¿QUÉ TE JUEGAS?.

TTM mayo 2022

Miguel Barreras Alconchel
https://calendas.ftp.catedu.es/
barrerasalconchelm@gmail.es

NOTA: Mediante un correo a la dirección barrerasalconchelm@gmail.es se puede solicitar la presentación PowerPoint que se utiliza en la exposición así como los enlaces con las simulaciones, etc. que aparecen en ella.

En la web https://calendas.ftp.catedu.es/00litemate.htm puedes leer algunos relatos que tratan de probabilidad.

Un anuncio

Paseo por las calles de Zaragoza. Hay un paisaje de carteles gigantescos. Intento descifrar el mensaje subliminal de los asesores que los diseñan cuando me encuentro con uno que me llama la atención. Lo firma una inmobiliaria y el texto principal es éste:

> "Si quiere vender su casa,
> consulte con especialistas.
> NO ES UN JUEGO"

Como dentro de poco voy a dar una charla sobre juegos (de apuestas), me pregunto qué entenderá por "juego" la persona que diseñó el anuncio.

- ¿En qué sentido crees que está utilizada en el anuncio la palabra "juego"?
- ¿Qué entiendes tú por "juego"?
- ¿Qué otros significados pueden darse a la palabra "juego"?

Tipos de juegos

Desde un punto de vista matemático, podríamos clasificar los juegos en tres categorías. Una, los juegos de estrategia, en los que sólo cuenta la pericia del jugador. El ajedrez es el ejemplo más claro. Otra, los juegos de azar (de puro azar). Sólo la suerte determina el resultado. El juego de la oca, la ruleta (¿es siempre azar?), el bingo, la taba. Este tipo de juegos también es susceptible de análisis matemático, aunque el azar no fue considerado como cosa matemática hasta mediados del siglo XVII.

Hay una categoría intermedia muy interesante. Los juegos de estrategia-azar, en los que la suerte influye, pero también el criterio del que juega. Hay muchos.

En general, podemos hablar de situaciones en las que hay que tomar una decisión (elegir una u otra salida, apostar tanto o no apostar, estimar si un testigo en un juuicio dice la verdad o no, etc.) en la que un análisis (matemático) previo puede favorecer el porcentaje de éxito.

Si lo piensas, verás que el parchís no es un juego de puro azar. Si consideramos la Bolsa como un juego, estaremos de acuerdo en que no entra en ninguna de las dos primeras categorías.

- Piensa juegos en cada una de las categorías anteriores.
- ¿Se te ocurre algún juego que no encaje en ninguna de las tres clases de juegos anteriores?

A menudo, en la vida corriente, nos enfrentamos con situaciones muy importantes (que no son juegos) en los que hay que tomar una decisión en un escenario que se plantea en términos de probabilidad. Por ejemplo, someterse a una operación, tomar un fármaco, valorar qué me resulta más favorable (una herencia), un juego de apuestas (la paradoja del billetero) o un reparto equitativo (el juego suspendido)[i]

La partida interrumpida

Jimmy y Telma están en plena partida de un juego donde se tienen que conseguir 6 puntos para ganar, y en el que cada uno de los jugadores tiene las mismas oportunidades para vencer en una ronda y llevarse un punto. Jimmy está ganando por 5 a 3, cuando llega la policía y se interrumpe la partida.

- ¿Cómo deberán repartirse las apuestas depositadas?

¿Ocurrirá o no ocurrirá?

Tenemos dos papeles, uno para ti y otro para mí. Yo voy a escribir una frase, una afirmación. ¿Qué hora es? (…). Bien. El juego empieza ahora y acaba a las (…una hora más tarde). Tú, en tu papel escribirás, *SÍ* o *NO,* lo que tú elijas. Mi frase será una afirmación, algo que, desde ahora hasta las (…), ocurrirá o no. Además, será comprobable, y no equívoca. No podré apuntar, pues, *Un negro es tiroteado por un policía en Nueva York,* ni *En Pamplona cae un rayo*. Podré escribir, *Yo abro una ventana,* o *Alguien entra por la puerta*, o *El ordenador explota.* Nada de ambigüedades. Tú no sabes lo que yo anuncio, tampoco yo sé si tú niegas o afirmas. Es obvio que existen cuatro posibilidades; a simple vista, igualmente probables. Pongamos que en mi papel se lee: *Suena la alarma de incendios.* Si ha sonado y tu papel es *SÍ,* ganas; si tu papel es *NO,* pierdes. Si no ha sonado y tu papel *SÍ,* pierdes; si tu papel es *NO*, ganas.

