RALLYE MATHÉMATIQUE SANS FRONTIÈRES

SOLUCIONES

PRUEBA

2007

1. Superstitieux ?

Autour d'une table, des amis participent à un jeu. Lequel ? Ce n'est pas l'affaire ! Il suffit de savoir que l'un d'eux est gagnant et qu'il reçoit de chacun des autres autant de jetons qu'il y a de participants. Le gagnant reçoit ainsi 156 jetons.

Combien y a-t-il de joueurs ?

1. Superstitious ones?

A group of friends, together around a table, are taking part in a game. What game? We don't care. Only to know that one of them is winning and he gets, from each one of the others, as many tokens as players in the game. The winner receives 156 tokens.

How many players are there?

Solution

El número de jugadores es 13.

Llamamos x al número de jugadores. Se tiene:

$$156 = x \cdot (x - 1)$$

Ecuación de segundo grado: $x^2 - x - 156 = 0$

Al resolverla obtenemos 13 y -12 (solución imposible) por lo que la solución válida es 13.

2. Modelo reducido

Un cilindro de madera maciza tiene 3 metros de altura y pesa 60 Kg.
Se ha construido un modelo reducido de 30 cm de altura, fabricado con la misma madera y respetando las proporciones.

¿Cuál es el peso de este modelo reducido?

Solución

El peso del modelo reducido es 60 g.

Aplicando que la proporción de altura es 3/0,3=10 m la proporción de volumen es 10^3=1000 luego el peso es 60/1000=0,06 kg=60g

3. ¡Cosas de palomas!

Una pareja de palomas volaba apaciblemente en línea recta a una velocidad de 10Km/h. De repente, una de ellas, embargada probablemente por un deseo de aventuras, se puso a volar, siempre sobre la misma línea recta, a una velocidad de 20 Km/h. Después de haber recorrido 80 Km decidió dar media vuelta y volver, siempre a la velocidad de 20Km/h, al encuentro de su compañera que había seguido su vuelo a la velocidad de 10Km/h.

¿Al cabo de cuánto tiempo se vuelven a encontrar?

Solución

La solución sería 4 horas y 4/3 de hora tardan en encontrarse, es decir 320 minutos (5 horas y 20 minutos)

En efecto, en el momento en que se separan la paloma que vuela a 20 km/h recorre 80 km luego el tiempo es t=80/20=4 horas.
En esas 4 horas la otra paloma ha recorrido 10x4=40 km de los 80Km de la otra, por lo que en el instante en que da la vuelta la primera paloma, están a una distancia de 40 km.

Si llamamos x a la distancia al punto de encuentro de la segunda paloma, la distancia de la otra al punto de encuentro será 40-x.

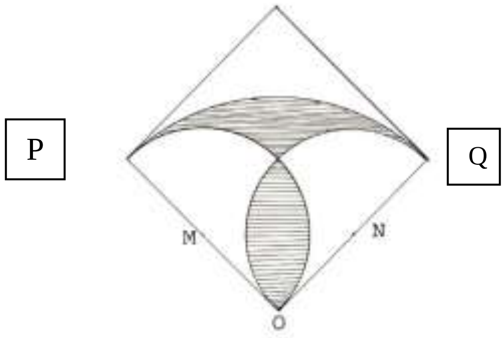
Cuando vuelan la una hacia la otra, el tiempo transcurrido hasta el encuentro es el mismo para las dos por lo que como t=e/v queda la ecuación:

$$(40-x)/10 = x/20$$

De donde $80-2x=x,$ luego el espacio será $x=80/3\ km$, el tiempo será $(80/3)/20 = 4/3$ de hora

El tiempo global será 4 horas más 4/3 de hora:5 horas y veinte minutos.

4. ¡Parece un champiñón!



El lado del cuadrado mide 10 cm.

Las tres líneas curvas son arcos de circunferencia de centros respectivos M, N y O.

¿Cuál es el área total de la parte rayada?

