¿CUÁL ES EL SIGUIENTE TÉRMINO?

Los cuadernillos de pasatiempos e Internet están repletos de páginas en las que nos proponen problemas relacionados con sucesiones de números o de secuencias lógicas, en las que nos dan algunos términos y nos piden que, de manera lógica, “adivinemos” el siguiente. Emplear un tiempo en resolver secuencias puede ayudar a potenciar la inteligencia general, la memoria, la percepción o la atención.

Una secuencia es una serie de elementos que se suceden unos a otros y guardan relación entre sí. Gracias a esta relación podemos encontrar patrones e intentar descifrar el siguiente paso.

Podemos encontrar problemas de secuencias lógicas de muchos tipos, como los relacionados con *figuras* (nos dan una serie de figuras colocadas en distintas posiciones o coloreadas de diferentes formas y nos piden que adivinemos la siguiente), *relojes* (nos dan unos cuantos relojes con horas distintas y nos proponen que digamos cuál sería el que continúa la serie), *fichas de domino*, *barajas*, etc., pero **los más comunes son los problemas relacionados con secuencias numéricas o sucesiones**.

En Matemáticas una **sucesión de números reales** es un conjunto de números reales ordenados, es decir, cada número de la sucesión ocupa un lugar. Los términos de la sucesión son cada uno de los números que forman la sucesión y se representan por una letra con un subíndice numérico que indica el lugar del término. El término general de una sucesión es una fórmula que relaciona el lugar que ocupa cada término con su valor, se suele representar por $\boldsymbol{a_n}$ y toda la sucesión por $\{a_n\}$.

Las sucesiones que siguen una regla determinada han llamado siempre la atención de los matemáticos de todas las generaciones. Pero, a pesar de esto y de que se conocían desde tiempos lejanos, no fueron estudiadas de forma detallada hasta la época de mayor desarrollo de las matemáticas en el siglo XVIII.

Para encontrar un número que sigue en una sucesión numérica, primero tienes que conocer **la regla de formación** de la misma, por la que se pueda calcular el término general.

Vamos a ver algunos ejemplos. Imaginaros que os propongo que continuéis la siguiente secuencia numérica: 1, 2, 3, 4, 5,…

Posiblemente elegiríais como siguiente término al número 6 (Regla de formación: $\boldsymbol{a_n = n}$. Los números naturales). Sencillo, ¿verdad? Veamos otro ejemplo: 3, 5, 7,…

Aquí ya se nos podrían ocurrir más cosas sin necesidad de pensar demasiado. Podríamos imaginar que la secuencia corresponde con los números impares a partir del 3, Regla de formación: $\boldsymbol{a_n = 2n + 1}$, por lo que el siguiente término sería el 9. Pero también tendría sentido que la secuencia fuera la que la regla de formación sea la que nos muestra los números primos impares, por lo que debería seguir con el número 11. Ambas respuestas serían correctas, y bastante razonables.

Uno de los problemas que hay en "encontrar el siguiente término" de una sucesión es que las matemáticas son tan potentes que podemos encontrar más de una regla que vale. Ejemplo: ¿Cuál es el siguiente número de la sucesión 1, 2, 4, 7, ...?

Vamos a dar tres soluciones:

Solución 1: suma 1, después suma 2, 3, 4, ...
Entonces, 1+**1**=2, 2+**2**=4, 4+**3**=7, 7+**4**=11, etc...
Regla: $\boldsymbol{a_n = a_{n-1} + n - 1}$
Sucesión: 1, 2, 4, 7, **11, 16, 22, ...**
(La regla parece complicada, pero funciona)

Solución 2: suma los dos números anteriores más 1:
Regla: $\boldsymbol{a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1}$
Sucesión: 1, 2, 4, 7, **12, 20, 33, …**

Solución 3: suma los tres números anteriores
Regla: $\boldsymbol{a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}}$
Sucesión: 1, 2, 4, 7, **13, 24, 44, ...**

Hay que tener en cuenta que a veces **NO** se puede encontrar la fórmula del término general, por ejemplo en la sucesión de los números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13 ...., aunque la regla de formación es sencilla: un número, mayor que 1, es primo cuando, sólo tiene por divisores, él mismo y la unidad.

Volvamos a la secuencia 3, 5, 7,... Hemos dicho que tendría sentido seguirla con un 9 (números impares a partir del 3) o con el 11 (número primos impares). ¿Sólo con esos? ¿Se podría seguir con el número 14? ¿Tendría sentido que el siguiente término fuera el 47? ¿Y el 1111? Pues el caso es que **sí, tendría sentido continuar esa secuencia, con cualquier número que se nos ocurra**, entendiendo "tener sentido" como que para cualquier número k podríamos encontrar una regla a partir de la cual obtenemos el 3, luego el 5, después el 7 y a continuación el número k elegido.

Esto está demostrado, y además desde hace ya tiempo. En 1795, **Joseph Louis Lagrange** publicaba un resultado que está muy relacionado con estas secuencias numéricas. Dicho resultado (que, por cierto, había sido descubierto por **Edward Waring** en 1779) dice básicamente que **para cualquier secuencia de números podemos encontrar una regla (más concretamente, un polinomio) que para los valores 1, 2, 3, etc, nos da los términos de dicha secuencia**.

Dicho polinomio, llamado **polinomio interpolador**, se calcula a partir de los términos de la propia secuencia. Podríamos entonces añadir el número que quisiéramos y después calcular el polinomio interpolador de la secuencia obtenida, obteniendo así la "regla" que explica el porqué de nuestra elección. No tiene por qué ser una regla sencilla, lo interesante es que la hay. Ponemos a continuación las reglas que explicarían las elecciones 9, 11, 14, 47 y 1111 para la secuencia 3, 5, 7:

Siguiente término: 9; Polinomio interpolador $a_n = p(n) = 2n + 1$

Siguiente término: 11; Polinomio interpolador $a_n = p(n) = (1/3)n^3 - 2n^2 + (17/3)n - 1$

Siguiente término: 14; Polinomio interpolador $a_n = p(n) = (5/6)n^3 - 5n^2 + (67/6)n - 4$

Siguiente término: 47; Polinomio interpolador $a_n = p(n) = (19/3)n^3 - 38n^2 + (215/3)n - 37$

Siguiente término: 1111; Polinomio interpolador $a_n = p(n) = (551/3)n^3 - 1102n^2 + (6067/3)n - 1101$

Dada una sucesión de $\boldsymbol{n}$ números se puede calcular **siempre un único** polinomio de grado $\boldsymbol{n-1}$ que se corresponda con esos números dados (Como se puede ver, a medida que crece el número de términos de la sucesión, también lo hace el grado del polinomio).

Ejemplo: Sean los números: 2, 10 y 12. ¿Cuál es el término siguiente?

Buscamos un polinomio $p(n) = a + bn + cn^2$ tal que $p(1) = a_1 = 2$; $p(2) = a_2 = 10$; $p(3) = a_3 = 12$

por lo tanto tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a + b1 + c1^2 = 2$$
$$a + b2 + c2^2 = 10$$
$$a + b3 + c3^2 = 12$$

El sistema obtenido se resuelve con alguno de los métodos conocidos. Por ejemplo despejando a en la primera ecuación $a = 2 - b - c$ y sustituyendo en las otras dos, obtenemos el sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas $b + 3c = 8$; $2b + 8c = 10$, que resuelto, nos da por solución para el sistema general: $a = -12$, $b = 17$, $c = -3$, por lo que el término siguiente seria $a_4 = p(4) = -12 + 17\cdot4^2 - 3\cdot4^3 = 68$

Qué pasa si pensamos en números no enteros, ni tan siquiera racionales, sino irracionales: π, $\sqrt{2}$, … pues, también podemos calcular el polinomio interpolador. Por ejemplo, sea la secuencia: 1, 7, 11, π,… Otro método de cálculo del polinomio interpolador es utilizar a_1, *y* los productos sucesivos: $(n-1)$, $(n-1)(n-2)$, $(n-1)(n-2)(n-3)$,... multiplicados por algunos coeficientes a calcular:

Vamos a verlo con la secuencia dada, si sólo tenemos el primer término, ponemos $a_n = p(n) = a_1$ para $n = 1$ no hay nada que calcular, pero no funciona para a_2, tenemos que cambiar de polinomio interpolador, ponemos ahora $a_n = \boldsymbol{p(n) = a_1} + x(n-1)$ que al sustituir n por 1, sale $a_1 = a_1$, y al sustituir n por 2 y $a_2 = 7$ nos da un valor para $x = 6$, por lo que la fórmula es: $a_n = p(n) = a_1 + 6(n-1)$; tampoco nos sirve para a_3, lo intentamos con $a_n = \boldsymbol{p(n) = a_1 + 6(n-1)} + x(n-1)(n-2)$, que al sustituir n por 1 y 2 sale respectivamente 1 y 7 y si sustituimos por 3 y a_3 por 11, nos da un valor para $x = -1$, tenemos ahora por fórmula $a_n = p(n) = a_1 + 6(n-1) + (-1)(n-1)(n-2)$, tampoco funciona con π, pondríamos $a_n = \mathbf{p(n) = a_1 + 6(n-1) + (-1)(n-1)(n-2)} + x(n-1)(n-2)(n-3)$, que al sustituir por n por 1, 2 y 3 sale 1, 7 y 11 y al poner la n por 4 y a_4 por π, nos da un valor para x de $(\pi - 13)/6$. Este método de poner la fórmula del paso anterior, más un coeficiente por el siguiente término de la secuencia de productos sirve para cualquier sucesión finita de números.

