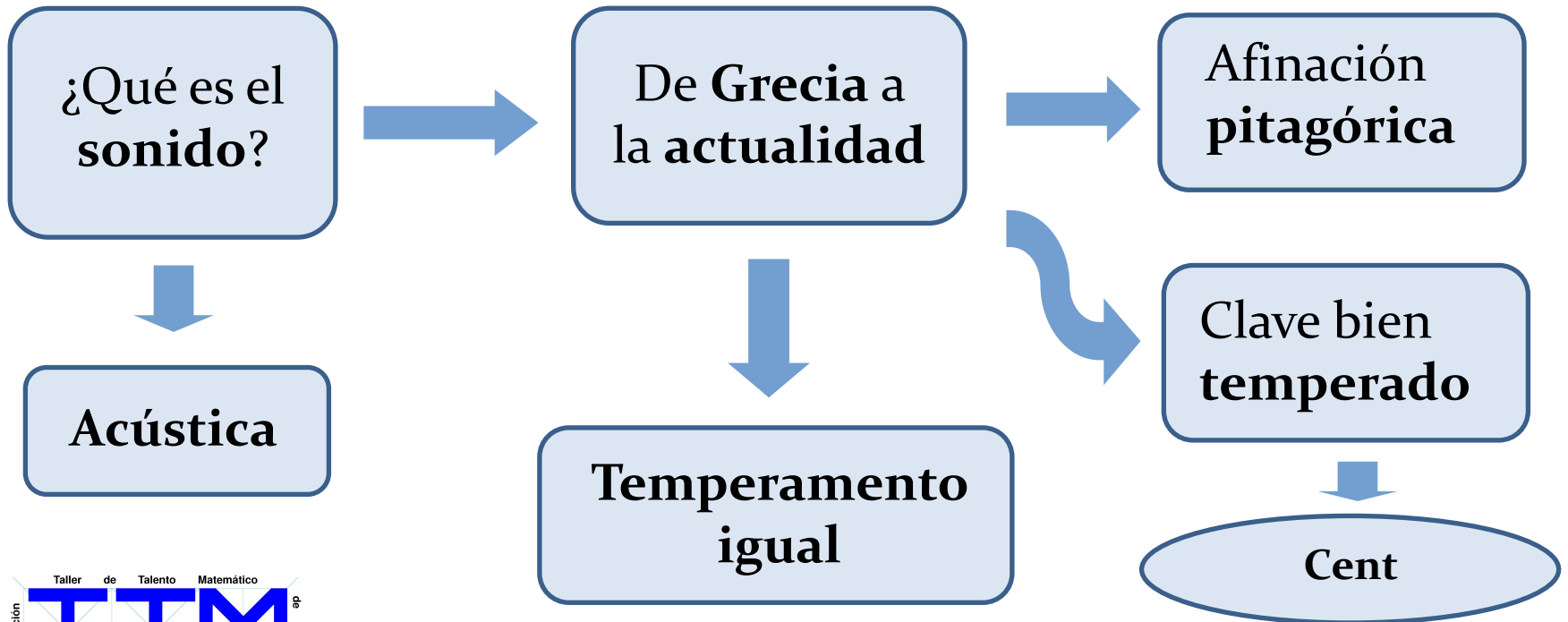


LA MÚSICA ACTUAL ESTÁ DESAFINADA

Taller de Talento Matemático
25-2-2022

“MATEMÁTICAS Y MÚSICA”
JAVIER MARTÍNEZ

GUIÓN



¿QUÉ ES EL SONIDO?

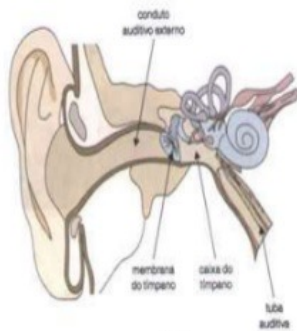
¿Cómo se produce el sonido?



