PROGRESIONES Y OTRAS SUCESIONES

Elena Gil Clemente
Profesora Matemáticas
Colegio Sagrado Corazón
Pablo Neruda 35
50018-Zaragoza
elena@fsbarat.org

PROGRESIONES Y OTRAS SUCESIONES

Elena Gil Clemente
Profesora Matemáticas
Colegio Sagrado Corazón
Pablo Neruda 35
50018-Zaragoza
elena@fsbarat.org

1. Para empezar un ejemplo curioso. La sucesión de Fibonacci.

A finales del siglo XII, vivió en Bugía, una ciudad del norte de África, Leonardo de Pisa, hijo de Bonaccio, responsable de aduanas de la ciudad, más conocido por Fibonacci. Educado por un tutor árabe, aprovechó sus viajes comerciales por todo el Mediterráneo para entablar contacto con los matemáticos más notables de la época.
De su deseo de poner en orden todo cuánto había aprendido de aritmética y álgebra, y de brindar a sus colegas comerciantes un potente sistema de cálculo, cuyas ventajas él había ya experimentado, nace, en 1202, el **Liber Abaci**, la primera Summa matemática de la Edad Media.

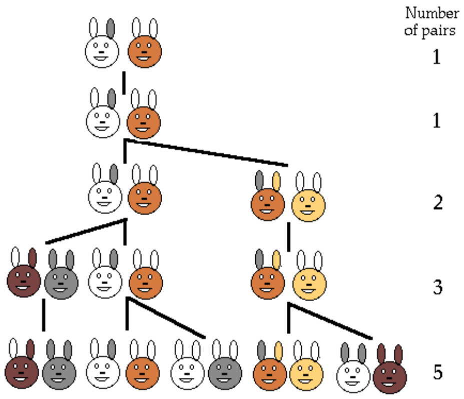
En él aparecen por primera vez en Occidente, los nueve cifras hindúes y el signo del cero (*zéphirum* para los árabes). Leonardo de Pisa brinda en su obra reglas claras para realizar operaciones con estas cifras tanto con números enteros como con fracciones, pero también proporciona la regla de tres simple y compuesta, normas para calcular la raíz cuadrada de un número, así como instrucciones para resolver ecuaciones de primer grado y algunas de segundo grado.

Pero Fibonacci es más conocido entre los matemáticos por una curiosa sucesión de números: que colocó en el margen de su Liber Abaci (capítulo XII, séptima parte) junto al conocido "problema de los conejos" El problema en lenguaje actual diría:

> *"Una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil, a partir de ese momento cada vez engendra una pareja de conejos, que a su vez, tras ser fértiles engendrarán cada mes una pareja de conejos. ¿Cuántos conejos habrá al cabo de un determinado número de meses?."*

***Ejercicio**: calcula el número de parejas de conejos que habrá al cabo de un mes de dos meses,… hasta de 4 meses*

SOLUCIÓN:



-Al final del primer mes, solo hay una pareja de conejos

-Al final del segundo mes se reproducen luego tenemos dos parejas de conejos

-Al final del tercer mes, la primera pareja vuelve a reproducirse: tenemos ahora tres parejas

-Al final del cuarto mes, la primera pareja vuelve a reproducirse y la pareja nacida hace dos meses se reproduce por primera vez. Tenemos ahora cinco parejas

-Y así sucesivamente.

***Ejercicio**: continúa con lo que pasará en el quinto mes y en el sexto mes. Escribe la serie numérica correspondiente al número de parejas*

SOLUCIÓN:

Nos encontramos pues la serie:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 …,

¿Puedes ver qué ley general siguen todos los elementos de esta serie?

Es fácil ver que cada uno es la suma de los dos anteriores. Es decir si la continuamos tendríamos:

1,1,2,3,5,8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987 ..