Aunque se puede pensar que con esto le acabamos de quitar toda la gracia a la búsqueda de reglas que expliquen una elección concreta del siguiente término de una secuencia numérica. Por ejemplo, para la secuencia: 1, 2, 4, 8, 16,… seguro que la mayoría habríais contestado que el siguiente término es el 32, al ser la regla de formación las potencias de 2; (la secuencia propuesta es 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4,… $a_n = 2^{n-1}$). Pero con lo que hemos comentado antes ya sabemos que para cualquier número que eligiéramos podríamos encontrar una regla que le diera sentido.

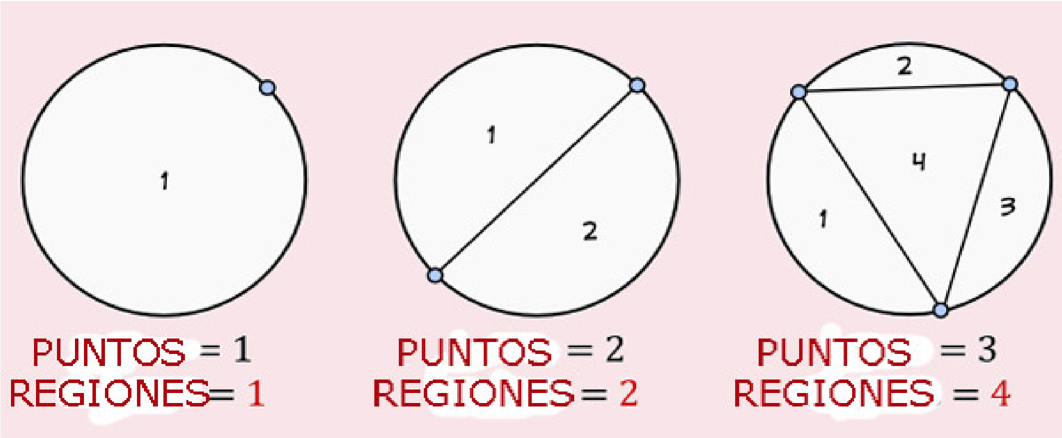
Ahora, eso no significa que no podamos encontrar relaciones curiosas y bellas que expliquen ciertas elecciones “no habituales”. Por ejemplo, ¿y si os digo que busquéis alguna regla curiosa o interesante que explique que la elección del siguiente término de la secuencia fuera el 31?

Si, vale, elegimos el 31, calculamos el polinomio interpolador y ya tenemos la regla. Pero, en este caso, existe una bonita explicación para esta elección. Tomamos una circunferencia, elegimos puntos sobre ella y los unimos con segmentos de todas las formas posibles (**cuidándonos de que no haya tres segmentos que se corten en un punto**). Hemos esto, contamos el número de regiones en las que ha quedado dividido el círculo interior a dicha circunferencia.

Comenzamos tomando un punto nada más. En este caso no se puede trazar ningún segmento (necesitamos al menos dos puntos para ello), por lo que nos queda una única región (el círculo completo). Tenemos entonces que el primer término de la secuencia es 1.

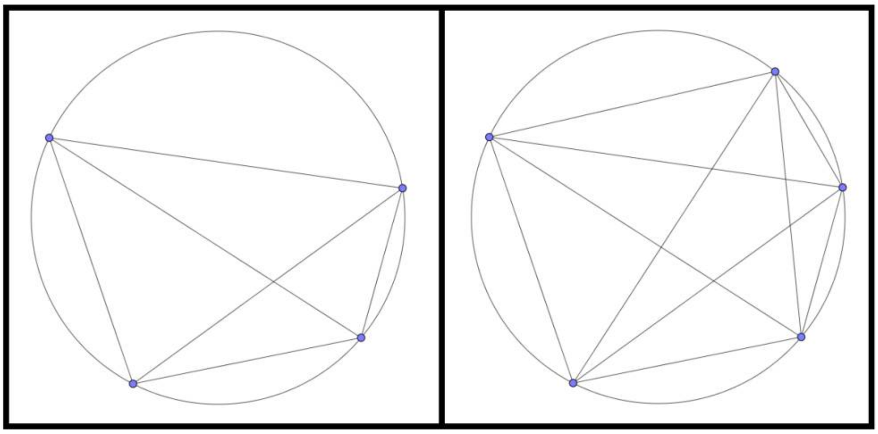
Tomemos ahora dos puntos. Ahora podemos trazar un único segmento, que divide al círculo en dos regiones. Entonces, el segundo término de la secuencia es 2.

Vamos ahora con tres puntos. Aquí podemos trazar tres segmentos, que dejan dividido el círculo en exactamente cuatro regiones. Por tanto, el tercer término de la secuencia es 4. En la siguiente imagen podéis ver estos tres primeros casos:

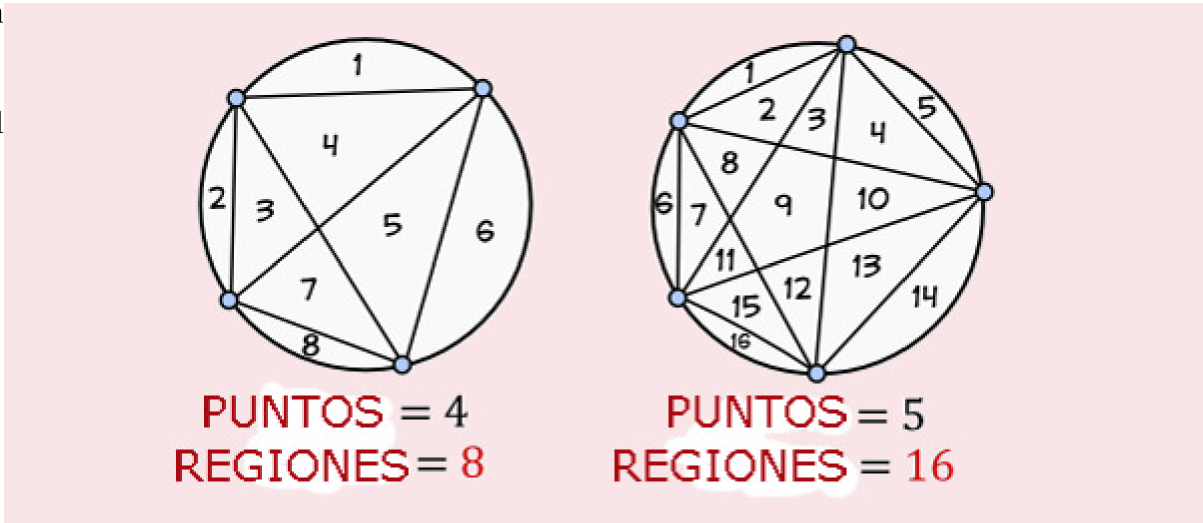


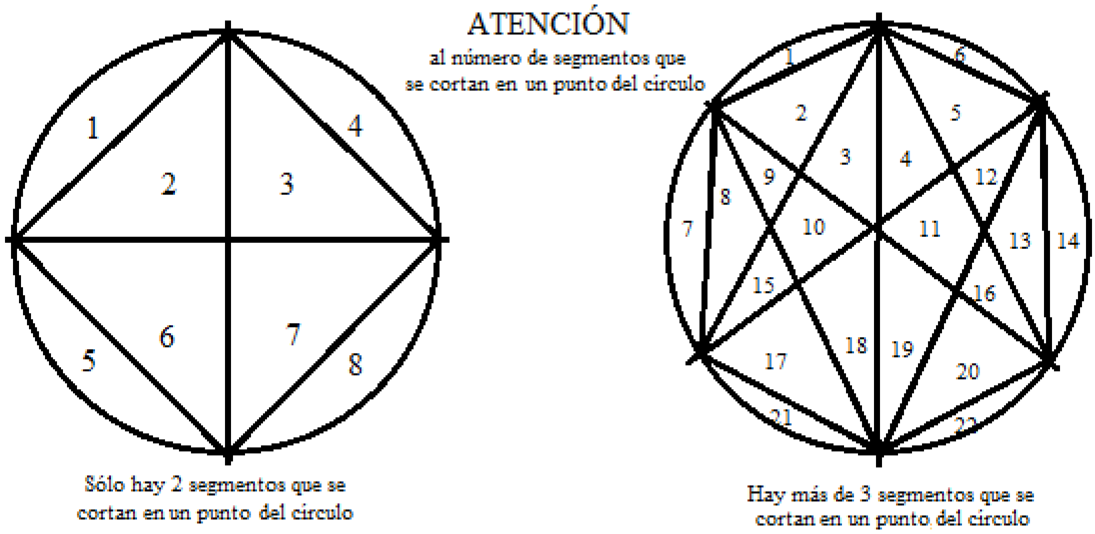
Con cuatro puntos se pueden trazar seis segmentos, que dividen el círculo en ocho regiones, y con cinco puntos podemos trazar diez segmentos, quedando el círculo dividido en dieciséis partes.