1º
PRODUCCIÓN
El objeto
vibra



2º
TRANSMISIÓN
La vibración se
transmite en forma
de ondas



3º
RECEPCIÓN
Las ondas llegan
al oído

Ondas mecánicas
estacionarias



Ondas sonoras



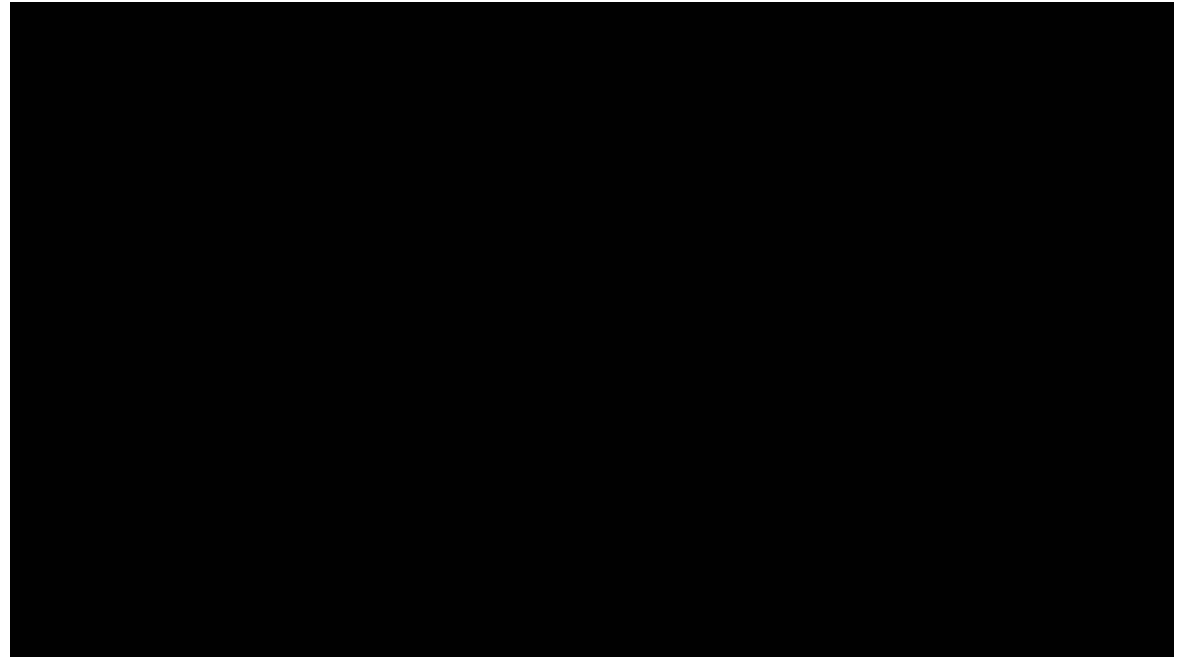
Acústica

FRECUENCIAS (HZ)

20-20000 Hz

Infrasonidos

Ultrasonidos



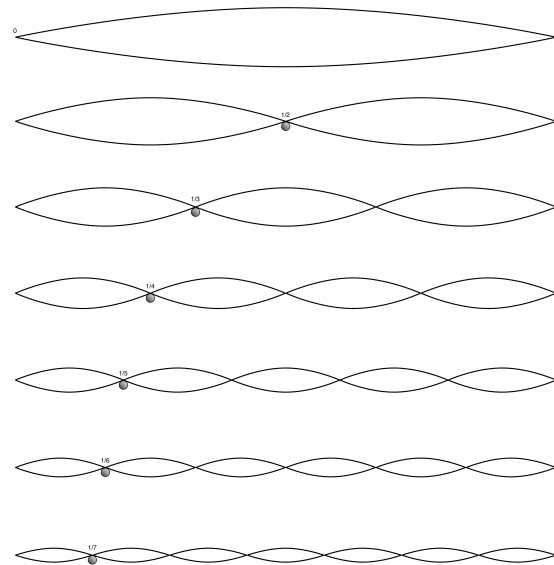
ARMÓNICOS

Múltiplos **enteros**
de la frecuencia
inicial

Proporciones

Serie armónica

Resonancia



AFINACIÓN PITAGÓRICA

Armonía
consonante basada
en la Santa Tetrakty
(1, 2, 3, 4)



Frecuencias:
1, 2, $4/3$ y $3/2$



Proporciones
 $2:1$, $3:2$, $4:3$
“la concreta
realización de la
correspondencia
universal entre
los números y
las cosas”

Obras sencillas en
una tonalidad:
resto, desafinadas.