Parcece justo, ¿no? Con un diagrama de árbol parece que se ve más claro. ¿Juegas?

La paradoja del billetero

Cojamos a dos asistentes cualesquiera de esta charla. Se sientan enfrente en una mesa. No se conocen.

Cada uno pondrá sobre la mesa su monedero / cartera.

El juego es el siguiente: Cada uno depositará su dinero encima de la mesa. El que lleve menos dinero se llevará todo (lo suyo y lo del otro). Antes de echar el dinero sobre la mesa, nadie sabe el dinero que lleva el otro. Ninguno de los dos tiene idea de lo que el otro lleva. Así que la probabilidad de ganar es de 1/2 (principio de la ignorancia completa). Pongámonos en la piel (mente) del jugador A: "Yo llevo 12 euros (por ejemplo). Tengo 50% de probabilidad de perder 12 euros, pero también tengo 50% de probabilidad de ganar una cantidad superior a 12 euros" (¡?). El razonamiento de B es parecido a éste.

¿Ves la paradoja?

Algunas opiniones "de peso"

Es famoso el problema que dio origen al cálculo riguroso de probabilidades propuesto a mediados del s. XVII por el caballero de Méré a Pascal. [ii]

Laplace escribió un interesante tratado sobre probabilidad, Teoría Analítica de las Probabilidades.

Otros científicos y pensadores de talla manifestaron opiniones sobre la ciencia del azar: Einstein, Borges, Bauman, Russell.

A jugar

Concurso (Las tres puertas)

Tienes que elegir una puerta de entre tres.

Sólo en una hay premio.

Ya has elegido una. El presentador del programa abrirá una que no tiene premio (el sabe dónde está el premio). Te deja que cambies de puerta.

- ¿Cambiarías de puerta? ¿Por qué?

La mayoría de la gente piensa que da igual cambiar o no. Es más, casi ninguno cambia porque piensa que si deja el premio en la que había elegido al principio se le va a quedar cara de imbécil.

Sin embargo, un análisis de la situación nos lleva a recomendar que se cambie siempre de puerta. En efecto. Supongamos que el premio está en la puerta primera. Es claro que si no cambio cabe esperar que gane 1 de cada 3 veces. Pero supongamos ahora que tomo la decisión de cambiar siempre. Si elijo A, el presentador me abrirá B o C. Yo iré a la otra y perderé. Mala suerte. Pero si, por ejemplo, he elegido al principio B, el presentador tendrá que abrirme necesariamente C, dejándome libre A donde deberé cambiar y ganaré.

Lo mismo pasa si elijo C al principio. Cabe esperar que gane 2 de cada 3 veces, el doble de si tomo la opción de mantenerme en la puerta inicial. Sorprendente, ¿no?

Así que aquí no hay azar al 100%, como parece en un principio. Hay una estrategia, si no para ganar siempre, sí para tener más probabilidad de ganar.

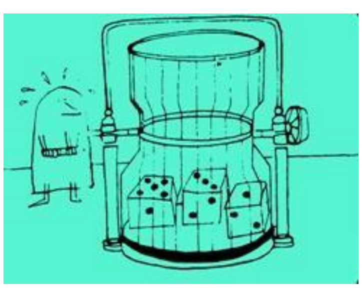
Las tres cartas

Tenemos tres cartas de la baraja española que tienen figuras en las dos caras, como se muestra al lado.

Tomo al azar una carta cualquiera y la pongo sobre la mesa. Por ejemplo, un rey de oros.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la otra cara (desconocida) sea el rey de oros?

