TALLER DE TALENTO MATEMÁTICO

HTTP://TTM.UNIZAR.ES/

GRAFOS

Carmen Fernández Grasa
C.P.I. La Jota (Zaragoza)

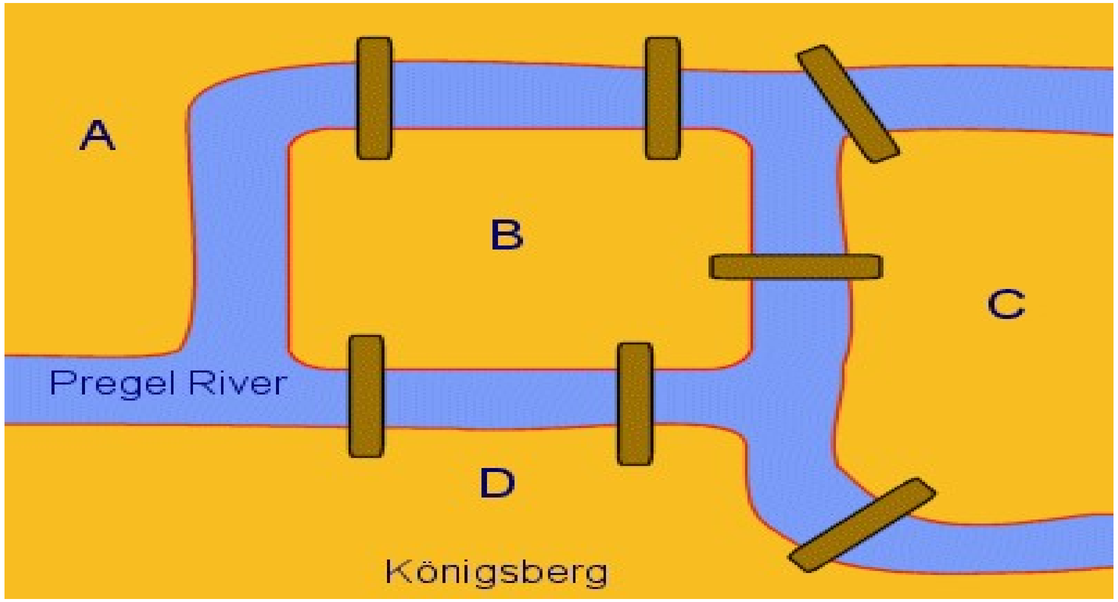
17 de diciembre de 2021

Vamos a pensar sobre GRAFOS

- ¿Qué es un grafo?
- Grafos Eulerianos
- Grafos de divisibilidad
- Grafos planos
- Grafos hamiltonianos
- Árboles

Problema inicial (problema 1)

- *En la ciudad de Koenigsberg, en Prusia, hay una isla, llamada Kneiphof B, rodeada por los dos brazos del río Pregel. Hay siete puentes que cruzan los dos brazos del río como se muestra en la figura. La cuestión es: ¿se puede realizar un paseo de tal forma que cruce todos y cada uno de estos puentes una sola vez".*