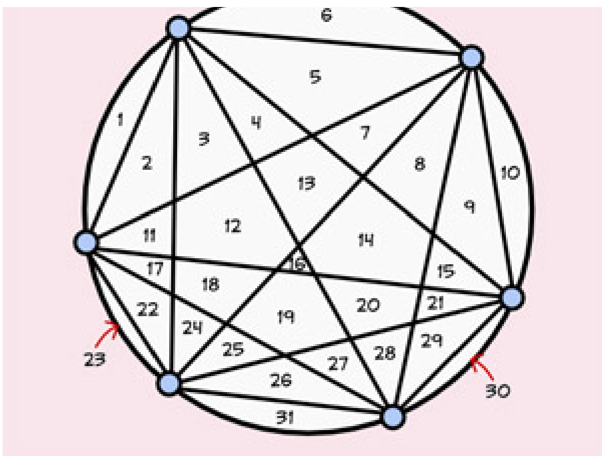
Entonces, los siguientes términos de la secuencia son, efectivamente, 8 y 16. A continuación, podéis ver las dos situaciones:



Vayamos ahora al caso de seis puntos, el que corresponde al término que nos preguntaban, pero.







Si somos un poco ordenados no es complicado el conteo de las regiones

El círculo interior queda dividido en 31 regiones exactamente. Tenemos entonces una secuencia que coincide con las potencias de 2 en los primeros cinco términos pero que difiere en el sexto. Y no sólo en este, sino que a partir de ahí las diferencias van siendo cada vez más grandes: 57 (frente a $64 = 2^6$), 99 (frente a $128 = 2^7$), etc.

El polinomio que nos calcula exactamente el número de regiones para 5 puntos en las que queda dividido el círculo interior actuando de la forma descrita es la siguiente:

$$p(n) = (1/24)n^4 - (1/4)n^3 + (23/24)n^2 - (3/4)n + 1$$

y los polinomios interpoladores para las sucesiones 1, 2, 4, 8, 16, **32** y 1, 2, 4, 8, 16, **31** son respectivamente:

$$p(n) = (1/120)n^5 - (1/12)n^4 + (11/24)n^3 - (11/12)n^2 + (23/15)n$$

$$p(n) = (1/24)n^4 - (1/4)n^3 + (23/24)n^2 - (3/4)n + 1$$

No creo que se pueda negar lo curioso de este problema de las regiones y, por qué no decirlo, la belleza que contiene.

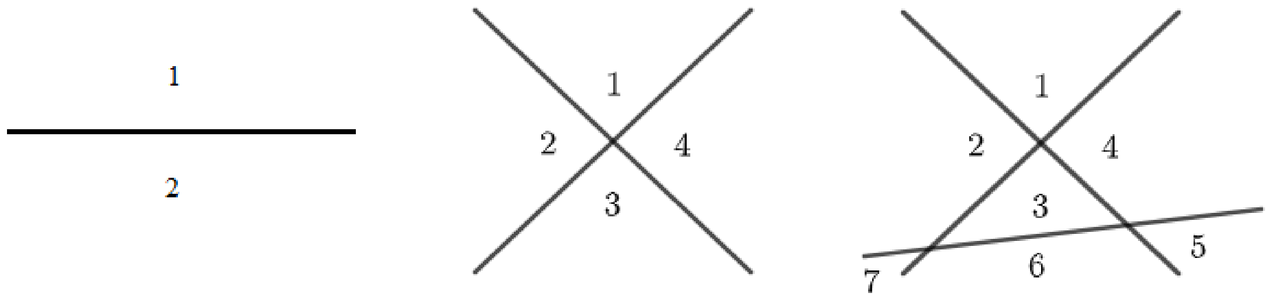
Otro ejemplo más. A ver quién puede seguir la siguiente secuencia, sin calcular el polinomio interpolador: 2, 10, 12, 16, 17, 18, 19,…

Una de las soluciones sería que el siguiente término de la sucesión sería el 200. ¿Por qué?: Pues si la vemos literalmente la secuencia sería: **D**os, **D**iez, **D**oce, **D**ieciséis, **D**iecisiete, **D**ieciocho, **D**iecinueve, ...Pues la regla de construcción de esta secuencia es: **escribir de menor a mayor los números que empiezan por la letra D al escribirlos en español**.
2, 10, 12, 16, 17, 18, 19, 200, 201, 202, 203,…

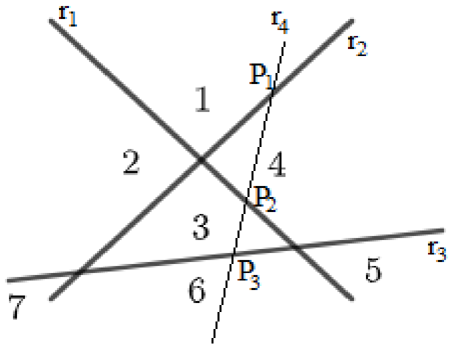
Otras secuencias interesantes serían:

- Las progresiones tanto aritméticas como geométricas, ya conocidas, en el primer caso la diferencia entre términos consecutivos es constante (Las famosas tablas de multiplicar), $a_n = a_1 + (n - 1)d$, (**polinomio de grado uno**) mientras que en el segundo la razón o cociente entre términos consecutivos es constante (Las potencias de los números naturales), $a_n = a_1 r^{n-1}$.
- Las progresiones aritméticas de segundo orden en las que las diferencias entre los términos consecutivos de la progresión no son una constante, sino que ellas a su vez constituyen una progresión aritmética. Dos ejemplos: 3, 7, 13, 21, 31,… ; y los cuadrados de los números naturales: 1, 4, 9, 16, 25, …. **El término general es un polinomio de segundo grado**: $a_n = an^2 + bn + c$. ($a_n = n^2 + n + 1$; $a_n = n^2$ respectivamente). Se pueden generalizara a órdenes mayores.

EJERCICIO: Tenemos la sucesión obtenida al trazar en un plano *n* rectas secantes dos a dos, **pero tres a tres no concurrentes**, ¿Cuál es el término general?
SOLUCIÓN:



En la figura anterior vemos los primeros términos de la sucesión para $n = 1, 2, 3$. Una cuarta recta, que fuese secante dos a dos con las **tres** anteriores, daría lugar a **tres** nuevos puntos de intersección, situación que provocaría que cuatro de las anteriores regiones quedasen, cada una de ellas, subdivididas en dos nuevas regiones.

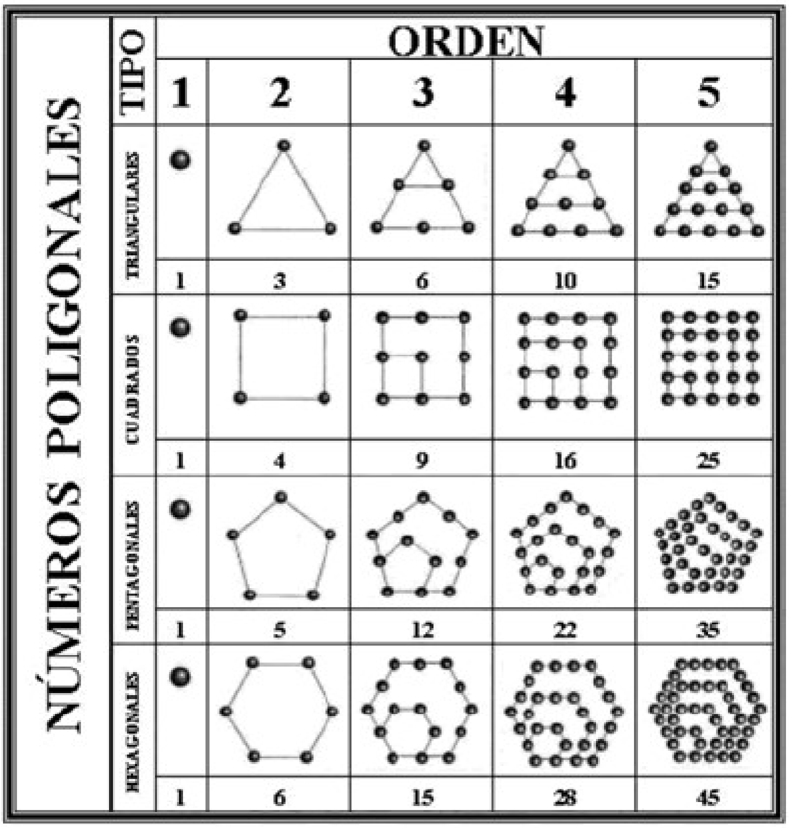


En total, contaríamos pues con once regiones (7 + 4 = 11).