Es la famosa **Sucesión de Fibonacci**

¿Por qué es tan famosa? Porque los números de la sucesión de Fibonacci, nos los encontramos en un gran número de fenómenos naturales, hasta el punto que sorprende a los biólogos y se ha llegado a llamarla la “sucesión ecológica”

- La distribución de las hojas alrededor del tallo de las plantas se produce siguiendo secuencias basadas exclusivamente en los números. Cuenta por curiosidad el número de pétalos que tienen las margaritas y otras flores y a menudo te encontrarás con números de la sucesión de Fibonacci.
- el número de espirales en flores y frutos también se ajustan a los términos de esta sucesión.
-cualquier variedad de piña presenta siempre un número de espirales que coincide con dos términos de esta sucesión: 8 y 13 o 5y 8

Parece que el mundo vegetal tenga programado en sus códigos genéticos del crecimiento los términos de la sucesión de Fibonacci.

También en el arte se ha intentado imitar la sucesión de Fibonacci. Por ejemplo en las columnas del atrio del Santuario de Nuestra Señora de Torreciudad (Huesca), cada disco sobresale una longitud igual a la suma de los dos anteriores.

2. Algo de teoría.

Una **sucesión** es un conjunto de números dados ordenadamente de modo que se puedan numerar: primero, segundo, tercero…

A los elementos de la sucesión de les llama **términos** y se suelen designar mediante una letra con los subíndices correspondientes a los lugares que ocupan en la sucesión:

$$a_1,\ a_2,\ a_3\ ,a_4\ ,a_5\ ,a_6 ....$$

Algunas sucesiones se construyen siguiendo un cierto **criterio**. Es el caso de la sucesión de Fibonacci, que acabamos de estudiar. Cada término se construye sumando los dos anteriores. Otras sucesiones no siguen ningún criterio, como la sucesión de los números primos. Si conocemos el criterio por el que se forma una sucesión podemos calcular todos los términos de ella que deseemos

> ***EJERCICIO***: *Encuentra el criterio por el que se han formado las siguientes sucesiones y añade tres términos más a cada una*

a) 1,4,7,10,13….
b) 1,4,9,16,25…
c) 2,6,18,54,162…
d) 1,-2,4,-8,16,-32…
e) 1,1,2,3,5,8…
f) 210,180,150,120..
g) 1,4,8,11,22,25,50…

En ocasiones podemos encontrar una expresión que sirva para obtener un término cualquiera de la sucesión con solo saber el lugar que ocupa, sin tener que conocer los términos anteriores. Esto es muy útil si queremos conocer términos avanzados de la sucesión. A esta expresión se le llama **término general de la sucesión** y se representa por a_n.
Por ejemplo, el término general de la sucesión a) es $a_n = 3n - 2$

> ***EJERCICIO***. *Encuentra el término general de las sucesiones anteriores (la e y la g no tienen o es difícil de obtener)*

En otros casos los términos de las sucesiones se forman a partir de los términos anteriores. Se dice que tienen una **ley de recurrencia.** Es el caso de la sucesión de Fibonacci, en la que :

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ siendo } a_1 = 1, a_2 = 1$$

En el caso de una ley de recurrencia siempre hay que dar el valor de los términos a partir de los cuáles se empieza a construir.

> ***EJERCICIO***. *Encuentra le ley de recurrencia de las siguientes sucesiones:*

a) 1,-4,5,-9, 14, -23….
b) 1,2,3,6,11…
c)

Nota: la sucesión de Fibonacci también tiene una fórmula de término general que es difícil de obtener, aunque no de comprobar que se cumple en sus primeros términos:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Para practicar…

Escribe los seis primeros términos de las siguientes sucesiones:

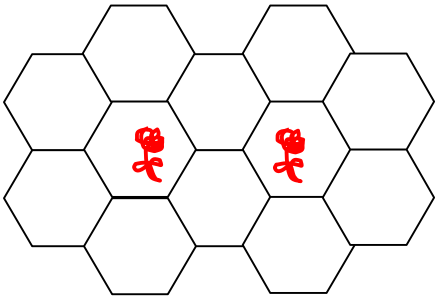
a)Cada término se obtiene sumando 5 al anterior. El primero es –4
b)El primer término es 16. Los demás se obtienen multiplicando el anterior por 0.5
c)El primer término es 34, el segundo 10 y los siguientes la semisuma de los dos anteriores
d)El primero es 2. Cada uno de los siguientes se obtiene invirtiendo el anterior

Escribe el término general o la ley de recurrencia de aquellas sucesiones que sea posible.

Nota: si te ha tenido interesado el tema de cómo encontrar un criterio para encontrar los términos siguientes de una sucesión, dados unos cuantos te gustará leer o ver *"Los crímenes de Oxford"* (Guillermo Martínez escritor del libro Alex de la Iglesia director de la película), donde la investigación se basa precisamente en estas sucesiones.

3. Progresiones Aritméticas.

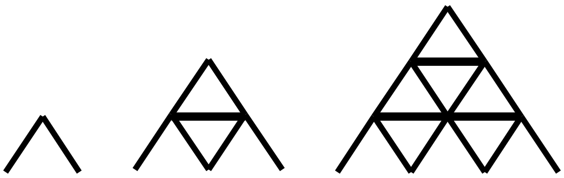
Problema 1
Para embellecer un paseo recto, se coloca, a lo largo de su línea central, una fila de jardineras hexagonales, rodeadas de baldosas de la misma forma.
Se desea saber el número de baldosas necesarias para colocar una hilera de 20 jardineras. ¿Cuántas baldosas se necesitan para n jardineras?



Observa que para la primera jardinera se necesitan 6 baldosas y para cada una de las siguientes 4 más que para la anterior.

Problema 2
Sobre el suelo de una habitación se quiere construir un castillo de naipes de 15 alturas. ¿Cuántos naipes hay en el piso bajo? ¿y en el piso bajo de un de un castillo de n pisos?

Observa que para el primer piso hacen falta dos naipes, para el segundo piso 5 naipes y para cada piso tres naipes más que para el piso anterior.



Si escribimos las sucesiones correspondientes a:

- el número de baldosas para una jardinera para dos, para tres….
- el número de naipes del piso bajo de un castillo de un piso, de dos pisos, de tres pisos….
-

Nos daremos cuenta de que en ellas cada término se encuentra sumando una cantidad fija al número anterior (4 en el primer caso y tres en el segundo). Las dos son progresiones aritméticas:

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que se pasa de un término al siguiente sumando un número fijo (positivo o negativo) al que se llama **diferencia** de la progresión.

Es muy sencillo obtener el **término general de una progresión aritmética**.: en el primer ejemplo si quiero obtener el término 15 deberé dar 14 pasos y en cada paso sumo 4 baldosas.

$$a_{15} = a_1 + 14.d$$

En general:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \text{ ya que para pasar de } a_1 \text{ a } a_n \text{ damos } n-1 \text{ pasos de amplitud d}$$

si queremos calcular el término general a partir de un término cualquiera de la sucesión , no del primero, basta con darse cuenta de que desde el término k que conocemos hasta el término general n damos n-k pasos de amplitud d y por tanto:

$$a_n = a_k + (n-k)d$$

Ejercicio sencillo:
Calcula el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

a) 8, 13,18,23....
b) –20,-15, -10, ...
c) 1, 3/2, 2, 5/2....
d) 7.7,6.6,5.5,...

¿Cómo se suma un número determinado de términos de una progresión aritmética?