<u>*Solución*</u>

El área de la parte rayada es $25\pi - 50 \approx 28,54\ cm^2$

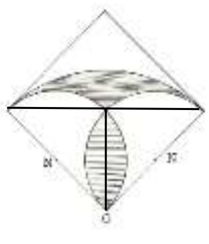
Se observa que la zona rayada inferior completaría la otra zona rayada de manera que la zona pedida se obtiene restando al área encerrada por el arco $\widehat{POQ}$ la del triángulo isósceles de vértices P, Q, O cuyo lado desigual es la diagonal del cuadrado y los otros dos, los lados del cuadrado.

El arco $\widehat{POQ}$ encierra un área que es la cuarta parte del círculo de radio el lado del cuadrado (10cm) luego $\pi \cdot 10^2/4 = 25\pi$

Calculamos ahora la longitud de la diagonal del cuadrado: $10\sqrt{2}$

La altura del triángulo será:

$$\sqrt{100-\left(10\sqrt{2}/2\right)^2} = 5\sqrt{2}$$



El área del triángulo es: $10\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}/2 = 50$

Por tanto, el área buscada será:

$$25\pi - 50 \approx 28,54\ cm^2$$

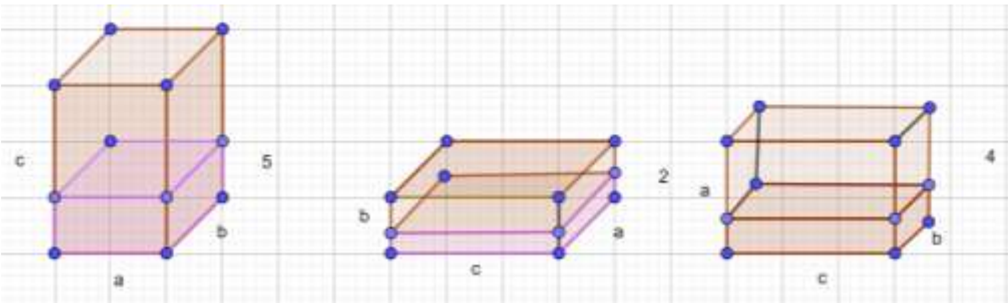
5. ¡Un tarro increíble!

Daniel ha colocado un litro de agua en un tarro que tiene la forma de un paralelepípedo rectángulo y que está totalmente cerrado. Apoyando el tarro sobre un plano horizontal de todas las formas posibles, se ha ido midiendo la altura del agua y se ha obtenido sucesivamente 2 cm, 4 cm y 5 cm.

¿Cuál es el volumen del tarro (en litros)?

<u>*Solución*</u>

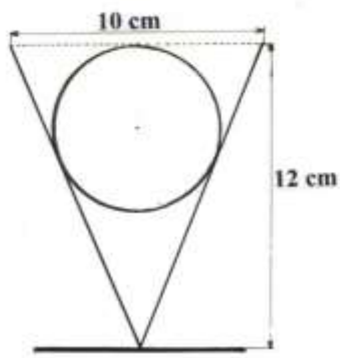
El volumen del tarro es 5 litros



Si llamamos a, b y c a las tres longitudes del paralelepípedo, aplicando que el volumen de agua es un litro obtenemos: $5ab = 4bc = 2ac = 1 litro = 1000\ cm^3$ que nos da $b = \frac{2c}{5}$ y $a = \frac{4c}{5}$

luego $5ab = \frac{8}{5}c^2 = 1000$ que nos da $c = 25\ cm \quad a = 20\ cm, b = 10\ cm\ y$ por tanto el volumen será $abc = 20 \cdot 10 \cdot 25 = 5000\ cm^3 = 5$ litros

6. La copa está llena

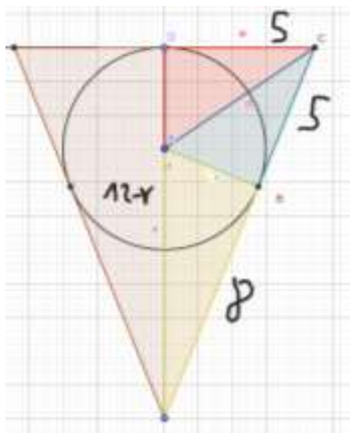


En la copa cónica, representada a la izquierda, se ha introducido una bola de manera que queda tangente al plano horizontal que pasa por el borde superior.