SOLUCIÓN 1

- Este problema fue resuelto de forma magistral por

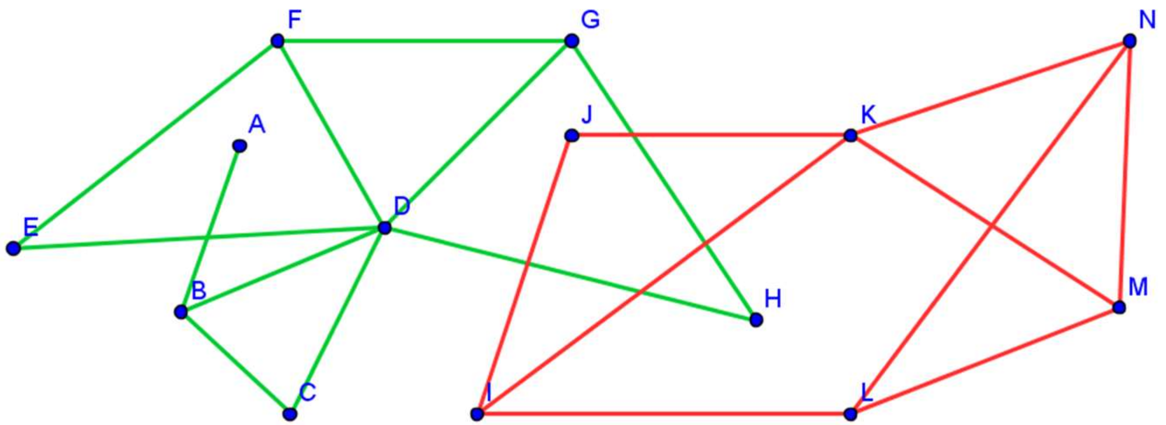
Leonhard Paul Euler

(Suiza 1707-Rusia 1783)

No solo presentó la solución a este problema sino que demostró un principio matemático generalizable a todos los grafos.

¿QUÉ ES UN GRAFO?

- Conjunto de vértices unidos entre si por arcos.

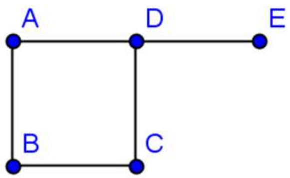


Aunque pueda parecer que son dos grafos, es uno pero **<u>disconexo</u>**.

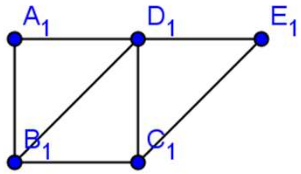
Nosotros vamos a trabajar con grafos **<u>conexos</u>**, es decir grafos en los que puedo encontrar un camino para ir de cualquier nodo a otro.
https://www.youtube.com/watch?v=ia5o_tOKZfU