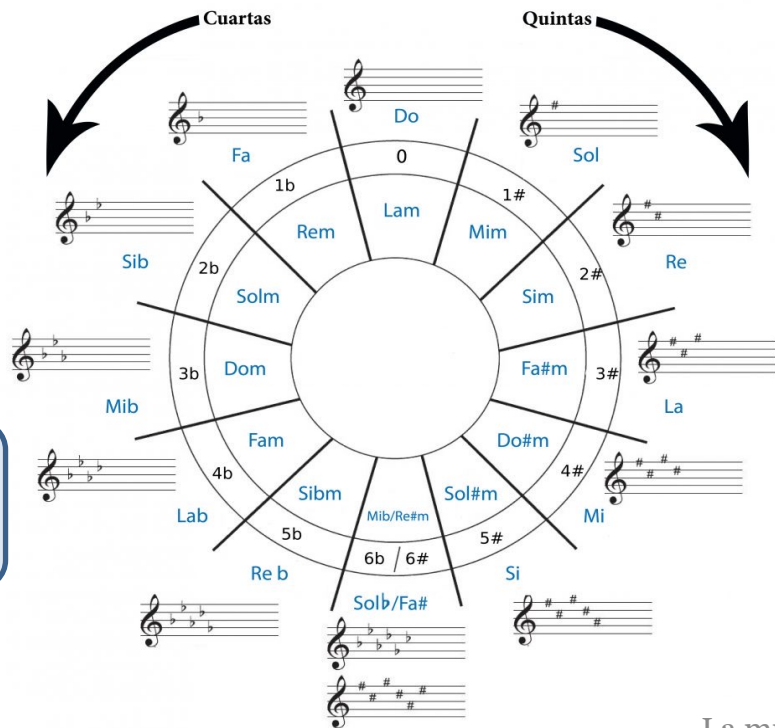
Un semitono
no es la mitad
de un tono

AFINACIÓN PITAGÓRICA

Círculo de
quintas

Proporción
 $3/2$

Frecuencias
racionales



Coma
pitagórica

Quinta del lobo

Usada hasta el
Siglo XII
(polifonía)

AFINACIÓN PITAGÓRICA

Coma pitagórica

$$Do_1 - Do_2 \Rightarrow 1 \cdot 2 = 2 \Rightarrow Do_2: 2$$

$$Do_1 - Sol_1 \Rightarrow 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow Sol_1: 3/2$$

$$Sol_1 - Re_2 \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \Rightarrow Re_1: \frac{9}{4} : 2 = 9/8$$

$$Re_1 - La_1 \Rightarrow \frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{16} \Rightarrow La_1: 27/16$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} : 2^7 = \frac{3^{12}}{2^{12} \cdot 2^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} = 1.013643 = f_{cm}$$

$$La_1 - Mi_2 \Rightarrow \frac{27}{16} \cdot \frac{3}{2} = \frac{81}{32} \Rightarrow Mi_1: \frac{81}{32} : 2 = 81/64$$

$$Mi_1 - Si_1 \Rightarrow \frac{81}{64} \cdot \frac{3}{2} = \frac{243}{128} \Rightarrow Si_1: 243/128$$

$$Fa_0 - Do_1 \Rightarrow 1 : \frac{3}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow Fa_1: \frac{2}{3} \cdot 2 = 4/3$$

Escala
diatónica

<i>Do</i>	<i>Re</i>	<i>Mi</i>	<i>Fa</i>	<i>Sol</i>	<i>La</i>	<i>Si</i>	<i>Do</i>
1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

AFINACIÓN PITAGÓRICA

Tono

$$\text{Tono} \Rightarrow \frac{9}{8} : 1 = \frac{81}{64} : \frac{9}{8} = \frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{27}{16} : \frac{3}{2} = \frac{243}{128} : \frac{27}{16} = 9/8 = 1.125 = f_t$$