En general, llamando a_n al número de regiones en que el plano queda dividido por n rectas que son secantes dos a dos, pero tres a tres no concurrentes. Al incorporar una nueva recta, que será secante dos a dos con todas las anteriores, esta dará lugar a n nuevos puntos de intersección (ya que no será concurrente tres a tres con ninguno de los pares presentes), hecho que provoca que, de las a_n regiones que se contaban antes de introducir la nueva recta, $n + 1$ queden, cada una de ellas, subdivididas en dos regiones. Así, es cierto que, para cada número natural n, $a_{n+1} = a_n + (n + 1)$
$a_1 = 2$; $a_2 = 4$; $a_3 = 7$; $a_4 = 11$; $a_5 = 16$; $a_6 = 22$;… $\{a_n\}$ es una progresión aritmética de segundo orden de término general $a_n = (1/2)(n^2 + n + 1)$.

Más tipos de sucesiones a tener en cuenta serían;

- Las progresiones aritmético-geométricas: $a_n = (a + bn)r^n$
- Las potencias de los números naturales
- Los números poligonales: En matemáticas, un **número poligonal** es un número natural que puede recomponerse en un polígono regular. También se llaman Números Figurados ya que todos ellos se pueden representar en forma de figura geométrica. Los matemáticos de la Antigüedad descubrieron que los números podían disponerse con ciertas formas cuando los representaban mediante piedras o semillas.



Representación de los número triangulares, cuadrados, pentagonales y hexagonales.

Los números triangulares de orden *n* son la suma de los *n* primeros términos de una progresión aritmética con $a_1 = 1$, $d = 1$, los cuadrangulares con $a_1 = 1$, $d = 2$, los pentagonales con $a_1 = 1$, $d = 3$,… en general los números poligonales de *l* lados se generan a partir de la suma de los *n* términos de la progresión aritmética cuyo primer término es $a_1 = 1$, y diferencia $d = l - 2$.

Por tanto los números poligonales de orden *n* para un polígono de *l* lados, se pueden calcular mediante la fórmula: $[(n^2 - n)\cdot(l - 2) + 2n]/2$

En la siguiente tabla figuran los diez primeros números poligonales para los primeros polígonos regulares.

- Las sucesión como las de Fibonacci:

La de Fibonacci es la siguiente sucesión de números naturales: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...

La sucesión comienza con los números 0 y 1, y a partir de estos, «cada término es la suma de los dos anteriores», la regla o relación de recurrencia que la define es: $\boldsymbol{a_{n+2} = a_{n+1} + a_n}$.

Se pueden sumar en vez de dos, tres, cuatro,… términos anteriores, para obtener el siguiente.

En el interesante campo de las secuencias numéricas nos podemos encontrar con todo tipo de situaciones curiosas y en el que nos podemos llevar muchas sorpresas. Vamos ahora a fijarnos en otra secuencia que, aunque es conocida, no deja de tener interés. Es la siguiente: 1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221,…

¿Cuál sería el siguiente término de la serie?, ¿Cuál es la regla que nos permite encontrar los siguientes?

Si no se nos ocurre nada, os voy a contar cómo se forma esta sucesión y así se verá mucho más claramente la misma y podremos formar, de este tipo, todas las que queramos y de paso veremos algunos entresijos de la misma. Primero unos cuantos términos más:

1
11
21
1211
111221
312211
13112221
1113213211
31131211131221
13211311123113112211
11131221133112132113212221
3113112221232112111312211312113211
1321132132111213122112311311222113111221131221
11131221131211131231121113112221121321132132211331222113112211
311311222113111231131112132112311321322112111312211312111322212311322113212221
132113213221133112132113311211131221121321131211132221123113112221131112311332111213211322211312113211

La regla que se pedía encontrar para continuar esta secuencia es: **leer las cifras del número (agrupando las que sean iguales) y escribir lo que hemos leído también en forma de número**. Comenzamos con el 1 como primer elemento. El segundo elemento saldrá de leer el primer elemento y escribirlo en forma de número. Si leemos el primer elemento decimos «un uno». Por eso el segundo elemento es 11. El tercer elemento sale de leer el segundo, para lo que diríamos «dos unos», quedando entonces en tercer lugar el número 21. Y así sucesivamente. Por ello esta sucesión se denomina Look-and-say sequence

Curiosa sucesión.

Bien, vamos a comentar algunas de sus propiedades:

- La sucesión así creada es **divergente**, es decir, sus términos crecen indefinidamente, son cada vez más grandes, no tienen un límite. De hecho, si comenzamos la sucesión por otro número que no sea el 1, se tiene que la secuencia Look-and-say es divergente para todo número excepto para el 22, ya que en este caso se obtiene la secuencia constante siguiente:

22, 22, 22, 22, 22,…

Veamos algunos ejemplos más:

3, 13, 1113, 3113, 132113, 1113122113, 311311222113,…
25, 1215, 11121115, 31123115, 132112132115, 11131221121113122115,..
149, 111419, 31141119, 1321143119, 1113122114132119, 3113112221141113122119,...

- Los elementos de la secuencia no contienen como cifra a ningún número natural mayor que 3, a no ser que el elemento inicial lo contenga. Esto eso, no encontraremos ningún 5 en un elemento de la secuencia a no ser que el primer número de la misma contenga dicho 5.

Calculamos los cocientes relacionados con esta sucesión, pero no de cada elemento entre su anterior, sino del número de cifras de cada elemento, entre el número de cifras del anterior: En la inicial son:

2/1 = 2, 2/2 = 1, 4/2 = 2, 6/4 = 1.5, 6/6 = 1, 8/6 = 1.3333…, 10/8 = 1.25, 14/10 = 1.4 ...

En la segunda los cocientes son: 2, 2, 1, 1.5, 1.666…, 1.2, ..

En la tercera: 2, 2, 1, 1.5, 1.25,..

En la cuarta: 2, 1.3333…, 1.25, 1.7, 1.2941176..

No parece que haya demasiada regularidad, pero en realidad la hay. De hecho estos cocientes tienden al mismo número sea cual sea el primer elemento de la sucesión (excepto el 22).

Ese número, conocido como constante de Conway, es el siguiente:

$\boldsymbol{\lambda}$ = 1.30357726...

Su nombre proviene del gran matemático inglés John Horton Conway, que la introdujo y estudió.

¿Qué se sabe algo de este número? Pues se sabe que es irracional y, sorprendentemente, **algebraico**, hecho que demostró el propio Conway. ¿Qué significa esto último? Pues, esto quiere decir que existe un polinomio con coeficientes enteros tal que esta constante de Conway es una de sus raíces. (En matemáticas, una **raíz** de un polinomio $p(x)$ es un valor α tal que $p(\alpha) = 0$)

¿Y cuál es ese polinomio? Comparando con el número de oro, ϕ, proveniente de la sucesión de Fibonacci, que es solución de la ecuación polinómica de segundo grado $x^2 - x - 1 = 0$, uno podría pensar que el grado no puede ser muy grande en este caso, nada más lejos de la realidad: λ es la única solución positiva de la siguiente monstruosa ecuación polinómica de grado 71:

Una última curiosidad, Conway también demostró que de un cierto término en adelante casi

$$\begin{gathered}
x^{71} - x^{69} - 2x^{68} - x^{67} + 2x^{66} + 2x^{65} + x^{64} - x^{63} - x^{62} - x^{61} - x^{60} - x^{59} + 2x^{58} + \\
+5x^{57} + 3x^{56} - 2x^{55} - 10x^{54} - 3x^{53} - 2x^{52} + 6x^{51} + 6x^{50} + x^{49} + 9x^{48} - 3x^{47} - \\
-7x^{46} - 8x^{45} - 8x^{44} + 10x^{43} + 6x^{42} + 8x^{41} - 5x^{40} - 12x^{39} + 7x^{38} - 7x^{37} + 7x^{36} + \\
+x^{35} - 3x^{34} + 10x^{33} + x^{32} - 6x^{31} - 2x^{30} - 10x^{29} - 3x^{28} + 2x^{27} + 9x^{26} - 3x^{25} + \\
+14x^{24} - 8x^{23} - 7x^{21} + 9x^{20} + 3x^{19} - 4x^{18} - 10x^{17} - 7x^{16} + 12x^{15} + 7x^{14} + 2x^{13} - \\
-12x^{12} - 4x^{11} - 2x^{10} + 5x^{9} + x^{7} - 7x^{6} + 7x^{5} - 4x^{4} + 12x^{3} - 6x^{2} + 3x - 6 = 0
\end{gathered}$$

Y una última curiosidad, Conway también demostró que de un cierto término en adelante casi todos los elementos de la sucesión pueden descomponerse en 92 subtérminos, a los que llamó elementos (como los elementos químicos).