Ejemplos de grafos 1

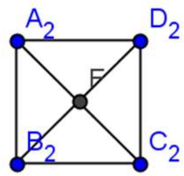
GRAFO 1



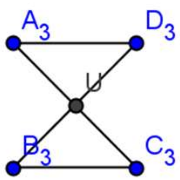
GRAFO 2



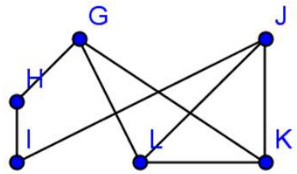
GRAFO 3



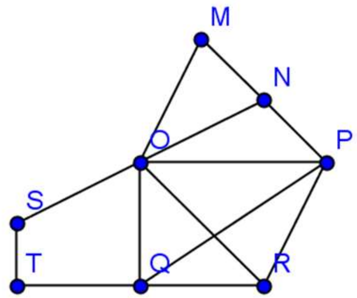
GRAFO 4



GRAFO 5

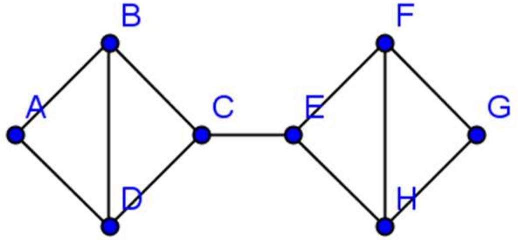


GRAFO 6

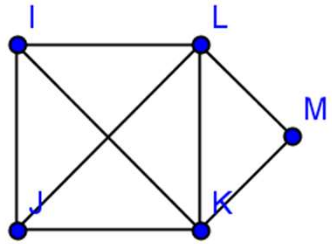


Ejemplos de grafos 2

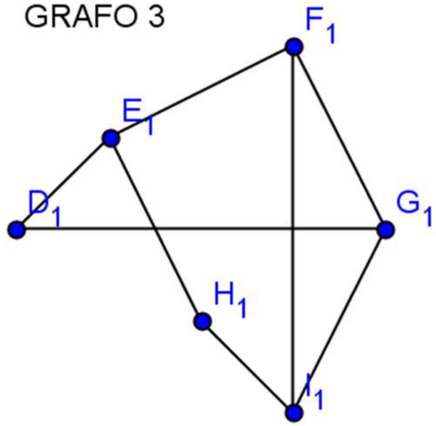
GRAFO 1



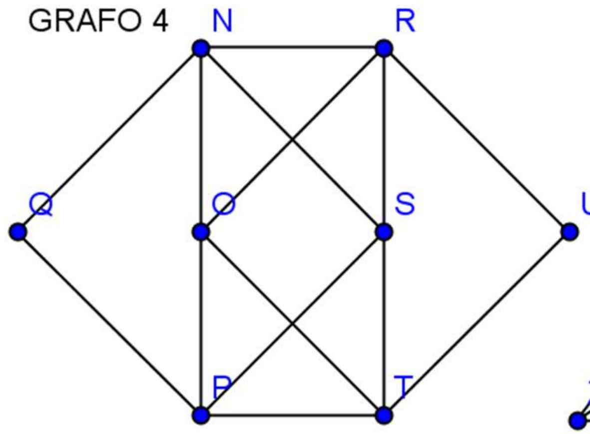
GRAFO 2



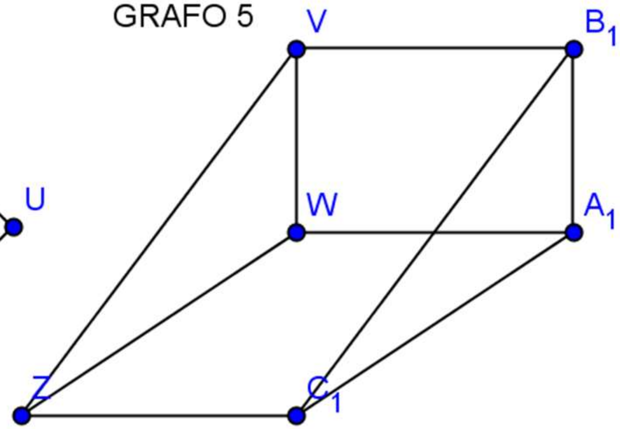
GRAFO 3



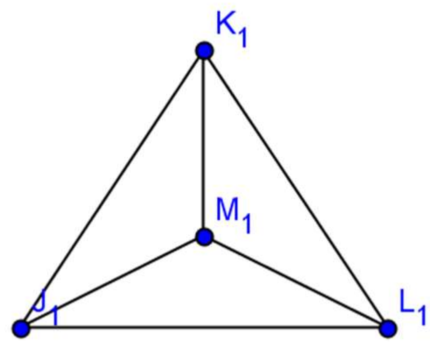
GRAFO 4



GRAFO 5

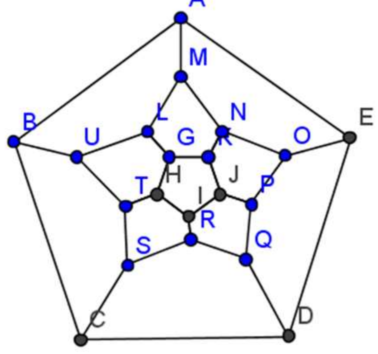


GRAFO 6

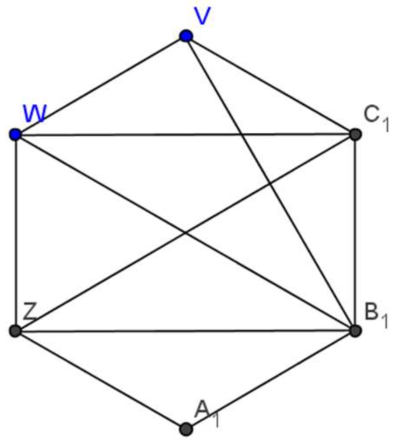


EJEMPLOS DE GRAFOS 3

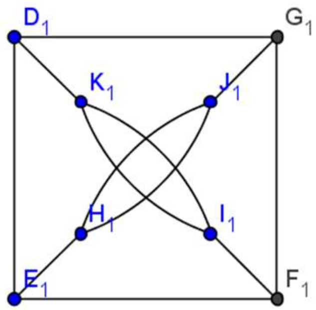
GRAFO 1



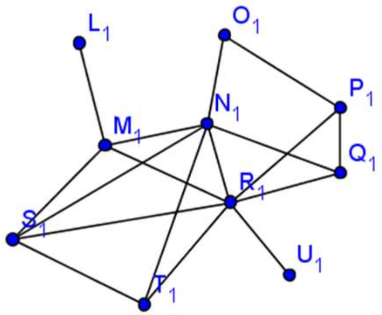
GRAFO 2