¿Cuál es el radio de esta bola?

<u>*Solución*</u>

El radio de la bola es $\mathbf{\frac{10}{3} \approx 3,33\ cm}$



Aplicamos Pitágoras con el triángulo rectángulo que se obtienen al dividir con una vertical el triángulo inicial en dos triángulos iguales: $l^2 = 12^2 + 5^2$de donde $l = 13\ cm$

Observamos que los triángulos rojo y azul son iguales al compartir un lado y el otro ser el radio de la circunferencia. Por tanto, el tercero de los lados mide 5 en ambos casos. Esto hace que el lado del triángulo rectángulo amarillo mida 13-5=8

Aplicamos el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo amarillo. Sabemos que es triángulo rectángulo porque el lado tangente a la circunferencia es perpendicular al radio.

$$(12 - r)^2 = r^2 + 8^2$$

$$144 - 24r + r^2 = r^2 + 64$$

$$r = \frac{80}{24} = \frac{10}{3} \approx 3,33\ cm$$

Especial Tercero de ESO

7. Un cuadrado pluscuamperfecto.

Soy un número entero de cuatro cifras, todas diferentes de 0.
Soy un cuadrado perfecto, lo que quiere decir que soy el cuadrado de un número entero.
El número formado por mis dos primeras cifras es también un cuadrado perfecto, lo mismo que el número formado por mis dos últimas cifras.

¿Quien soy?

<u>*Solución*</u>
El número es 1681
Si nuestro número es abcd, sabemos que $ab = {n_1}^2$; que $cd = {n_2}^2$ y que $abcd = {n_3}^2$
Los posibles cuadrados de dos cifras son:

4^2	16
5^2	25
6^2	36
7^2	49
8^2	64
9^2	81

Por lo que nuestro número se obtiene agrupando de dos en dos esos números y comprobando que el número obtenido sea un cuadrado perfecto. Hay $VR_{6,2}$=36 posibilidades.
Se comprueba que el único emparejamiento que da un cuadrado perfecto es $1681=41^2$.

8. A vueltas con las cajas de huevos.

Cada semana, Juan recoge entre 40 y 200 huevos que va a vender al mercado. Esta tarde, víspera de mercado, Juan está perplejo:
Si pone los huevos en cajas de 6, le quedan 2.
Si utiliza cajas de 10, le quedan también 2.
“Necesitaría - se dice él - cajas de 8 para que los contengan exactamente”.

¿Cuántas cajas de ocho le harían falta?

Solución

Hay 152 huevos que se distribuirán en 19 cajas de 8 huevos cada una.

En efecto, si llamamos x al número de huevos tenemos:

$$40 \leq x \leq 200$$

$$x - 2 = \dot{6}$$
$$x - 2 = \dot{10}$$
$$x = \dot{8}$$

Elegimos de entre los múltiplos de 8 comprendidos entre 40 y 200 aquellos que al restarle 2 nos dé un número múltiplo de 10:

$x = \dot{8}$	$x - 2 = \dot{10}$
72	70
112	110
152	150
192	190

Finalmente, de esos cuatro números, el único para el que $x - 2$ es múltiplo de 6 es 150. El número de huevos por tanto es $x = 152$. Los huevos se pueden organizar en 19 cajas de 8 huevos cada una.

Especial Cuarto de ESO

7. ¡No me hinches las ruedas!

La guardia civil ha parado a André por haber superado la velocidad permitida de 130 km/h. “Sin embargo - dice él - estaba seguro de que mi contador indicaba exactamente 130 km/h. Aunque, ahora que lo pienso, he hecho inflar mis neumáticos en la estación de servicio y probablemente el diámetro de mis ruedas ha aumentado”.
Efectivamente, hecha la verificación, la altura de los neumáticos que es normalmente de 7cm se había convertido en 8 cm.

El diámetro de las llantas era de 40 cm, ¿a qué velocidad circulaba André?