Se cuenta que hace poco más de dos siglos, un maestro alemán que quería paz y tranquilidad en su clase propuso a sus alumnos de 5 años que calcularan la suma de todos los números del 1 al 100, confiando en que esto les tendría entretenidos un buen rato, en el que él podría al fin respirar. No cayó en la cuenta(no podía hacerlo dado la tierna edad del niño) que entre sus alumnos se encontraba Karl Friedich Gauss, más tarde apodado *"El príncipe de las matemáticas".* Gauss, aún no habían transcurrido unos minutos cuando contestó a su asombrado profesor:

5050.

¿Cómo había llegado a esta conclusión?

Muy fácil, una vez que a uno se lo cuentan: Gauss se dio cuenta de que:
1+100 = 2+99=3+98=....=50+51=101

Como en la suma de 1 a 100 hay 50 sumandos de este tipo la suma es:
50 x 101= 5050

¿Ingenioso o no?

Por cierto Gauss (1777-1855) fue uno de los matemáticos más relevantes de la historia, alemán para más señas. Su obra ha tenido mucha influencia en el desarrollo posterior de la ciencia matemática.

Esta idea que se le ocurrió a Gauss se puede extender a todas las progresiones aritméticas, y se expresa con más precisión matemática de la siguiente manera:

> ***"La suma de términos equidistantes de los extremos, en una progresión aritmética de n términos es siempre la misma. Si la progresión tiene un número impar de términos esta suma coincide con el doble del término central"***

Aplicando simplemente esta propiedad y discurriendo un poco podrás calcular las siguientes sumas:

Ejercicio: *Calcula las siguientes sumas:*

a)suma de los primeros 60 números impares
b)suma de los 25 primeros múltiplos de 3
c)suma de los 20 primeros términos de la sucesión: 5, 3, 1, -1...

d)suma de los primeros 15 términos de la sucesión: 1, 1.5, 2, 2.5, 3.....

En Matemáticas muchas veces tratamos de obtener razonadamente fórmulas que nos permitan realizar tareas mecánicas con más eficacia. Este es el caso de la suma de n términos de una progresión aritmética, para la que existe una fórmula cuya obtención vamos a razonar, y que una vez obtenida podemos aplicar sin más para poder seguir profundizando en nuestro estudio.

Fórmula para el cálculo de la suma de n términos de una progresión aritmética.

$$\boxed{S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) n}$$

Demostración (obtención razonada de la fórmula)

En una progresión aritmética de n términos los términos equidistantes de los extremos suman los mismo

a_k y a_{n-k} son equidistantes de los extremos a_1 y a_n. Veamos que suman lo mismo

$$\begin{aligned}
&a_k + a_{n-k+1} = \\
&a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k)d = \\
&a_1 + kd - d + a_1 + nd - kd = \\
&a_1 + a_1 + (n-1)d = \\
&a_1 + a_n
\end{aligned}$$

Una vez conocido esto, procedemos de la siguiente manera. Llamamos S_n a la suma que queremos calcular y la escribimos de dos maneras:

$$\begin{aligned}
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots a_{n-1} + a_n \\
S_n &= a_n + a_{n-1} + \dots\dots\dots + a_2 + a_1
\end{aligned}$$

Sumamos miembro a miembro las dos igualdades agrupando en paréntesis "innecesarios" y obtenemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots\dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Cada uno de estos paréntesis suma lo mismo por la propiedad antes enunciada. Por tanto

$$2S_n = (a_1 + a_n).n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

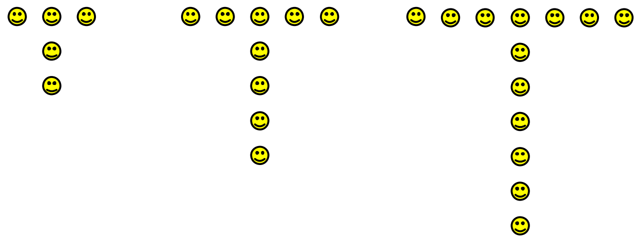
que era la fórmula que pretendíamos demostrar.