El tragasuertes



El feriante tira 3 dados (numerados del 1 al 6). Los jugadores apuestan por cualquier número del 1 al 6, y reciben de premio la misma cantidad que apuesten por cada dado que salga con su número.

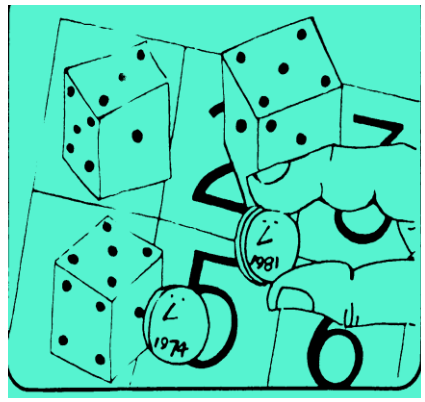
En principio parece un juego justo (¿es la ruleta un juego justo?) y la cosa no tiene mucho interés.

- ¿Te parece que es un juego justo?

Para animar al personal, el feriante anuncia que si el número al que se apuesta sale dos veces, pagará el doble, y el triple en el caso de que el número aparezca en los tres dados.

- ¿A quién crees que favorece ahora el asunto de los números repetidos? ¿Al feriante? ¿Al jugador?
- ¿O sigue siendo un juego justo?

Algunos jugadores pardillos creen que con la nueva oferta el juego les favorece, pero no es así. Supongamos, para analizar el problema (y minimizar la suerte) que las apuestas están cubiertas.



1	2	3	4	5	6		Sale 2-3-6 (sin repetición)
1 e	1 e	1 e	1 e	1 e	1 e		el feriante se queda en paz
0 e	1 e	1 e	0 e	0 e	1 e		(-3)+(+3)=0
1	2	3	4	5	6		Sale 2-2-6 (una repetición)
1 e	1 e	1 e	1 e	1 e	1 e		el feriante gana 1 e
0 e	2 e	0 e	0 e	0 e	1 e		(-3)+(+4)=+1
1	2	3	4	5	6		Sale 2-2-2 (dos repeticiones)
1 e	1 e	1 e	1 e	1 e	1 e		el feriante gana 2 e
0 e	3 e	0 e	0 e	0 e	0 e		(-3)+(+5)=+2

Si hay repetición gana el feriante, luego el jugador pierde.

En la mesa del feriante hay cuatro dados de colores distintos. También es distinta la puntuación de cada una de sus seis caras.

ROJO	4	4	4	4	4	4
AZUL	8	8	2	2	2	2
VERDE	7	7	7	1	1	1
AMARILLO	6	6	6	6	0	0

Imagina que te dejan tirar 100 veces uno de los cuatro dados. Debes pagar 400 euros por jugar.

- ¿Jugarías?
- ¿Qué dado elegirías?

Pero no es éste el juego del feriante. Sería largo, aburrido y muy costoso para el que perdiera al final.

El juego que propone el feriante es el siguiente:

“Elije un dado. El que tú quieras. Yo elegiré otro. Ponemos un euro cada uno encima de la mesa. Tú tiras tu dado. Yo, el mío. Gana los dos euros el que saque mayor puntuación en su dado”

- ¿Te parece un juego justo?
- Ponte en la piel del jugador. ¿Qué dado elegirías?

Ahora eres el feriante. Piensa el color que elegirías en función del que elije el que juega.

- Analiza el juego. Haz un diagrama de árbol.

Si te fijas, te darás cuenta de que para cualquier opción del jugador, el feriante siempre encuentra una mejor. (¡?)

Una simple apuesta (Cumpleaños feliz)

Tomamos al azar tres personas.

- ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos celebren su cumpleaños el mismo mes?

Tomamos al azar cuarenta personas.

- ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos celebren su cumpleaños el mismo año?
- ¿A partir de cuántas personas es la probabilidad de coincidencia mayor que el 50%?

Un asunto más serio

Falsos positivos

Una prueba de una enfermedad ofrece una tasa de falsos positivos del 5%. La enfermedad afecta a una milésima de la población. Se hace la prueba de forma aleatoria, independientemente de que se sospeche que el individuo tiene la enfermedad o no. El resultado de determinado paciente es positivo.