Para finalizar la sesión, vamos a ver otro tipo de secuencia numérica que tiene por regla de formación la siguiente: Elige cualquier número. Si ese número es par, divídelo por 2. Si es impar, multiplícalo por 3 y suma 1.

$$C(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n+1, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Ahora repita el proceso con su nuevo número.

Por ejemplo, empezando con el número 12, aplicando este proceso se obtienen los números 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2 ,1, etc.

La **conjetura de Collatz** dice que, sea cual sea el número *x* inicial, tras un número finito de repeticiones de la operación se llega siempre a 1.

Probaremos con algún número más:

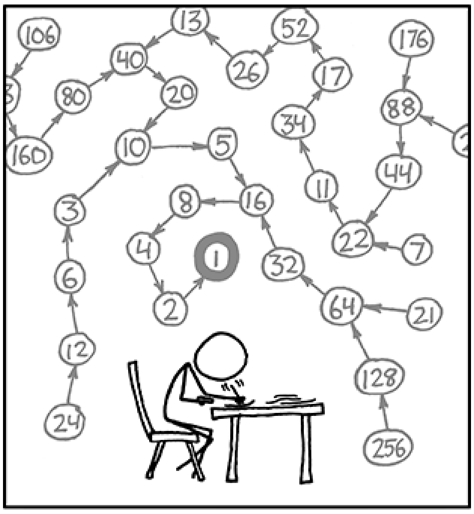
9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

32, 16, 8, 4, 2, 1

Más ejemplos:

- Empezando en $n = 6$, la sucesión tiene 8 pasos, y llega a la siguiente sucesión: **6**, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.
- Empezando en $n = 11$, la sucesión tiene 14 pasos: **11**, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.
- Empezando en $n = 27$, la sucesión tiene 111 pasos, llegando hasta 9232 antes de descender a 1: **27**, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, **9232**, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.
- Empezando en $n = 75128138247$, la sucesión tiene 1228 pasos para llegar a 1.
- Empezando en $n = 1424652103065$, la sucesión tiene 1240 pasos para llegar a 1.

- Empezando en n = 40523437598309, la sucesión tiene 1250 pasos para llegar a 1.
- Empezando en n = 32018518596193, la sucesión tiene 1260 pasos para llegar a 1.
- Empezando en n = 151791495567137, la sucesión tiene 1270 pasos para llegar a 1.
- Empezando en n = 719604127133093, la sucesión tiene 1280 pasos para llegar a 1.
- Empezando en n = 1705728301352515, la sucesión tiene 1289 pasos para llegar a 1.
- Empezando en n = 16172831301712733, la sucesión tiene 1300 pasos para llegar a 1.



Los matemáticos han intentado millones de números y nunca han encontrado uno que finalmente no terminara en 1. La cuestión es que nunca han podido *demostrar* que no hay un número especial que nunca llegue al 1. Es posible que haya un número realmente grande que llegue al infinito, o tal vez un número que se atasque en un bucle y nunca llega a 1. Pero nadie ha podido probar eso con certeza.

La conjetura de Collatz, o problema $3x + 1$, es muy famoso entre los matemáticos aficionados. Fascinante donde los haya, a día de hoy su resolución raya lo imposible. Quizás te hayas preguntado qué pasa cuando se sustituye el 3 por 5, o por 7, o por otro número primo. Se obtiene una conjetura similar si se realiza un cambio «inteligente» en la formulación del problema. Así se obtienen la conjetura de Roosendaal, o problema $5x + 1$, la conjetura de Oliveira e Silva, o problema $7x + 1$, y sus generalizaciones. Más aún, hay otros primos de estas conjeturas, como la conjetura de Barina, o problema $7x \pm 1$.

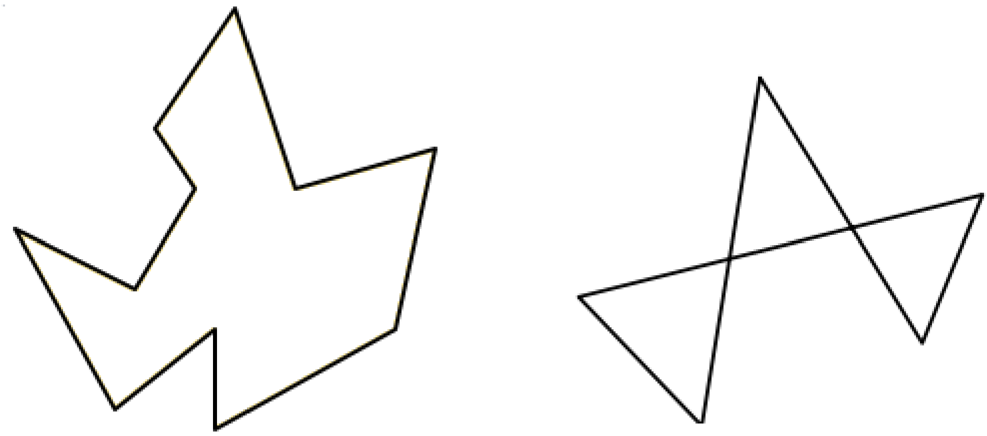
Estas conjeturas han sido verificadas para todos los números menores de $\sim 5.7 \times 10^{18}(3x + 1)$, $10^{16}(5x + 1)$, $10^{16}(7x + 1)$, y $10^{15}(7x \pm 1)$. Parecen verdaderas, pero no sabemos si lo son hasta que no haya una demostración rigurosa. Según Jeffrey C. Lagarias (Univ. Michigan), matemático experto en la conjetura de Collatz, «estos problemas son muy peligrosos porque la gente se obsesiona con ellos, cuando a día de hoy su resolución raya lo imposible».

Un poco de historia: En los años 1930, el matemático alemán Lothar Collatz observó un fenómeno curioso experimentando con números enteros. Parecía una propiedad sencilla, pero la demostración general, que permitiría afirmar que todos los números cumplen esa propiedad, se le resistía. Empezó a difundir el problema entre sus colegas, pero nadie podía resolverlo. En 1950 la ciudad de Cambridge en Massachusetts (EE UU) acogió el Congreso Internacional de Matemáticos, el primero después de la Segunda Guerra Mundial, y Collatz aprovechó la ocasión para compartir el problema entre los asistentes. La popularidad del enigma fue en aumento, en particular en EE UU, donde cautivó y derrotó a grupos enteros de investigadores. Esto suscitó una broma recurrente, según la cual el problema, que pasó a conocerse como la *conjetura de Collatz,* era parte de un complot para retrasar la investigación matemática estadounidense.

La dificultad de la conjetura radica en que, aunque la función C sea muy simple, las trayectorias pueden ser muy diferentes de un número a otro, y en particular pueden ser muy erráticas y tardar mucho o muy poco tiempo en llegar a 1. Esta dinámica tan compleja hace que el problema siga resistiendo a todas las herramientas y técnicas conocidas de análisis.

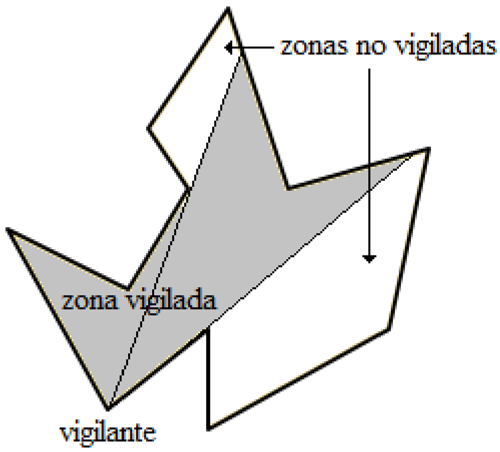
El Problema de la Galeria de Arte

El problema fue planteado por Victor Klee en 1973, pero antes de plantearlo, vamos a ver algunas nociones previas. Vamos a hablar de galerías de arte, museos, que hay que vigilar, para que nadie toque ni se lleve nada. Pues bien, en esta primera versión del problema que vamos a tratar (hay muchísimas variantes), la galería que queremos vigilar estará representado por un **polígono simple**, y cuando decimos simple, lo que queremos decir es que los lados de nuestro polígono, no se cortan entre ellos; con un dibujo se ve más claro.