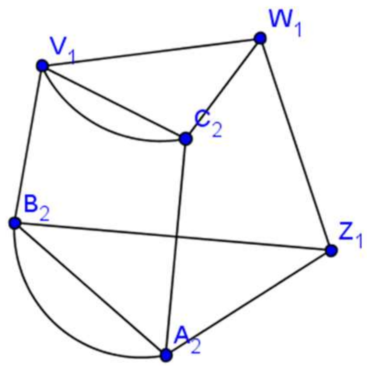
GRAFO 3



GRAFO 4

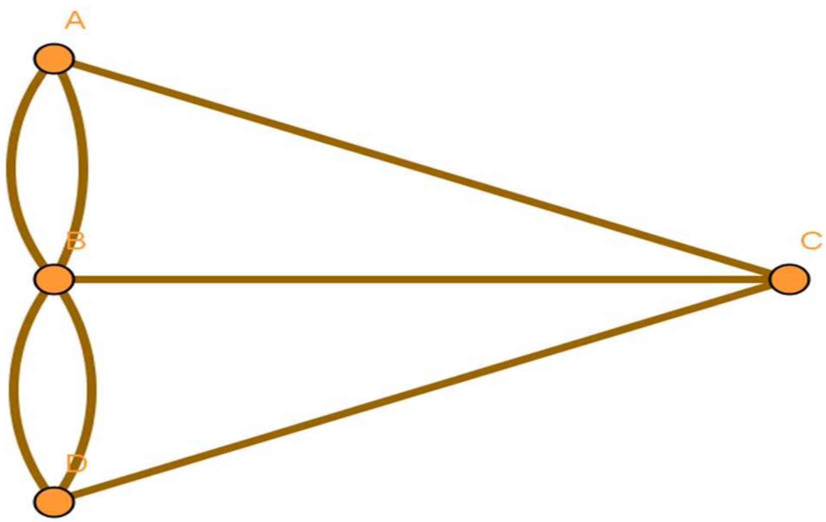


GRAFO 5



Solución 1:

Para resolver el problema lo modelizó en forma de grafo haciendo que cada trozo de tierra fuera un vértice y cada puente un arco de esta manera:



Y comprobó que era imposible.

¿Podrías decir por qué?

MODO DE RESOLUCIÓN

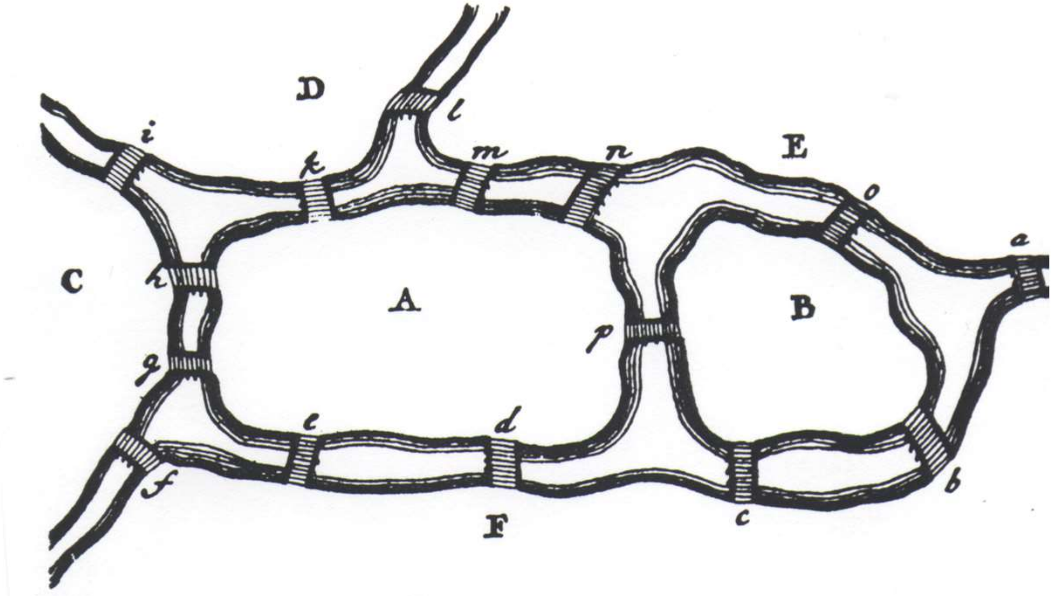
- Para resolver estos problemas los simplificamos usando grafos:

  - Trozo de tierra → nodo ó vértice
  - Puente → arco ó arista

- De esta manera podemos dibujar los nodos y los arcos de la forma que mas nos convenga.
- En esta ciudad si que podríamos encontrar fácilmente un camino que recorra todos los puentes una única vez:

MÁS DIFÍCIL TODAVÍA (PROBLEMA 2)

- ¿Podrías hacer lo mismo en esta ciudad?