Una vez conocida y demostrada esta fórmula estamos en condiciones de resolver una gran variedad de problemas:

Para practicar…

1.¿Cuántos naipes se necesitan para construir un castillo de 62 pisos(record del mundo…)

2.Observa las figuras de cada caso y busca la fórmula que permita saber cuántos puntos tendrá una figura sabiendo el lugar que ocupa en la serie.



3.Una sucesión curiosa:

$1^3 = 1^2$

$1^3 + 2^3 = 3^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$

A la vista de estas igualdades puedes predecir el valor de los paréntesis en las dos siguientes?

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (\ \ )^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (\ \ )^2$

A la vista de lo anterior cuál sería el término vigésimo de la sucesión 1,9,36,100....¿y el término general?

4. PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Ejemplo 1. Un secreto a voces
A Luis y Aurora les han contado un secreto a las 9 de la mañana con la advertencia de que no se lo cuenten a nadie. ¿Está en la naturaleza humana la falta de discreción? El caso es que al cuarto de hora cada uno de ellos *solo* se o ha contado a tres amigos, eso sí de absoluta confianza, que al cabo de un cuarto de hora se lo cuentan a otros tres y así sucesivamente cada cuarto de hora. ¿Cuánta gente se enteró del secreto a las doce de la mañana? ¿Entiendes ahora la causa de que los rumores se propaguen tan rápidamente..?

En este caso (que por cierto es un clásico de la enseñanza de progresiones) si escribes la sucesión formada por todos el número de personas que se enteran del secreto cada cuarto de hora, te encontrarás con:

2, 6, 18 ,54, 162…..

Ahora que ya estás entrenado,¿observas alguna relación entre ellos? Efectivamente cada uno se forma a partir del anterior multiplicándolo por 3. nos encontramos ante una progresión geométrica.

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que se pasa de un término al siguiente multiplicando por un número fijo (mayor o menor que 1) al que se llama **razón** de la progresión.
Multiplicar en lugar de sumar complica bastante las operaciones, pero en esencia todo sigue igual que en las progresiones aritméticas.

¿Cómo obtenemos ahora el **término general de una progresión geométrica**: en el ejemplo si quiero obtener el término 21 (que son los cuartos de hora transcurridos entre las 9 y las 2) deberé dar 20 pasos y en cada paso multiplico por 3 el número de personas que se enteran

$$a_{21} = 2.3.3.........3 \text{ (multiplico 3 veinte veces)}$$
$$a_{21} = 2.3^{20}$$
$$\text{En general:}$$
$$a_n = a_1.r^{n-1}$$

Si queremos calcular el término general a partir de un término cualquiera de la sucesión , no del primero, basta con darse cuenta de que desde el término k que conocemos hasta el término general n damos n-k pasos de amplitud r y por tanto:

$$a_n = a_k.r^{n-k}$$

Ejercicio sencillo:
Calcula el término general de las siguientes progresiones geométricas

a) 2,6,18,54….
b) 4,8,16,32….
c) 1,1.5,1.25,1.125…
d) –3,6,-12,36….

Hay una clara diferencia entre las progresiones geométricas que tienen una razón mayor que 1 y las que tiene una razón menor que uno, pero positiva.
Piensa cuál es.

Para ilustrar lo que ocurre con **razones mayores que uno**, además del ejemplo del secreto a voces te proponemos otro ciertamente curioso:

Cada vez que plegamos por la mitad una hoja de papel duplicamos su grosor. Llega un momento en que no podemos *físicamente* hacerlo más. Supongamos que pudieras doblarla tantas veces como tú quisieras.