Esto es un polígono simple   Esto NO es un polígono simple

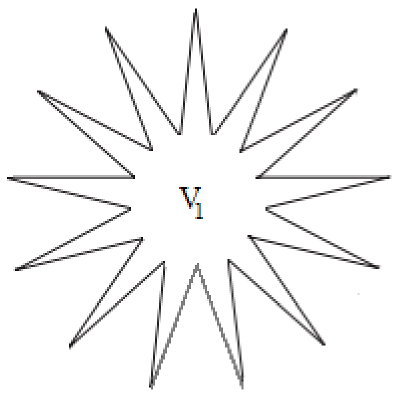
Cuando decimos que queremos vigilar la galería de arte, lo que queremos es, decidir dónde colocaremos a los vigilantes, en el polígono que representa a la galería, con el fin de que toda ella quede cubierta por la mirada de éstos. En esta primera versión del problema, los vigilantes tienen que estar situados en los vértices del polígono, fijos, no se pueden mover. Tienen visión de 360ª y pueden ver a cualquier distancia, siempre que no haya una pared que se lo impida.

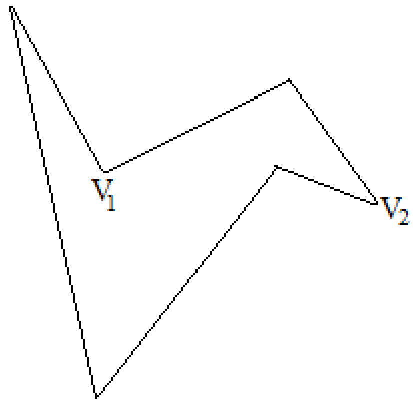


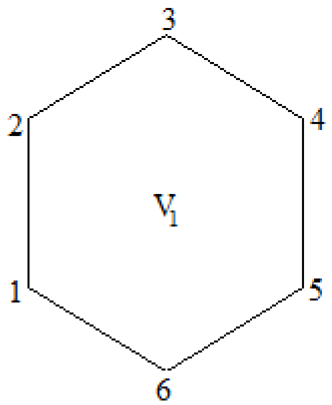
En la imagen superior, hemos situado un vigilante en un vértice del polígono y hemos sombreado la zona que sería cubierta por éste, sin moverse. Con estas restricciones, ya podemos plantear el problema:

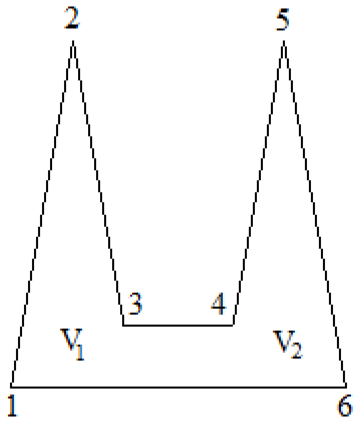
Dado un polígono con *N* vértices ¿cuántos vigilantes son siempre suficientes para vigilar todo el polígono?

Ahora bien, el problema que plantea Klee no es que nos dan un polígono, dibujado, con ***N*** vértices y que nosotros coloquemos el menor número de vigilantes para ese polígono en concreto. Lo que plantea Klee es que demos una fórmula, de forma que podamos saber para un número de vértices ***N***, cualquiera, cuántos guardianes serán suficientes para vigilar esa galería, sin saber siquiera qué forma tiene la galería, sólo a partir del numero de vértices que tiene el polígono que representa la planta del museo. Pero, ¿eso como va a ser posible?, la forma del polígono tiene mucho que ver, de hecho puede haber polígonos con muchos vértices que se vigilen con un sólo vigilante y otros que, con muchos menos, necesiten más de uno, o que dos polígonos con el mismo número de vértices, necesiten distinto número de vigilantes, por ejemplo:







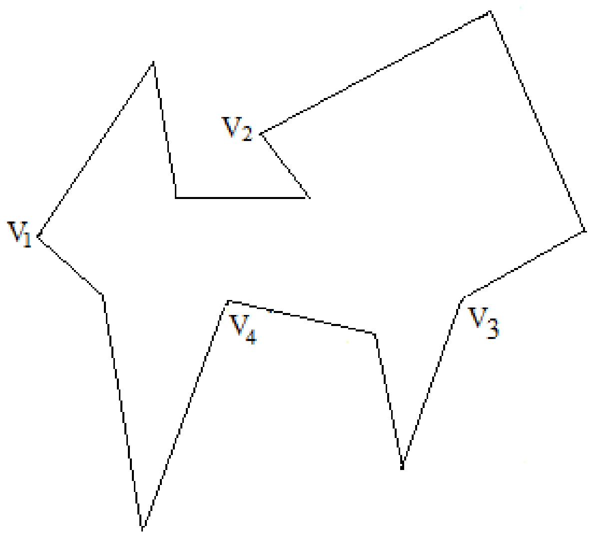


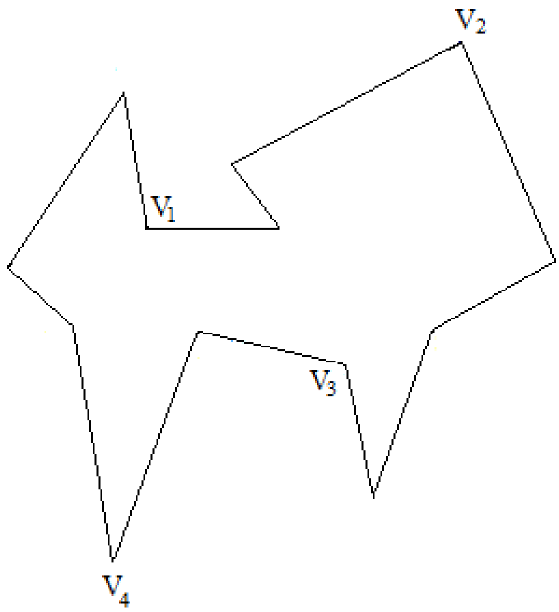
En los dibujos anteriores, tenemos en el primero, una galería con 13 vértices y 1 vigilante y otra, con 6 vértices y 2 vigilantes, mientras que en el segundo dibujo, hay una galería de 6 vértices que puede ser vigilada por un sólo guardián y otra también con 6 vértices, que va a necesitar 2. Entonces, ¿cómo se va a poder dar un número de vigilantes, en función del número de vértices?, ¿cómo se puede encontrar esa fórmula?

Pues el caso es que sí, se encontró la fórmula. La relación que encontró Chvátal en 1975, es que cualquier galería de ***N*** vértices, por muy enrevesado que sea, se puede vigilar siempre con $\lfloor \boldsymbol{N}/\mathbf{3} \rfloor$ guardianes. El número que escribimos sí es la **parte entera, por defecto,** de ***N*/3** ese número, esto es, que si *N*/**3** nos sale con decimales, lo truncamos y nos quedamos con su parte entera (es el mayor entero, menor que ***N***). Por ejemplo, cualquier galería de 13 vértices, sea como sea, necesitará como máximo, 4 vigilantes (13/3 = 4’33333333…)

La del dibujo anterior de la estrella de 13 puntas necesita sólo 1, **no** es posible encontrar ninguna que necesite más de 4, eso es lo que nos asegura el **Teorema de la Galería de Arte** de Chvátal. Eso y que siempre es posible encontrar una galería con ***N*** vértices que necesite exactamente $\lfloor \boldsymbol{N}/\mathbf{3} \rfloor$ guardianes.

En la figura siguiente vemos un ejemplo de una galería de 13 vértices, que se puede vigilar, incluso de dos formas distintas, con 4 vigilantes.





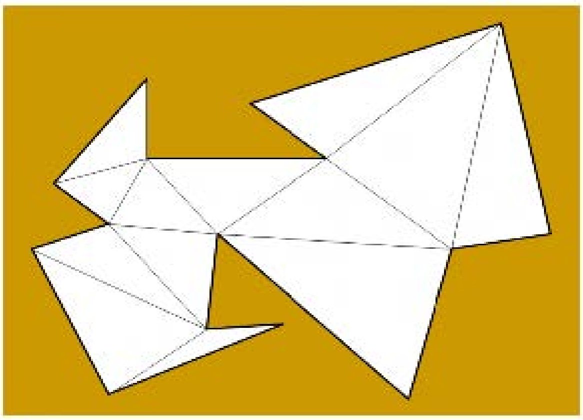
Aunque el mérito de encontrar la fórmula que relacionara el número de vértices del polígono con el número máximo de guardianes que se necesitarían para vigilarlo es de Chvátal, ha sido la demostración de este hecho dada por Fisk en 1978 la que más ha trascendido por su elegancia y sencillez.

Vamos a contar la demostración de Fisk porque es concisa, sencilla, brillante y hermosa.