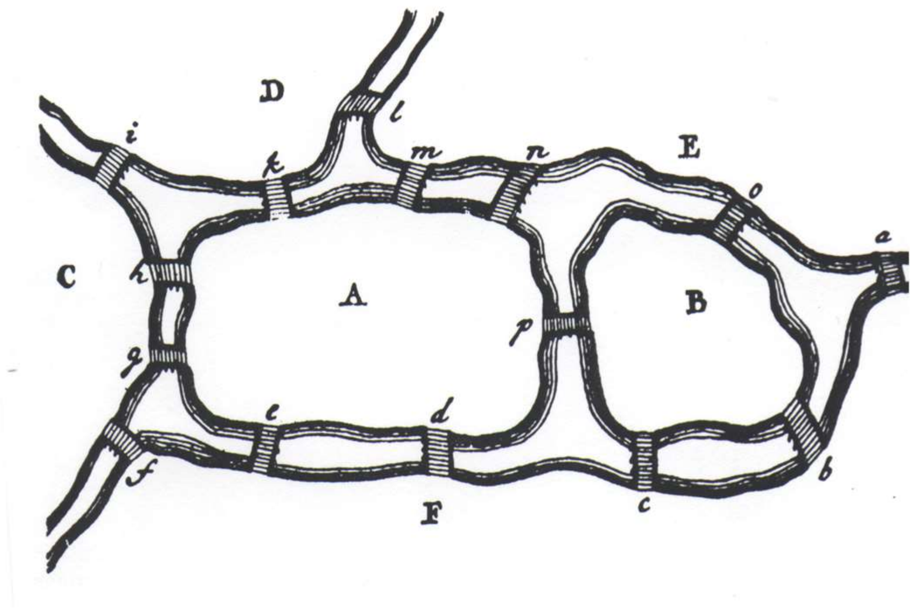


[Otros ejemplos interactivos]

SOLUCIÓN 2

Por ejemplo:

DiChAgCfFeAdFcBbFaEoBpAnEmAkDlE



¿Podrías encontrar otro camino?

Cuestión:

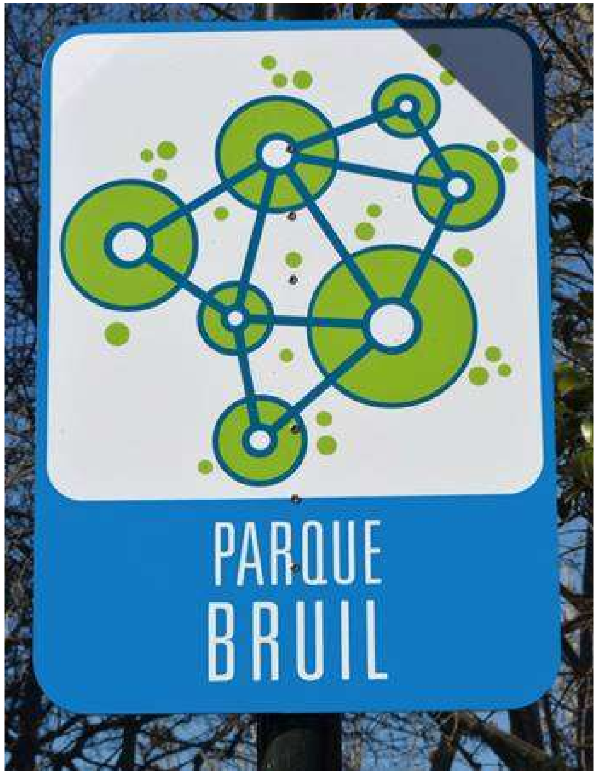
- ¿Qué diferencia hay entre una ciudad y la otra que hace que en una puedan recorrerse todos los puentes sin repetir y en la otra no?
  - Intenta hacer lo mismo con estos grafos a ver si lo consigues descubrir.