**Semitono
diatónico**

$$\text{Semitono diatónico} \Rightarrow \frac{4}{3} : \frac{81}{64} = 2 : \frac{243}{128} = \frac{256}{243} = 2^8/3^5 = 1.0534979 = f_{sd}$$

**Semitono
cromático**

$$\text{Semitono cromático} \Rightarrow \frac{9}{8} : \frac{256}{243} = \frac{2187}{2048} = 3^7/2^{11} = 1.06787109 = f_{sc}$$

AFINACIÓN PITAGÓRICA

Escala cromática

<i>Do</i>	<i>Re\flat</i>	<i>Do\sharp</i>	<i>Re</i>	<i>Mi\flat</i>	<i>Re\sharp</i>	<i>Mi</i>	<i>Fa</i>	<i>Sol\flat</i>
1	$2^8/3^5$	$3^7/2^{11}$	$3^2/2^3$	$2^5/3^3$	$3^9/2^{14}$	$3^4/2^6$	$2^2/3$	$2^{10}/3^6$

Table 2: Escala cromática (1ª parte)

<i>Fa\sharp</i>	<i>Sol</i>	<i>La\flat</i>	<i>Sol\sharp</i>	<i>La</i>	<i>Si\flat</i>	<i>La\sharp</i>	<i>Si</i>
$3^6/2^9$	$3/2$	$2^7/3^4$	$3^8/2^{12}$	$3^3/2^4$	$2^4/3^2$	$3^{10}/2^{15}$	$3^5/2^7$

Table 3: Escala cromática (2ª parte)

AFINACIÓN PITAGÓRICA

Razón entre
semitonos

$$\frac{2187}{2048} : \frac{256}{243} = \frac{3^7}{2^{11}} : \frac{2^8}{3^5} = 3^{12}/2^{19} = 1.013643$$

Definición actual
de semitono

$$(f_s)^2 = f_t \rightarrow f_s = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} = 1.06066$$

ARISTÓXENO (354 – 300 a.C.)



Contribuyó a la
notación musical

Filósofo, músico y
teórico **griego**

Se basaba en la
experiencia auditiva

AFINACIÓN JUSTA

Final del
siglo **XV** y
siglo **XVI**

Basada en
intervalos de
5^a y **4^a**

Frecuencias **racionales**

Consonancias **perfectas**:
5^aJ, 4^aJ y 8^aJ

No todos los tonos de
la escala son **iguales**

Consonancias **imperfectas**:
3^am, 3^aM, 6^am y 6^aM

AFINACIÓN JUSTA

Coma sintónica

$$f_{cs} = \frac{81}{64} : \frac{5}{4} = 81/80 = 1.0125$$

Escala diatónica

$$Sol - Re \Rightarrow \frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8} \Rightarrow Re: 9/8$$

$$Sol - Si \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8} \Rightarrow Si: 15/8$$

$$Fa - La \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3} \Rightarrow La: 5/3$$

<i>Do</i>	<i>Re</i>	<i>Mi</i>	<i>Fa</i>	<i>Sol</i>	<i>La</i>	<i>Si</i>	<i>Do</i>
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

Semitono

$$f_s = 16/15$$

TEMPERAMENTO IGUAL

12 semitonos **iguales**

Clave bien temperado
Johann Sebastian Bach

Frecuencias **irracionales**

La 4: **440 Hz**



1939: Conferencia
Internacional de
Londres

TEMPERAMENTO IGUAL

Semitonos

$$f_1 \cdot (f_s)^{12} = 2f_1 \Rightarrow f_s = \sqrt[12]{2} = 1.059463$$

**Escala
cromática**

<i>Do</i>	<i>Do♯/Reb</i>	<i>Re</i>	<i>Re♯/Mib</i>	<i>Mi</i>	<i>Fa</i>	<i>Fa♯/Solb</i>
1	1.059463	1.122462	1.189207	1.259921	1.33484	1.414214

<i>Sol</i>	<i>Sol♯/Lab</i>	<i>La</i>	<i>La♯/Sib</i>	<i>Si</i>	<i>Do</i>
1.498307	1.587401	1.681793	1.781797	1.88775	2