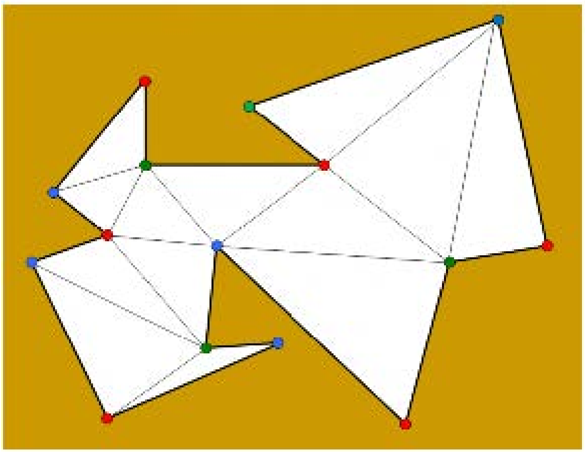
Lo primero que observa Fisk es que un triángulo, sea como sea, sólo necesita siempre un vigilante en uno de sus vértices. Pues bien lo que propone hacer es, dividir la galería en triángulos, asegurar la vigilancia en cada unos de esos triángulos y con ello tendrá asegurada la vigilancia del polígono completo.

En primer lugar, lo que hay que hacer es triangular el polígono ¿Cómo? Añadiendo diagonales interiores uniendo vértices no consecutivos del polígono, **siempre que no corten a otra diagonal ya dibujada o a la frontera del polígono**.

- Todo polígono simple admite siempre al menos una triangulación.
- Toda triangulación de un polígono simple con *n* vértices consiste en exactamente ***n* – 2 triángulos.**
- Cada triangulación de un polígono simple de *n* vértices usa ***n* – 3 diagonales**.



Ahora vamos a asignar colores a los vértices del polígono respetando únicamente una regla: **dos vértices con el mismo color no pueden estar unidos en el dibujo de la triangulación que hemos hecho del polígono**. Respetando esta regla, Fisk demuestra que se puede colorear la triangulación del polígono con 3 y sólo 3 colores.



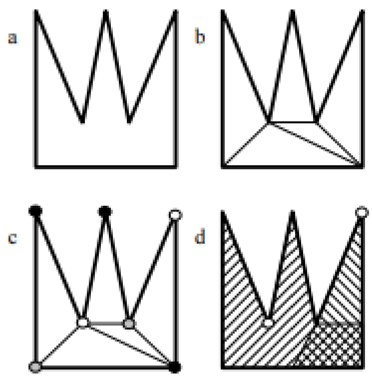
Contamos a continuación cuántos vértices hay de cada uno de los 3 colores en la triangulación del polígono. En el ejemplo que estamos viendo, tenemos 5 vértices azules, 6 vértices rojos, y 4 vértices verdes. Elegimos el color que menos veces aparece de los 3, en esto caso el verde, y colocamos un vigilante en cada uno de los 4 vértices verdes y ya está todo el polígono vigilado ¿Por qué? Pues porque todos los triángulos del polígono tienen que tener un vértice verde (en realidad, todos los triángulos tienen un vértice de cada uno de los colores) y como en todos los vértices verdes hay un vigilante, todos los triángulos estarán vigilados.

Es maravillosa la demostración.

Bueno, queda apuntar un detalle ¿Cómo sabemos que el color que menos veces aparece de la triangulación siempre aparece como máximo $\lfloor \boldsymbol{N/3} \rfloor$ veces? Pues por el **Principio del Palomar.** Supongamos que los vértices son palomas y los colores, 3 palomares. Asignar colores a los ***N*** vértices se puede interpretar como asignar las ***N*** palomas a uno de los 3 palomares. Pues ya está, uno de los 3 palomares como mucho, tiene ***N*/3** palomas. Porque si los tres tuvieran más de ***N*/3** palomas, la suma de las 3 cantidades sería superior a ***N***.

Lo que sabemos entonces a partir de este teorema es que, sea como sea, el polígono de ***N*** vértices que nos propongan, como máximo, vamos a necesitar $\lfloor \boldsymbol{N/3} \rfloor$ vigilantes para vigilarlo. Eso sí, hay veces que necesitaremos menos, y otra en que necesitaremos exactamente $\lfloor \boldsymbol{N/3} \rfloor$.

EJEMPLO 1:

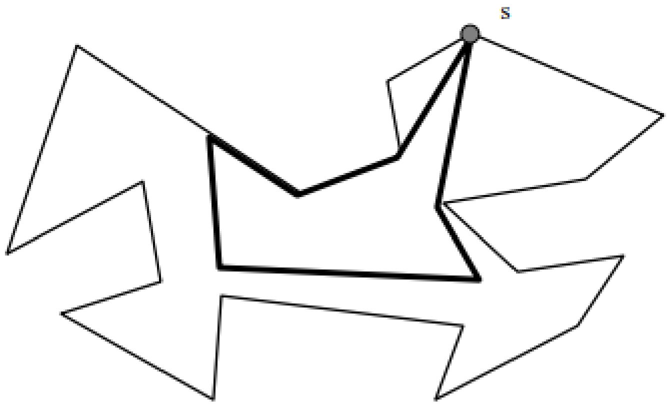


Posición de los guardias necesarios

La figura anterior muestra los pasos para resolver un polígono con n = 7 (a), el cual debe necesitar 2 guardias como máximo. El polígono es triangulado (b) y se colorean los vértices de cada triángulo (c), lo que arroja tres vértices negros, dos grises y dos blancos. Se elijen uno de estos 2 últimos (en el dibujo los blancos) y se muestra el área vigilada por cada uno (d).

Este problema de la Galería de Arte ha dado lugar a una inmensa cantidad de problemas geométricos relacionados, simplemente con modificar algunas de las condiciones: Permitiendo que los vigilantes se muevan; Obligando a que cada vigilante esté controlado por otro de sus compañeros en todo momento; Restringiéndose a un ángulo de visibilidad (pensando en focos e iluminación); Permitiendo que se atraviesen paredes (si pensamos en routers)… Todos problemas muy sencillos de plantear pero la mayoría muy difíciles de resolver.

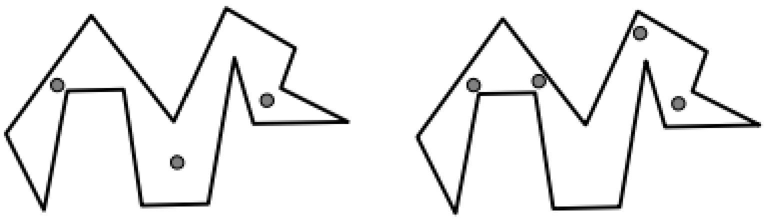
Por ejemplo ya que la vigilancia de las salas de un museo sigue cuando sus puertas se cierran al público. ¿Qué ruta debe seguir un vigilante en su ronda nocturna? El problema puede plantearse así: Dado un polígono *P* hallar el camino cerrado *C* de longitud mínima tal que cada punto de *P* sea visible desde algún punto de *C*. Este camino mínimo recibe el nombre de **Ruta del vigilante**



Ruta del vigilante con origen en el punto s

Si se especifica cuál debe ser el punto de partida (y llegada) del vigilante, Chin y Ntafos han diseñado algoritmos eficientes para resolver el problema, pero éste permanece abierto si no se conoce el punto de partida.

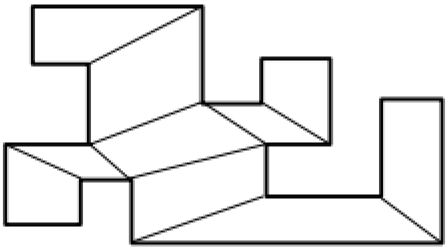
Si los ladrones neutralizan uno de los guardias que vigilan una sala, podrán "trabajar" tranquilamente en la zona controlada exclusivamente por ese guardia. Es interesante, por tanto, pedir que cada guardia sea vigilado al menos por otro guardia. Así llegamos a los denominados guardias vigilados (o w-guardias)



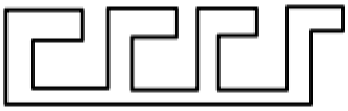
Un polígono con 3 guardias y 4 *w-guardias*

Se ha demostrado que $\lfloor 2n/5 \rfloor$ w-guardias son siempre suficientes, y necesarios, para vigilar un polígono de *n* lados.

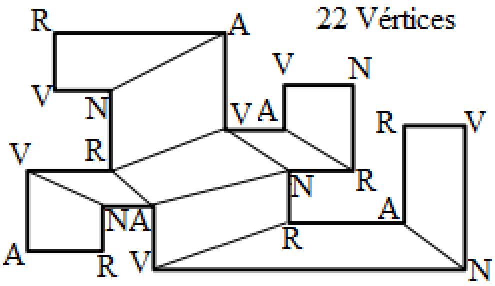
También se ha estudiado el problema para polígonos ortogonales (de lados paralelos o perpendiculares) que son la mayoría de las galerías de arte o museos tradicionales, de *n* vértices demostrando que el nº de guardias y w-guardias son $\lfloor n/4 \rfloor$ y $\lfloor n/3 \rfloor$ respectivamente. **La herramienta fundamental para trabajar sobre polígonos ortogonales no es la triangulación, sino la cuadrangulación o descomposición en cuadriláteros convexos** (desde cualquier vértice del cuadrilátero se puede ver todo del mismo; notar que, cuando se triangulariza la galería, el número de vigilantes es $\lfloor n/\mathbf{3} \rfloor$ y ahora que se cuadranguliza **es** $\lfloor n/\mathbf{4} \rfloor$).