- ¿Cuál es realmente la probabilidad de que el paciente tenga la enfermedad?
- ¿Qué porcentaje de falsos negativos puede aceptarse para estimar que el individuo tiene la enfermedad con un porcentaje del 50%, del 75%?

Falsos positivos, falsos negativos. Un caso real

Una prueba de un cierto cáncer ofrece una tasa de falsos positivos del 0,5%. La enfermedad afecta al 0,4% de la población (2 de cada 500). La prueba arroja un 1% de falsos negativos. Se hace la prueba de forma aleatoria, independientemente de que se sospeche que el individuo tiene la enfermedad o no. El resultado de determinado paciente es positivo.

- ¿Cuál es realmente la probabilidad de que el paciente tenga la enfermedad?
- ¿Qué porcentaje de falsos positivos puede aceptarse para estimar que el individuo tiene la enfermedad con un porcentaje del 50%, del 75%?

Rigor en un juicio

Un taxi se ve envuelto en accidente nocturno, en una ciudad en la que hay un 15% taxis azules y un 85 % taxis verdes

- Una persona dice que es azul
- Le hacen una prueba de visión y el 80% de las veces contesta bien

¿ cuál es la probabilidad de que el taxi sea azul?

El juego de "rencontré"

El Juego de Rencontre es un juego de azar en el que dos personas, con un mazo completo de cartas cada una, sacan a la vez una carta detrás de otra hasta que gana una de ellas si sacan la misma carta. Si no tiene lugar dicha coincidencia, entonces gana la otra persona. Con estos supuestos, se pregunta la probabilidad de ganar que tiene cada persona.

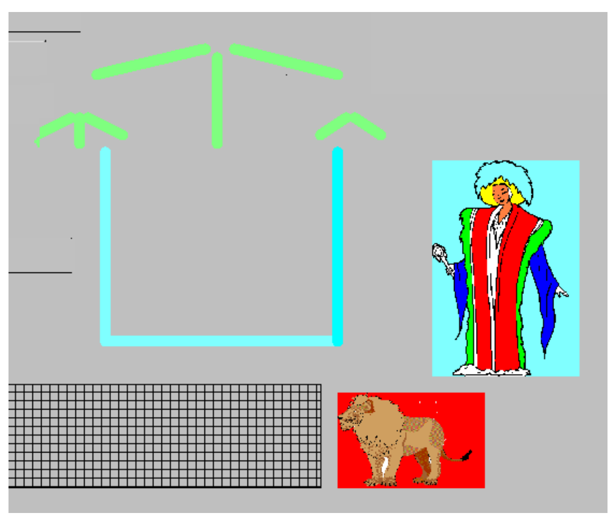
- Si apuestas a que va a haber coincidencia, ¿qué prefieres, 13 cartas… o 40 cartas?

Curiosamente, la probabilidad de coincidencia no depende del número de cartas y es ***1-1/e***, donde *e* es el *famoso número e.*

Estrategias

La princesa y el poeta

La princesa anda un poco preocupada. El poeta le ha pedido su mano al rey pero éste, que es un poco sádico, le somete a la prueba del laberinto. La princesa puede elegir entre esperarlo en su alcoba azul o en la rejilla de abajo.



- ¿Dónde lo esperarías tú?

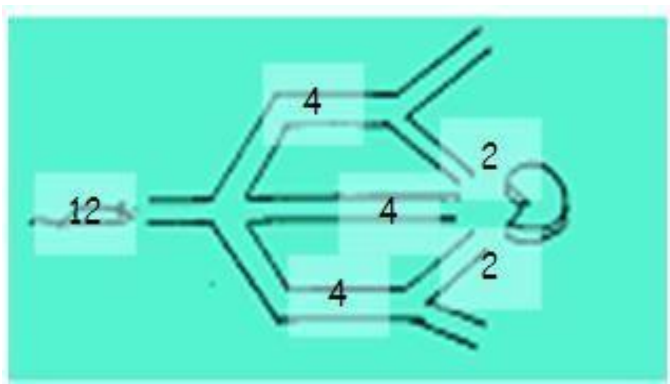
Mete 18 poetas en el principio del laberinto y sígueles la pista.