PISTA

¿Qué tienen de especial las islas D y E?

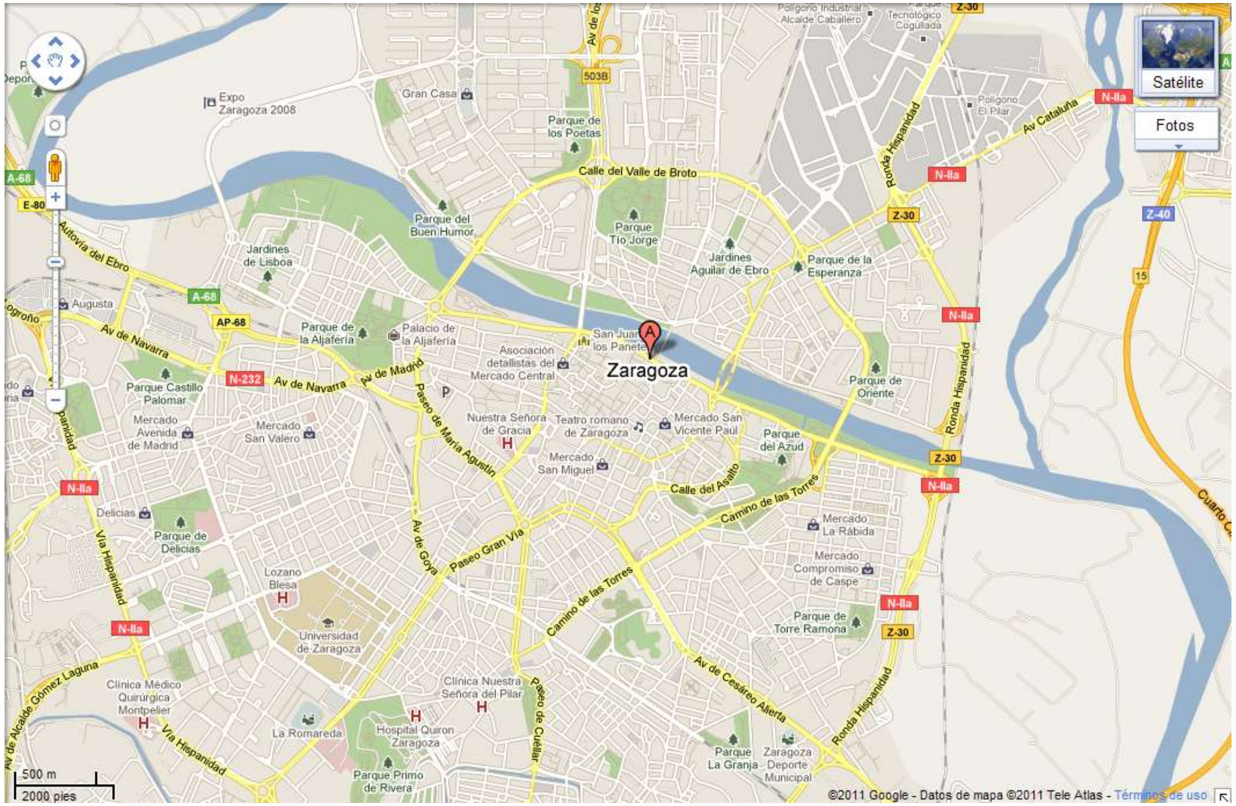
En nuestra ciudad

- Hay camino para recorrer todos los arcos en este grafo



Pregunta abierta

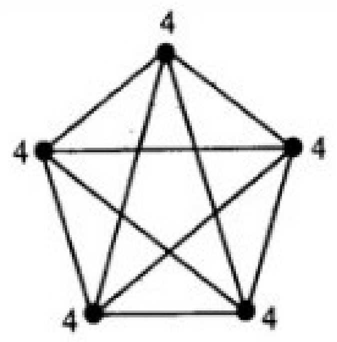
- ¿Podrías hacer esto en nuestra ciudad?
  - Cuida con el río Huerva, el río Gállego y con el Canal Imperial de Aragón.