Cuadrangulación de un polígono ortogonal

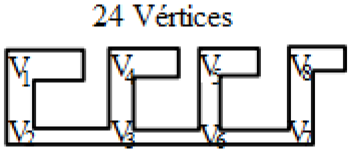


Polígono con $\lfloor n/3 \rfloor$ *w-guardias*



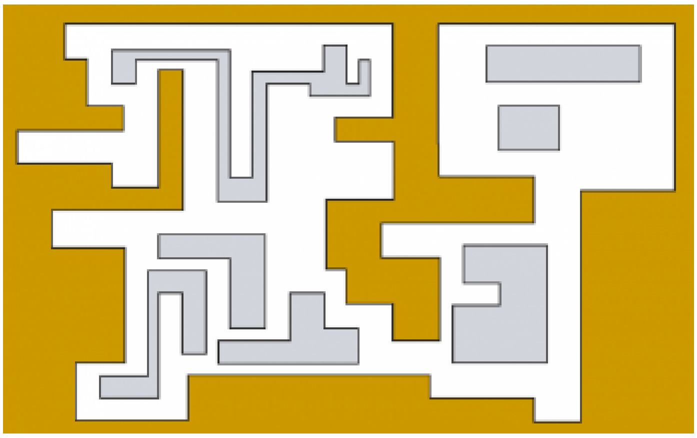
5 A, 5 N, 6 R, 6 V

$$\frac{22}{5} = 5.5 \qquad \left\lfloor \frac{22}{5} \right\rfloor = 5$$



$$\left\lfloor \frac{24}{3} \right\rfloor = 8$$

Otra de las generalizaciones que se están estudiando es el caso de las galerías de arte con “agujeros”, es decir, con zonas interiores que impiden la visibilidad de los guardas (paredes, habitaciones interiores, etc). Se han obtenido muchos resultados para galerías con “agujeros”, ya sean de formas poligonales generales, ortogonales

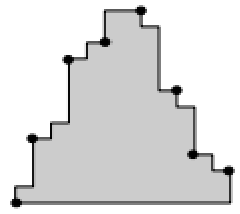


La siguiente tabla muestra los resultados actuales para los recintos generales para distintas galerías

Problema	**Polígono**	**Posición**	**Guardia**	**Número**
Galería de Arte	simple	interior	vértice	$\lfloor n/3 \rfloor$
Fortaleza	simple	exterior	punto	$\lceil n/3 \rceil$
Patio de Prisión	simple	int. y ext.	vértice	$\lceil n/2 \rceil$
Patio de Prisión	ortogonal	int. y ext.	vértice	$[\lceil 5n/16 \rceil, \lfloor 5n/12 \rfloor + 2]$
Polígonos ortogonales	ortogonal simple	interior	vértice	$\lfloor n/4 \rfloor$
Polígono ortogonal con agujeros	ortogonal con h agujeros	interior	vértice	$\lfloor n/4 \rfloor$
Polígonos con agujeros	polígonos con h agujeros	interior	punto	$\lfloor (n+h)/3 \rfloor$

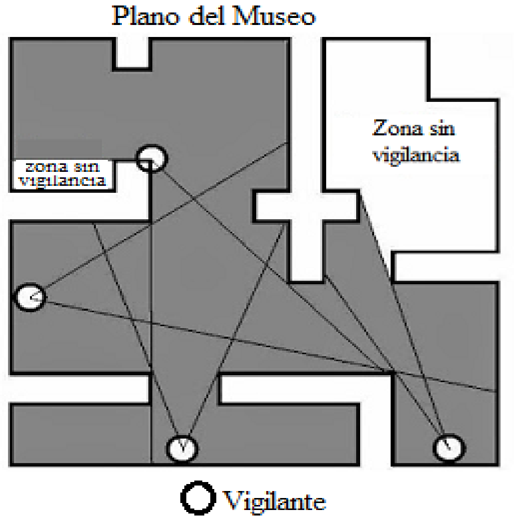
EJEMPLO 2:

La figura siguiente muestra una prisión ortogonal de 24 vértice que los 8 vigilantes deben vigilar tanto el interior como el exterior de la misma

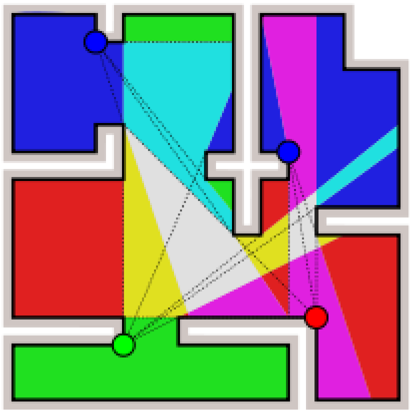


Prisión ortogonal

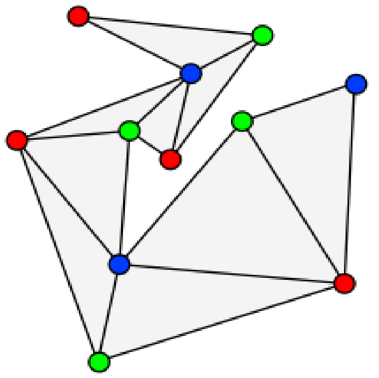
EJERCICIO 1: Recolocar las cuatro cámaras para que todo el museo quede completamente vigilado.



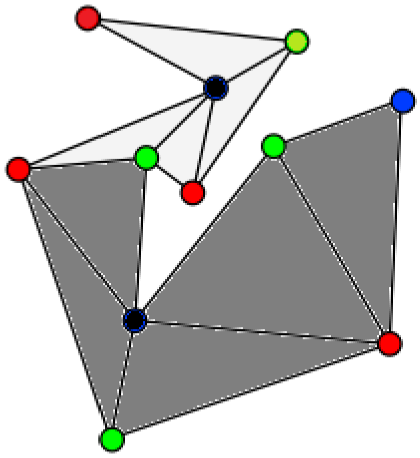
SOLUCIÓN:



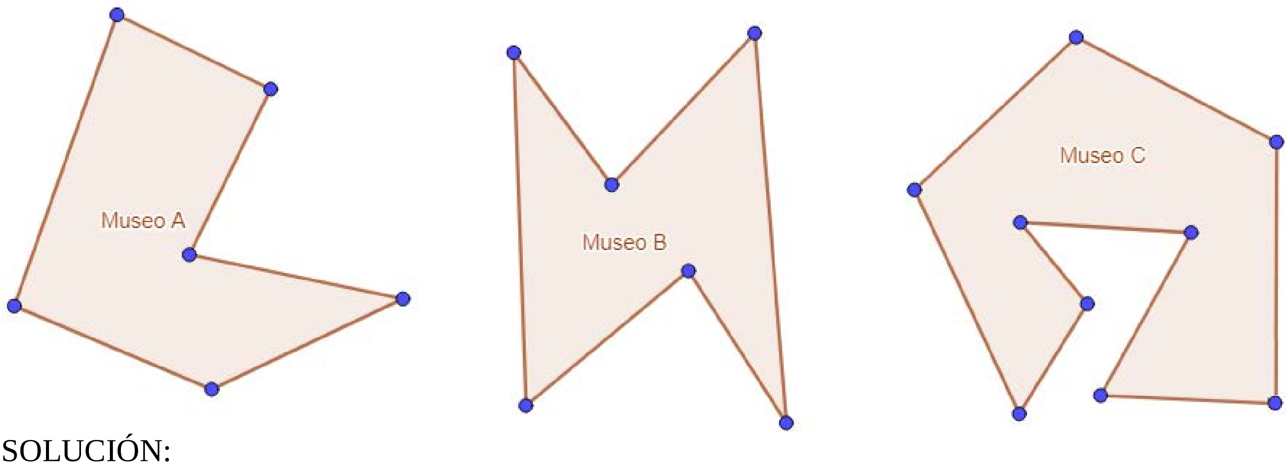
EJERCICIO 2: En la siguiente figura vemos un polígono con sus vértices coloreados, que parece indicar que son necesarios 3 guardias (3 vértices azules) para vigilarlo, sin embargo esta disposición no es óptima. Buscar una solución mejor



SOLUCIÓN: Basta colocar 2 guardias en los vértices negros



EJERCICIO 3: ¿Cuántos vigilantes son necesarios par los Museos A, B y C?



SOLUCIÓN:
En A: 1; en B: 2 y en C: 2