- ¿Qué probabilidad tiene el poeta de salvarse?
- Apuestas a la rejilla 1 euro y, si ganas, cobrarás 3. ¿Juegas? Apuestas a la alcoba azul 2 euros y, si ganas, cobrarás 3. ¿Juegas?

- Prueba con fracciones:

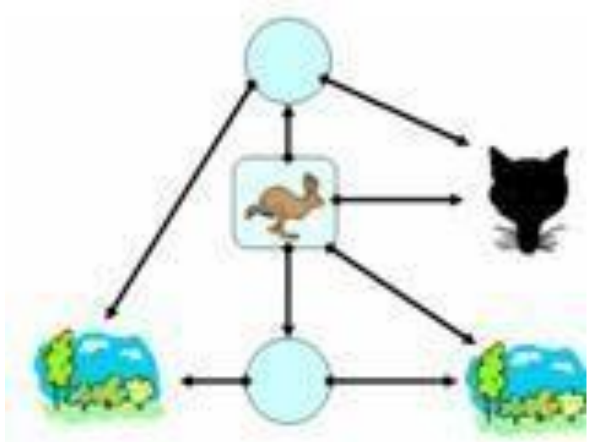
El ratón y el queso

Calcula ahora la probabilidad de que un ratón que entre desesperado en el laberinto llegue a probar el queso.



El conejo y el zorro

Haz correr desde la casilla central a 8 conejos y calcula la probabilidad de que un conejo se salve y la de que vaya a parar a las fauces del lobo.



La ruleta

Has tenido suerte. El día de convivencia del insti has ganado un premio. Girarás la flecha de la ruleta y, según se pare en uno u otro sector ganarás algún dinerillo. Debes elegir una de las cuatro opciones y explicar por qué lo haces. Suerte.

	A	B	C	D
ROJO	+40 euros	+60 euros	+80 euros	+50 euros
BLANCO	+10 euros	-10 euros	-10 euros	+10 euros
AZUL	+20 euros	+15 euros	-10 euros	+10 euros

Imagínate ahora que vas a jugar 100 partidas.

- ¿Cuánto esperarías ganar en cada opción? ¿Cuál elegirías ahora?

No es difícil calcular la esperanza de ganancia en cada caso al cabo de 100 partidas:

E[A]= 2.750 euros   E[B]= 3.125 euros   E[C]= 3.500 euros   E[D]= 3.000 euros

La C es, a la larga, la opción más rentable. Sin embargo, muchos preferirían la D porque así tienen la seguridad de que, en ningún caso, perderán, aunque tengan muy mala suerte.

- Tú, ¿cuál elegirías?

La moneda

Tiras una moneda. Elige una de las tres opciones y explica por qué lo haces.

	A	B	C
CARA	+40 euros	+20 euros	+60 euros
CRUZ	+10 euros	0 euros	-10 euros

El dado

Ahora tiras un dado. En este caso debes poner cierta cantidad de dinero para jugar. El sistema de pérdidas y ganancias se describe en la tabla. ¿Por cuántos euros estarías dispuesto a jugar?

PAR	UNO	TRES	CINCO
+40 euros	0 euros	-6 euros	-60 euros

Los ladrones de Bagdag

Un ladrón ha sido condenado por malversación de fondos. Se le ofrecen dos posibilidades para cumplir su condena: Una, jugarse el cuello a cara o cruz. Dos: Ser encerrado en una cueva totalmente oscura cuya situación viene reflejada en el dibujo. Hay dos salidas falsas: la torre, en la que emplea un día entre ir y volver, y el volcán, que le ocuparía dos días.

