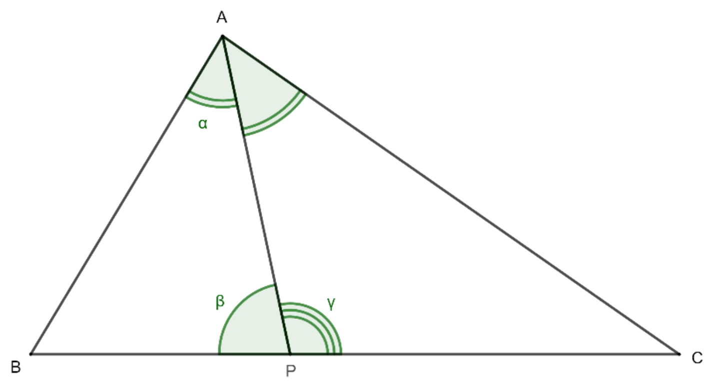
Y la razón, que nos solicitaba el problema es:

$$x^2=(1+\Phi)^2=\Phi^2+2\Phi+1=\Phi+1+2\Phi+1=3\Phi+2=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

Sergio Martínez Juste
Universidad de Zaragoza

[3, Teorema de la bisectriz] Dado un triángulo ABC cualquiera, llamemos P al pie sobre el lado BC de la bisectriz trazada desde A. Demostrar que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CP}}$.

Solución: La solución sale sencilla si se aplica el teorema de los senos a los dos triángulos en los que queda dividido el triángulo inicial al dibujar la bisectriz.



Llamemos α a la amplitud de las dos mitades en las que la bisectriz divide al ángulo $\hat{A}$.

Llamemos β y γ a las amplitudes de los ángulos con vértice en P, que forma la bisectriz con el lado BC. Claramente, β y γ son suplementarios y, por tanto:

$$\gamma = \pi - \beta$$

Aplicamos ahora el teorema de los senos, fijándonos en los ángulos α y β del triángulo ABP:

$$\frac{\overline{BP}}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen} \beta} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Si aplicamos el teorema de los senos, fijándonos en los ángulos α y $\gamma = \pi - \beta$, del triángulo APC, tenemos:

$$\frac{\overline{CP}}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen} (\pi - \beta)}$$

Pero como el seno de un ángulo y de su suplementario son iguales, tenemos que:

$$\frac{\overline{CP}}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen} \beta} \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{CP}} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha}$$

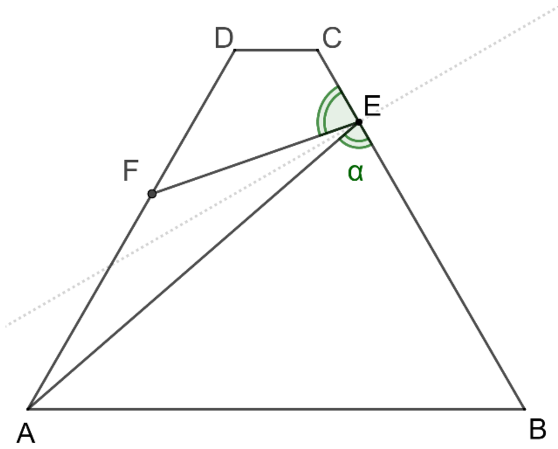
Con lo que se demuestra la igualdad que nos pedía el ejercicio:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CP}}$$

Cuando haya que imponer que una recta es bisectriz conviene pensar, por tanto, bien en el teorema de la bisectriz, bien en aplicar el teorema de los senos.

[4] El trapecio isósceles $ABCD$ tiene lados paralelos AB y CD. Sabemos que $\overline{AB} = 6$, $\overline{AD} = 5$ y $\angle DAB = 60^o$. Se lanza un rayo de luz desde A que rebota en CB en el punto E e interseca en AD en el punto F. Si $\overline{AF} = 3$, calcula el área del triángulo AFE.