Comprueba que si la hoja de papel tiene 0.14 mm de grosor(ciertamente tan pequeña que tendemos a pensar que la hoja es un rectángulo plano), solo con 10 dobleces superarías el grosor del libro más gordo de tu biblioteca. Aún más con 22 dobleces el grosor sería superior a la altura de la torre Eiffel (321metros)

Y para ilustrar lo que ocurre con progresiones geométricas de **razón menor que 1 pero positiva** piensa lo siguiente:

Una rana da saltos en línea recta y desea atravesar una charca de 5 metros de radio, para conseguir comerse una sabrosa mosca que reposa en el otro lado. Tiene una limitación: después de dar lo que para ella es un enorme salto de 2 metros, en cada salto solo alcanza los 2/3 del anterior. ¿Podrá llegar al otro lado? ¿Contradice tu resultado el viejo refrán de "quien la sigue, la consigue" Más adelante volveremos sobre este problema.

¿Cómo se suma un número determinado de términos de una progresión geométrica?

No disponemos ahora de una anécdota tan bonita como la de Gauss, así que vamos a pasar rápidamente a la deducción razonada de una fórmula para ello.

$$\boxed{S = \frac{a_1 . r^n - a_1}{r - 1}}$$

Para demostrarla empezaremos, escribiendo la expresión de la suma, la multiplicaremos por r y más tarde restaremos ambas expresiones:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...a_{n-1} + a_n$$

Multiplicamos por r

$$r.S_n = a_1 .r + a_{2.} .r + a_3 .r + ...a_{n-1} .r + a_n .r$$

como un término multiplicado por la razón es igual al témino siguiente obtenemos

$$r.S_n = a_2 + a_3 + ...a_{n-1} + a_n + a_n .r$$

Restando obtenemos:

$$r.S_n - S_n = -a_1 + a_n .r$$

$$S_n .(r-1) = -a_1 + a_n .r$$

$$S_n = \frac{-a_1 + a_n .r}{r-1} = \frac{a_1 r^{n-1} .r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 .r^n - a_1}{r-1}$$

que es la fórmula que queríamos demostrar.

¿Cómo podemos sumar los términos de una progresión geométrica de razón menor que uno?

Volvamos al problema de la rana. La sucesión de términos formada por la longitud de cada salto que da la rana, es la siguiente:

2, 1.333, 0.8888, 0.592, 0.395, 0.263, 0,175, 0.117, 0.078, 0,052, 0,0346, 0.0231, 0.0154, 0.01, 0.0068…..
Es un sucesión claramente decreciente (sus términos son cada vez más pequeños).
¿Qué ocurre si voy sumando estos términos? Sumando los escritos arriba se obtiene:

5.5887

que queda muy lejos de los 10 metros de diámetro de la charca. Pero..¿y si seguimos sumando saltos? Con el salto siguiente obtendríamos

5.5887+0.00453= 5.59323

cosa que no es demasiado prometedora para la pobre rana. ¿Qué ocurre aquí? Efectivamente, lo que ya estás intuyendo. Como los saltos son cada vez más pequeños, por mucho que la esforzada rana salte un número ilimitado de veces <u>jamás logrará alcanzar el otro extremo de la charca</u>. ¿Contradice esto nuestro sentido común? Aquí tienes un buen material para pensar…

En matemáticas siempre pensamos en un forma de generalizar resultados obtenidos particularmente. ¿Hay alguna forma de calcular directamente el "tope" que tiene la suma ilimitada de términos de una progresión geométrica decreciente.? Afortunadamente sí, Aquí tienes el razonamiento.

$$S_n = \frac{a_1.r^n - a_1}{r-1} = \frac{a_1 - a_1,r^n}{1-r}$$

Como la progresión es decreciente

los términos $a_1.r^n$ son cada vez más insignificantes

respecto a $a_{1,}$

y podemos sustituirlos por 0

$$S_n = \frac{a_1}{1-r}$$

Esta es la fórmula que podemos emplear de ahora en adelante

¿Cuál es el tope para nuestra rana?

Por tanto vemos que con las progresiones geométricas pasan cosas verdaderamente llamativas. Te proponemos algunos

Para practicar…

1.Leyenda del inventor del ajedrez

Una leyenda cuenta que el inventor del ajedrez presentó su invento a un príncipe de la India. El príncipe quedó tan impresionado que quiso premiarle generosamente, para lo cual le dijo: "Pídeme lo que quieras, que te lo daré".