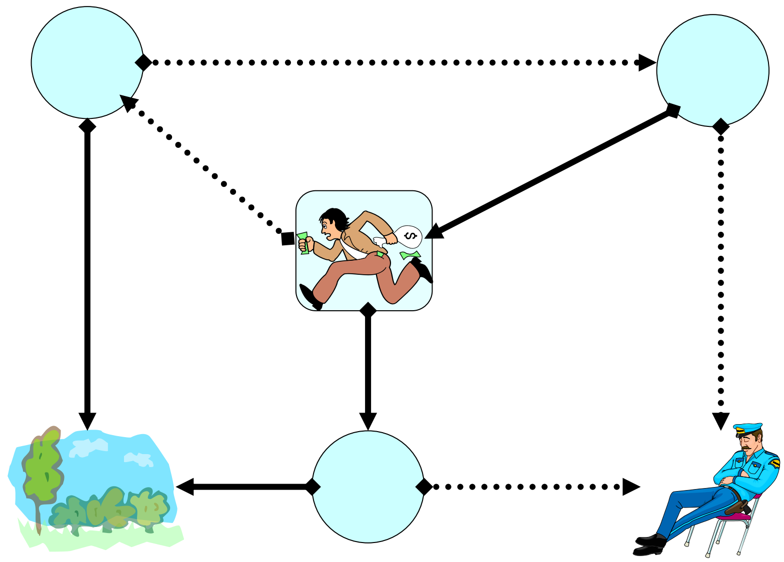
Suponiendo que no utiliza ningún tipo de estrategia (dejar marcas en las salidas, etc.) y que, dado su estado físico actual, y que carece de alimento y bebida, sólo sobreviviría 3 días, ¿qué opción debe elegir?

Día	Libertad	Torre	Volcán	Cueva
0	0	0	0	54
1	18	0	18	18
2	18+6	0	6	6+18
3	18+6+8	0	8	8+6

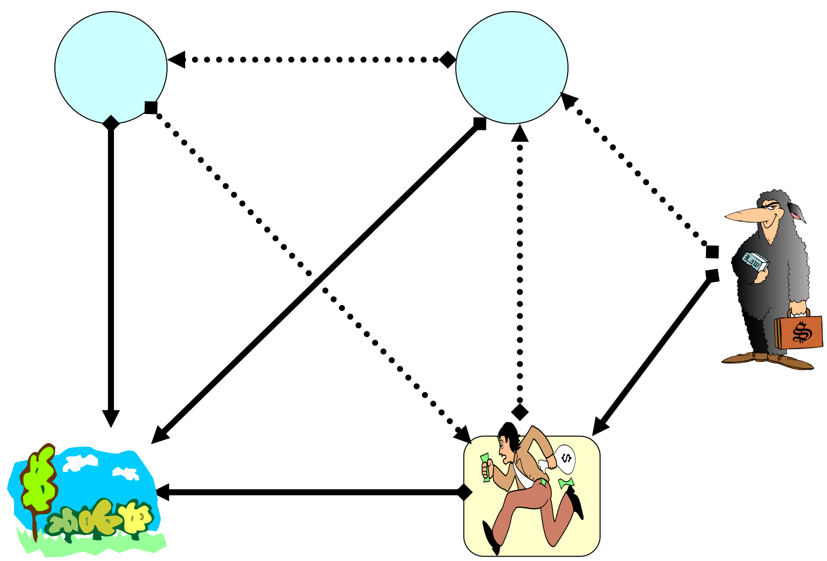
Si metemos 54 ladrones en la cueva y seguimos sus evoluciones azarosas al cabo de tres días obtenemos el siguiente resultado:

La probabilidad de salvarse es 32/54, casi un 60%, superior al 50% de salvarse con la moneda.