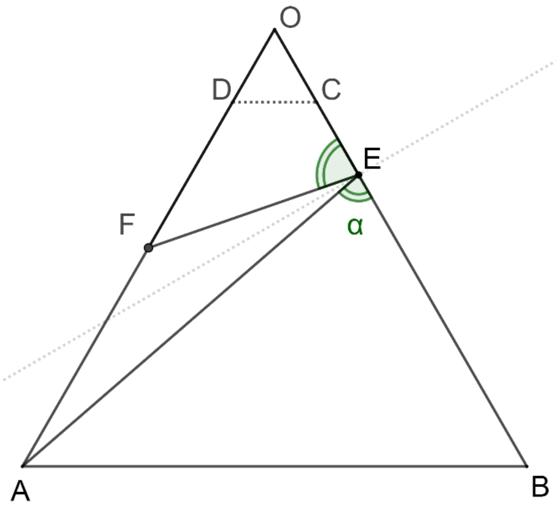
Solución: Para imponer la condición de "rebote" del rayo de luz, imponemos que los ángulos que genera en el lado BC del trapecio isósceles son iguales, llamaremos a este ángulo α. Es decir:



$$\angle BEA = \angle FED = \alpha$$

Notemos además, que si alargamos los lados BC y AD hasta que se corten (llamaremos O al punto de intersección). Entonces, el triángulo ABO es:

- Isósceles por ser $ABCD$ trapecio isósceles.
- Equilátero por ser $\angle DAB = \angle ABC = 60^o$



Consideramos ahora los triángulos ABE y OFE. Notar que ambos triángulos tienen al menos, dos ángulos iguales, α y otro de 60^o. Por tanto, el tercer ángulo debe ser también igual, y los triángulos son semejantes. Es decir:

$$ABE \sim OFE$$

A partir de este momento se puede proceder de diferentes formas. Muestro una de ellas:

Llamemos x al área que queremos calcular, es decir, al área del triángulo AFE. Notemos que los triángulos AFE y OFE, tienen uno de sus lados sobre la misma recta y el vértice opuesto a dichos lados es común. Además, como $\overline{AB} = \overline{AO} = 6$ y $\overline{AF} = 3$, tenemos que $\overline{FO}$=3. Es decir, los triángulos tienen la misma base y la misma altura sobre dicha base, por lo que tienen la misma área, es decir $x =$ área OFE.

Como $ABE \sim OFE$, son semejantes, y los lados $\overline{OF} = 3$ y $\overline{AB} = 6$ se corresponden en dicha semejanza. Se tiene que área $ABE = 4x$ (la razón de las áreas es el cuadrado de la razón de los lados).

Por tanto, el área del triángulo equilátero ABO, se puede calcular sumando las áreas de los triángulos en los que lo hemos descompuesto y por tanto, área $ABO = 6x$.

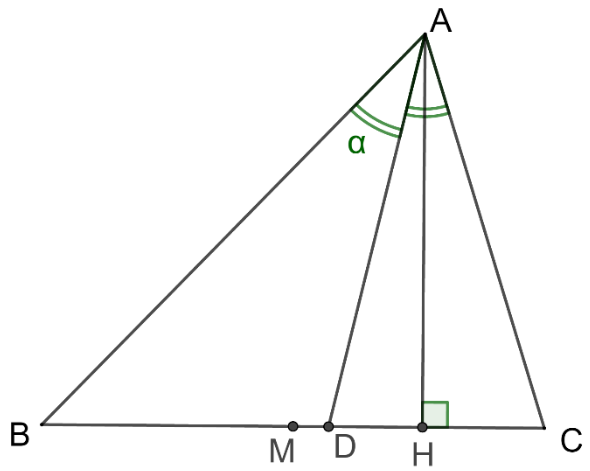
Basta, por tanto, para dar la solución, calcular el área de un triángulo equilátero de lado 6 y dividirla por 6.

Es sencillo comprobar que el área de un triángulo equilátero de lado 6 es $9\sqrt{3}$. Por tanto:

$$x = \frac{9\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

[5] En el triángulo acutángulo ABC se consideran los puntos H, D y M del lado BC, que son pies respectivos de la altura AH, la bisectriz AD y la mediana AM que parten desde el vértice A. Si las longitudes de $\overline{AB}, \overline{AC}$ y $\overline{MD}$ son respectivamente 11, 8 y 1, calcule la longitud del segmento $\overline{DH}$.