Solución

La velocidad a la que circulaba era aproximadamente de 135 km/h

La longitud de la rueda normal es: $2\pi \cdot (20 + 7) = 54\pi\ cm$ mientras que la longitud de la rueda con altura de neumático de 8cm es: $2\pi \cdot (20 + 8) = 56\pi\ cm$

En 1 hora recorre 130 km=13000000cm lo que supone con la anchura normal de neumáticos un total de $\frac{13000000}{54\pi}$ vueltas.

Pero este número de vueltas con la nueva longitud de rueda supone que en una hora ha recorrido: $\frac{13000000}{54\pi} \cdot 56\pi \approx 13481481{,}48\ cm \cong 134{,}8\frac{km}{h} \cong 135km/h$

8. La tía de Tatie

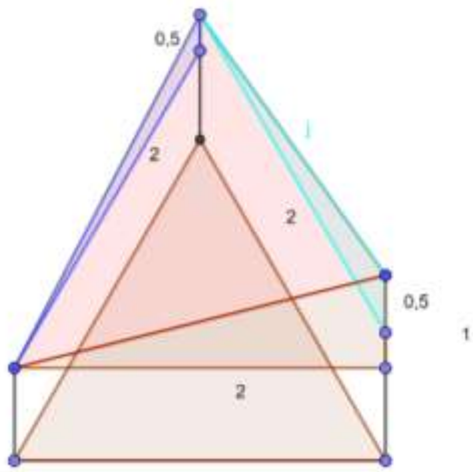
En cada paseo tía Rosa se preparaba una zona de abrigo para la comida (y para la siesta) Trazaba sobre una porción de suelo horizontal, un triángulo equilátero de 2 m de lado. En cada vértice de este triángulo plantaba verticalmente una estaca de tal manera que los extremos superiores de las tres estacas estaban situados a 1 m, à 1,5 m y a 2 m por encima del suelo. A continuación, la tía Tatie sacaba de su saco un pañuelo triangular cuyas dimensiones estaban bien calculadas, lo fijaba a los extremos superiores de las tres estacas y formaba un techo bien atirantado.

¿Cuál es el área de este techo triangular?

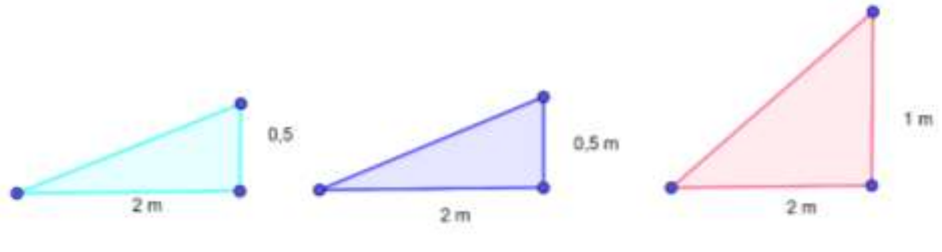
Solución

El área del techo triangular es $\frac{\sqrt{15}}{2} \approx 1,94\ m^2$

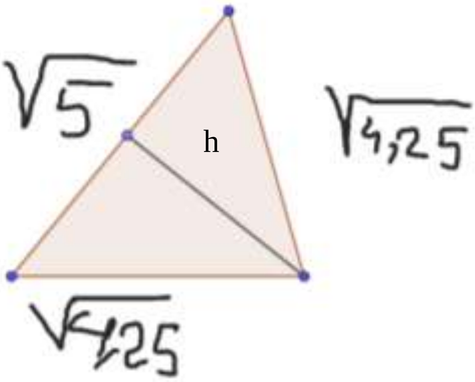
Considerando los vértices de dos en dos se obtienen triángulos rectángulos siendo un cateto el lado de 2 metros y el otro la diferencia de altura.



Quedan estos tres triángulos:



Aplicando Pitágoras en los tres casos se obtienen como lados del triángulo que forma el pañuelo los siguientes valores: $\sqrt{4{,}25}$, $\sqrt{4{,}25}$ y $\sqrt{5}$.



Es por tanto un triángulo isósceles cuya altura es $h = \sqrt{L^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$ siendo $l = \sqrt{5}$ y $L = \sqrt{4{,}25}$

por tanto la altura del triángulo será $\sqrt{4{,}25 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$

Finalmente, el área buscada es $\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{2} \approx 1{,}94\ m^2$