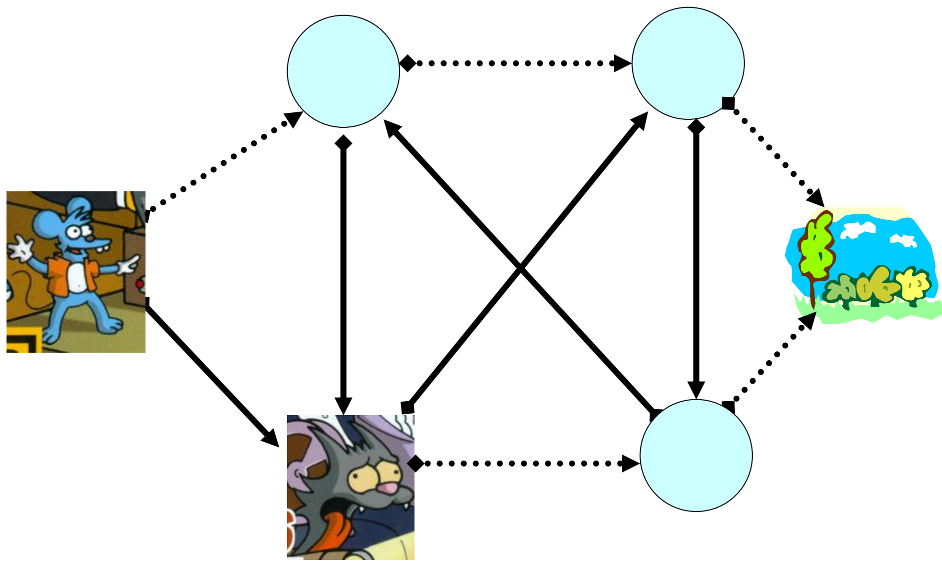
El ladrón indeciso



El acreedor y el moroso



Rasca y Pica



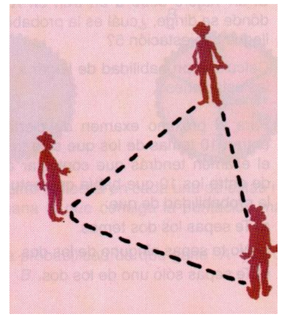
Camisetas variadas

En el entrenamiento de un equipo de rugby hay 22 jugadores.
14 de ellos llevan camiseta con número, el resto no. De los que llevan número, la mitad lleva escudo y de los que no llevan número, la cuarta parte no lleva escudo.
Imagínate que juegas a la gallina ciega con ellos. Debes agarrar a uno cualquiera y apostar: ¿lleva escudo o no?
Ya has cazado a uno. Te quitas la venda, ves que lleva escudo, pero no le ves la espalda: ¿qué es más probable, que lleve número o que no?

	E	sinE	
N	7	7	14
sinN	6	2	8
	13	9	22

p(E)=13/22 p(N/E)=7/13

Duelo en el oeste



En un pueblo del lejano oeste, tres pistoleros se enfrentan en duelo según la costumbre del lugar:
- Cada uno se coloca en uno de los vértices de un triángulo equilátero, provisto de una sola bala en su revólver.
- Disparan, uno tras otro, por turno decidido mediante sorteo, sobre el adversario de su elección.
- Los tres poseen igual destreza y aciertan el blanco en un 50% de sus disparos.

¿Qué probabilidad tiene de sobrevivir el primero en disparar?

[uno más fácil]

En un pueblo del lejano oeste, dos pistoleros, Arnold y Bird,se enfrentan en duelo según la costumbre del lugar: Cada uno se coloca en frente del otro, provisto de una sola bala en su revólver. Disparan, uno tras otro, por turno decidido mediante sorteo, sobre su adversario. Los dos poseen igual destreza y aciertan el blanco en un 50% de sus disparos.

Calcular las probabilidades: de que sobrevivan los dos, de que sobreviva sólo Arnold, de que mueran los dos.

Dados de colores

Dos amigos quieren renovar el juego de los dados. Cada uno de ellos tiene un dado en el que han pintado varias caras de verde y el resto de amarillo.

Los dos lanzan su dado a la vez. Si salen dos caras del mismo color gana Aurora, y si los colores son distintos, gana Beto.

Beto sabe que Aurora ha pintado su dado con tres caras verdes y tres amarillas. ¿Habrá alguna manera de que, pintando adecuadamente sus caras, Beto aumente su probabilidad de ganar? ¿Cómo?

[uno más general]

¿Y si Aurora hubiera pintado 4 verdes y dos amarillos?