Solución: En el dibujo hemos presentado los puntos M, D y H con una disposición específica que tendríamos que justificar (Por qué hemos puesto M a la izquierda, H a la derecha y D entre ellos).



Si obviamos este "detalle" y suponemos que los puntos se disponen en dicho orden, tenemos ahora que "traducir" algebraicamente las tres siguientes condiciones:

1. M es punto medio de BC.
2. H es el pie de la altura desde A.
3. D es el pie de la bisectriz desde A.

La primera se traduce a

$$\overline{BM} = \overline{MC}$$

La segunda la traducimos usando el teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectángulos en los que se divide el triángulo al trazar la altura, es decir:

$$\overline{BH}^2 + \overline{HA}^2 = 11^2 \qquad \overline{HC}^2 + \overline{HA}^2 = 8^2$$

(Hemos usado que $\overline{AB} = 11$ y $\overline{AC} = 8$).

La tercera condición geométrica la traducimos usando el teorema de la altura.

$$\frac{11}{\overline{BD}} = \frac{8}{\overline{DC}}$$

Llamemos x a la longitud que nos piden calcular, es decir, $x = \overline{DH}$, $y = \overline{HC}$, y $h = \overline{AH}$. La primera condición nos dice que $\overline{BM} = \overline{MC} = 1 + x + y$, entonces, $\overline{BH} = 2 + 2x + y$, $\overline{BD} = 2 + x + y$, $\overline{DC} = x + y$. Por lo que, del resto de "traducciones" obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (2 + 2x + y)^2 + h^2 = 121 \\ y^2 + h^2 = 64 \\ \dfrac{11}{2 + x + y} = \dfrac{8}{x + y} \end{cases}$$

Reduciendo las dos primeras para eliminar h^2 llegamos al sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} (2 + 2x + y)^2 - y^2 = 57 \\ 11(x + y) = 8(2 + x + y) \end{cases}$$

Es sencillo, aunque algo laborioso, resolver el anterior sistema y llegar a que:

$$x = \frac{5}{4}.$$

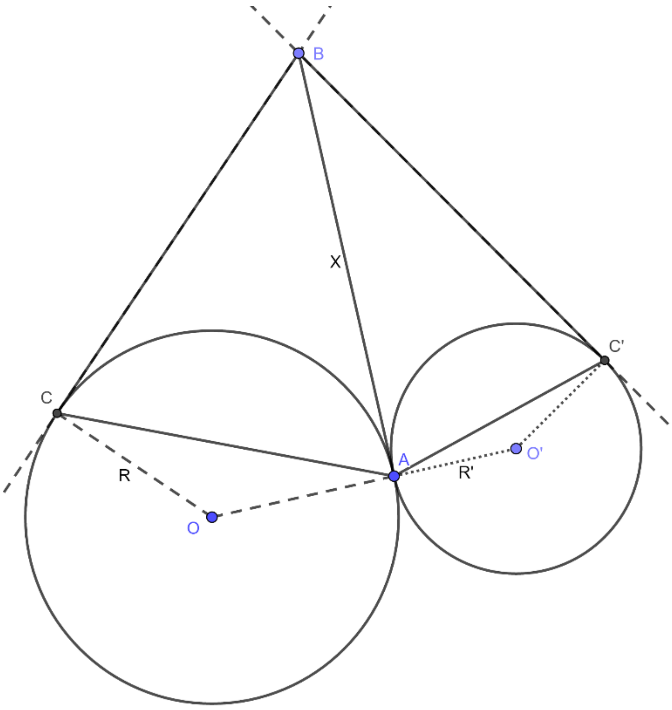
Sergio Martínez Juste

Universidad de Zaragoza

[6] Se dan dos circunferencias, de centros O y O' y radios $R = 8$ y $R' = 4$, respectivamente, tangentes exteriores en el punto A. Por un punto B de la tangente común, se trazan dos tangentes BC y BC', siendo C y C' los puntos de contacto con cada una de las circunferencias. Sea $x = \overline{AB}$. Calcula el límite de la razón de las áreas de los triángulos ABC y ABC' cuando:

[6.1] x tiende a $+\infty$.
[6.2] x tiende a 0.