El inventor del ajedrez formuló su petición del modo siguiente:
"Deseo que me entregues un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, dieciséis por la quinta, y así sucesivamente hasta la casilla 64".
La sorpresa fue cuando el secretario del príncipe calculó la cantidad de trigo que representaba la petición del inventor, porque toda la Tierra sembrada de trigo era insuficiente para obtener el trigo que pedía el inventor.
¿Cuántos trillones de granos de trigo pedía aproximadamente?

2. Un centurión le pidió al César *que le recompensara por su valentía. El César, mostrándole grandes montones de monedas, le dijo:"Puedes tomar un denario, mañana2, al día siguiente, 4, al otro 8. Así sucesivamente, cada día duplicarás lo del anterior. Pero lo de cada día, deberás llevártelo tu solo y de una sola vez. Te permito usar un carro". Suponiendo que cada denario pesara 20 gramos y que lo máximo que consiguiera llevar en un carro fuera una tonelada,* ¿cuántos días duró la recompensa?,¿cuál fue el número de denarios de la última carretada?¿Era el César tan generosos como había prometido?

3. Un negocio rentable para años bisiestos
El día 1 de cierto mes, un amigo le propone a otro un trato: "Cada día de este mes tú me das 100000 euros y yo duplico el dinero que hay en esta caja, que a fin de mes te podrás llevar".El amigo pensó que le estaban tomando el pelo porque en la caja había ¡ 1 céntimo de euro! Pero comenzó a cuentas con la calculadora y sorprendentemente respondió: aceptó el trato , siempre y cuando me lo propongas dentro de una año exactamente. ¿En qué fecha pudo tener lugar esta conversación?

4. A vueltas con los bancos
Cuando en un banco ingresamos un capital, pongamos 1000 euros, éste nos ofrece un porcentaje anual de interés, pongamos el 4%. ¿Qué significa esto? Que al cabo de un año nuestro capital se ha convertido en

$$1000 + 4\% \text{ de } 1000, \text{ es decir } 1000 + \frac{4}{100}.1000 = 1000 + 40 = 1040.$$

$$\text{Escrito de otra manera } \left(1 + \frac{4}{100}\right).1000 = 1.04 \ . \ 1000$$

al finalizar el segundo año, el 4 % se aplica sobre estas 1040 pesetas, y obtenemos:

$$1040 + 1040.\frac{4}{100} = 1040.(1 + \frac{4}{100}) = 1040.1{,}04$$

Si colocamos estas cantidades seguidas:

1000, 1000.1,04, 1040.1.04…..

¿Te recuerdan a algo? Efectivamente son los términos de una progresión geométrica de razón 1.04.

Seguro que ahora eres capaz de saber, cuánto dinero tendremos al final del quinto año si no sacamos ningún dinero del banco esos años.

Así que las progresiones están muy presentes en los cálculos bancarios…

5. Algo de geometría

Construimos un cuadrado de lado 8 cm. Uniendo los puntos medios de los lados, obtenemos un cuadrado inscrito en él, en el que a su vez unimos los puntos medios de los lados para obtener otro cuadrado y así sucesivamente…

a)Halla las áreas de los seis primeros cuadrados de esta sucesión.¿Cuál será su término general?

b)Escribe la sucesión formada por las longitudes de los lados

c)Calcula la suma de las áreas de todos los cuadrados generados de esta forma

Seguro que al ser este uno de los temas del temario de 3º ESO, vuestros profesores os harán trabajar duro con los términos generales, el cálculo de términos, sumas… En esta sesión hemos pretendido, que veas ejemplos interesantes, a partir de los cuáles fue surgiendo la necesidad de construir una teoría que permita avanzar en los cálculos.