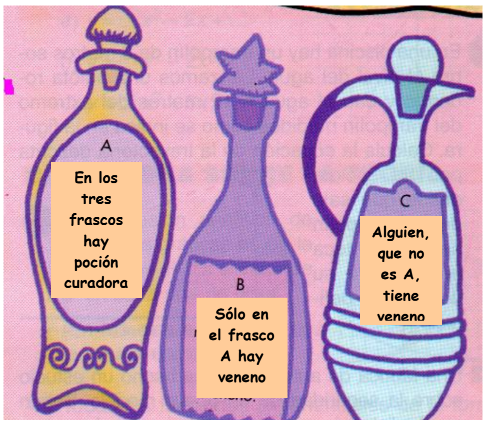
¿Cuál crees que es, en general, la estrategia para obtener más posibilidades de ganar?

Frascos envenenados

Diana estaba en la guarida del brujo. Su amado yacía, cubierto de cadenas, en hechizo eterno. Como le había anunciado el hada, sobre la mesa encontró los tres frascos.
- Recuerda que SÓLO UNO de los frascos dice la verdad.

Tú, ¿cuál elegirías? ¿Por qué?

Calcula las probabilidades de que el veneno esté en A, en B o en C.



---

i

ii **Los principios**

Estamos en Francia, a mediados del s. SVII, sobre 1654. Descartes ya ha descubierto la geometría analítica: los puntos pasan a ser un par de números; las funciones, ecuaciones en x y en y. El gran dramaturgo Molière ya lleva tiempo recorriendo Francia como cómico errante y falta poco para que estalle la trifulca entre Newton y Leibniz sobre la invención del Cálculo Diferencial e Integral, un hito en la historia de la ciencia.

En París vive Pascal, Blaise Pascal, pensador, matemático precoz que con sólo 16 años ha demostrado el teorema que lleva su nombre[ii]. A pesar de ser un hombre muy religioso, en algún momento de su vida conoció a un tipo de vida licenciosa, un jugador profesional que se ganaba la vida por las casas de juego de París, el caballero De Méré. El caso es que este individuo recaudó beneficios apostando a que en 4 lanzamientos de un dado salía por lo menos un 6. Quizá porque se aburriera del juego o porque el personal ya lo tenía calao, cambió a otro un poco más entretenido que consistía en apostar por un doble 6 en 24 lanzamientos de dos dados. Pudo comprobar en sus propias carnes que esta nueva apuesta no le era ventajosa y se arruinó. Le contó sus desventuras a Pascal, el cual se carteó con Fermat, trasladándole el problema. Fermat era un abogado no matemático, pero muy potente (y algo engreído). Por distintos procedimientos ambos resolvieron el enigma: el porcentaje esperado de ganancia en el primer caso es del 52% (aproximadamente), mientras que en el del segundo es de poco más que el 49%.[ii] Sutil diferencia, pero suficiente para que el caballero confiado pasara de los números negros a los números rojos. A partir de aquí surge la idea formal de probabilidad, aunque el primer libro sobre juegos de azar se debe al célebre médico y matemático italiano, Cardano, que, a pesar de lo listo que era, se arruinó por culpa del juego en varias ocasiones. Este es un asunto con el que hay que tener cuidado.

¿Qué moraleja podemos sacar de la historia? Pues muy sencillo: si el caballero De Méré hubiera preguntado a Pascal antes de arriesgarse, no habría perdido. Para esto sirve el cálculo de probabilidades, para prever lo que va a pasar o, más bien, lo que cabe esperar que pase a la larga. Es claro que la suerte siempre está rondando. Sobre qué es la buena o mala suerte podemos hablar más adelante, pero lo cierto es que influye menos cuantas más veces se juega. Si uno apuesta un euro a que va salir cara cuando se tire una moneda y sale cruz, no puede decir exactamente que haya tenido muy mala suerte. Pero si juega 20 veces a cara y no le sale ninguna es porque la moneda está trucada o ese día no tiene precisamente los astros alineados.

Pero ahora vamos a adentrarnos en el mundo del juego. ¿Cómo? Jugando.