ESTÍMULO FÍSICO Y PERCEPCIÓN

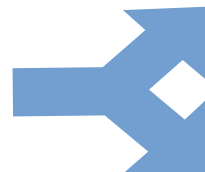
Ley de **Weber-Fechner** (1860)



Percepción **lineal**,
estímulo **geométrico**



Relación **logarítmica**



Frecuencia (Hz)

Intensidad (dB)

ESTÍMULO FÍSICO Y PERCEPCIÓN

Cocientes de frecuencias

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{2^n f_2}{2^n f_1}$$

Espectro audible

$$20 \xrightarrow{8^a} 40 \xrightarrow{8^a} 80 \xrightarrow{8^a} 160 \xrightarrow{8^a} 320 \xrightarrow{8^a} 640 \xrightarrow{8^a} 1280 \xrightarrow{8^a} 2560 \xrightarrow{8^a} 5120 \xrightarrow{8^a} 10240 \xrightarrow{8^a} 20480$$

CENT

Menor unidad de **medida** para intervalos



1 **cent**: una centésima de un semitono temperado



1 **cent**: raíz 1200 de 2



Definido por **Alexander John Ellis** en 1885



Intervalos: múltiplos de **100 cents**



Octava (**8^a**)
1200 cents



Quinta (**5^a**)
700 cents



Quinta (**5^a**) pura
702 cents

CENT

1 *cent*: raíz 1200 de 2

$$c = \sqrt[1200]{2} = 1.0005777895... \simeq 1 + \frac{1}{1731}, \text{ la } 1200^{\text{ava}} \text{ parte logarítmica de la } 8^{\text{a}}$$

Número de **cents** de un **intervalo**

$$\sqrt[1200]{2^c} = 2^{\frac{c}{1200}} \Rightarrow \frac{f_2}{f_1} = 2^{\frac{c}{1200}}$$

$$\frac{f_2}{f_1} = 2^{\frac{c}{1200}} \Rightarrow \ln \frac{f_2}{f_1} = \frac{c}{1200} \cdot \ln 2 \Rightarrow c = \frac{1200}{\ln 2} \cdot \ln \frac{f_2}{f_1} = \frac{1200}{\log 2} \cdot \log \frac{f_2}{f_1} = 1200 \cdot \log_2 \frac{f_2}{f_1}$$

Quinta justa

$$c = \frac{1200}{\ln 2} \cdot \ln \frac{3}{2} = 701.955... \simeq 702 \text{ cents}$$

CÓMO EXPRESAR UN INTERVALO

Fracción numérica

Expresión logarítmica

Relación entre
frecuencias

Fórmula Cent

TEMPERAMENTO IGUAL

Frecuencias

Do_4	261.63
$Do_4\sharp/Re_4\flat$	277.18
Re_4	293.66
$Re_4\sharp/Mi_4\flat$	311.13
Mi_4	329.63
Fa_4	349.23
$Fa_4\sharp/Sol_4\flat$	369.99
Sol_4	392.00
$Sol_4\sharp/La_4\flat$	415.30
La_4	440.00
$La_4\sharp/Si_4\flat$	466.16
Si_4	493.88

Do_5	523.25
$Do_5\sharp/Re_5\flat$	554.37
Re_5	587.33
$Re_5\sharp/Mi_5\flat$	622.25
Mi_5	659.26
Fa_5	698.46
$Fa_5\sharp/Sol_5\flat$	739.99
Sol_5	783.99
$Sol_5\sharp/La_5\flat$	830.61
La_5	880.00
$La_5\sharp/Si_5\flat$	932.33
Si_5	987.77

BIBLIOGRAFÍA

Modelos matemáticos del sistema de afinación pitagórico y algunos de sus derivados: propuesta para el aula. Javier Peralta. ISSN 1665-5826.

Wikipedia:

<http://www.eumus.edu.uy/eme/ensenanza//acustica/apuntes/afyesc2/escalas.html>

<http://www.sacred-geometry.es/?q=es/content/proporcion-en-las-escalas-musicales>

MUCHAS GRACIAS