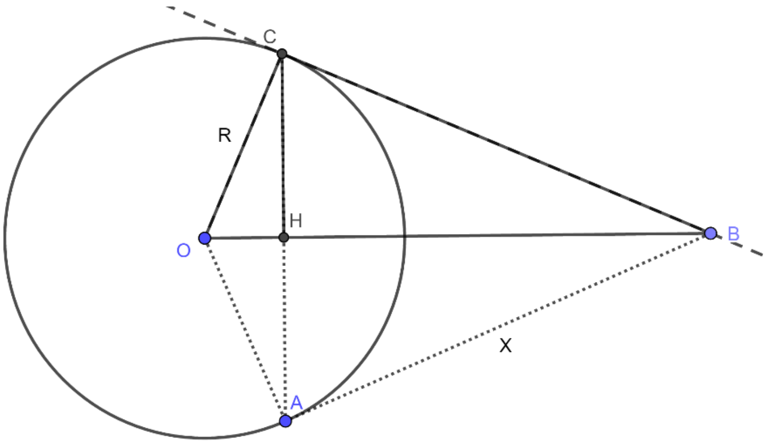
Solución:



En el dibujo de la izquierda se muestra la situación que describe el enunciado. Notar que, como las tangentes desde un punto exterior a una circunferencia tienen la misma longitud, los dos triángulos que nos señala el enunciado ABC y ABC' son isóscele, y los lados iguales de ambos triángulos miden x.

Nos centramos ahora en el triángulo ABC (ver el dibujo más abajo). Queremos calcular el área de este triángulo usando solo el dato conocido sobre la circunferencia (tiene radio 8) y la incógnita con la que realizaremos el límite x.

Si dibujamos los radios de la circunferencia hasta los puntos de tangencia, estos radios son perpendiculares a la tangente y, además, la recta que une el centro de la circunferencia y B, es una mediatriz de la cuerda CA y por tanto es una altura (y bisectriz) del triángulo ABC.



Llamamos H al pie de dicha altura. Si nos fijamos en el triángulo OCB, vemos que es un triángulo rectángulo, que HC es una altura de dicho triángulo y que el triángulo CHB es la mitad del triángulo ABC.

Los tres triángulos rectángulos que observamos en la figura OHC, HBC y BCO son semejantes (tienen los tres ángulos iguales).

Resumiendo, nuestro problema consiste en dar una fórmula para el área de CHB (que es la mitad del área de ABC) en función solo de x.

Como los catetos de OBC son x y 8, su área es $4x$.

Como los triángulos OBC y CHB son semejantes, la razón entre sus áreas será el cuadrado de la razón entre dos de sus lados correspondientes.

La hipotenusa de CHB es x y la hipotenusa de OBC es $\sqrt{x^2+8^2}$.

Por tanto

$$\frac{área\ CHB}{área\ OBC}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+8^2}}\right)^2$$

Es decir:

$$área\ CHB=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+8^2}}\right)^2\cdot 4x=\frac{4x^3}{x^2+64}$$

Y, por tanto,

$$área\ ABC=\frac{8x^3}{x^2+64}$$

Si realizamos una argumentación análoga en el caso de la circunferencia de radio 4, llegaremos a que:

$$área\ ABC'=\frac{4x^3}{x^2+16}$$

Y por tanto:

$$\frac{área\ ABC}{área\ ABC'}=2\cdot\frac{x^2+16}{x^2+64}$$

Y así:

$$\lim_{x\to+\infty}2\cdot\frac{x^2+16}{x^2+64}=2$$

$$\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{x^2+16}{x^2+64}=2\cdot\frac{16}{64}=\frac{1}{2}$$

Son los valores de los límites pedidos.