Grafos eulerianos

- Un grafo se dice que es euleriano si existe un camino (sucesión de arcos y nodos) que recorre todos los arcos sin que se repita ninguno.

  - Con esta definición nuestro problema se reduce a averiguar si los grafos son eulerianos o no.

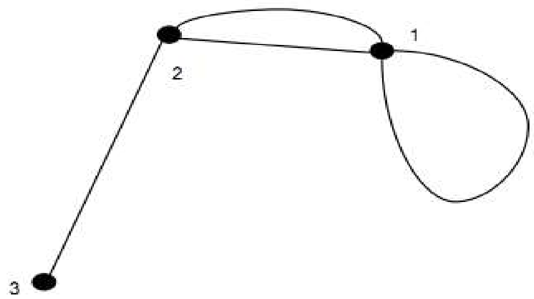


ÍNDICE DE UN VÉRTICE

- El índice de un vértice es el número de arcos que llegan o salen de él.

  - Si un vértice está aislado tiene índice 0.

  - Si en un vértice hay un bucle se suman 2 unidades al índice.



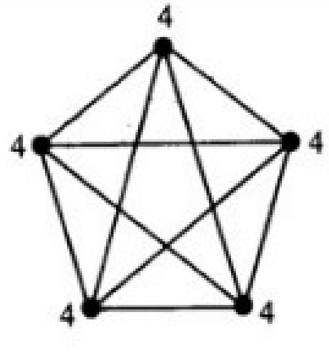
OBSERVACIÓN:

- Si nos fijamos bien en los índices de los vértices observamos que:

La suma de los índices de todos los vértices es igual al doble del número total de arcos.

- ¿Puedes comprobarlo?
- ¿Sabrías decir porqué?

TEOREMA



Un grafo es euleriano

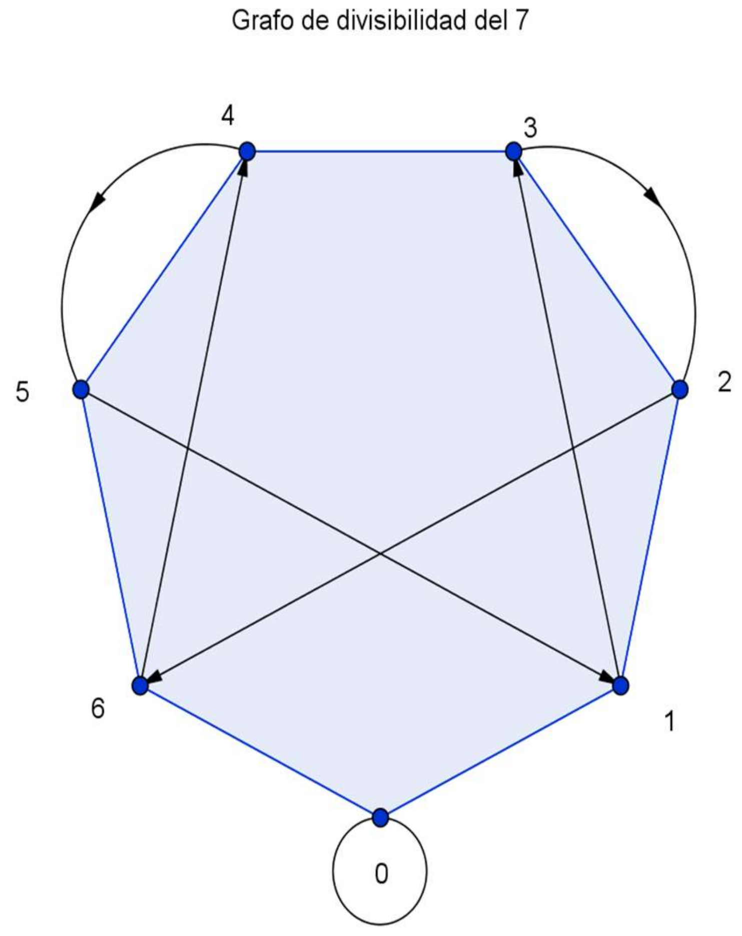
$\Updownarrow$

a lo sumo tiene dos vértices de índice impar

Euler 1736

GRAFOS DIRIGIDOS

Un grafo se dice que es <u>dirigido</u>
cuando cada arco o arista tiene una dirección.

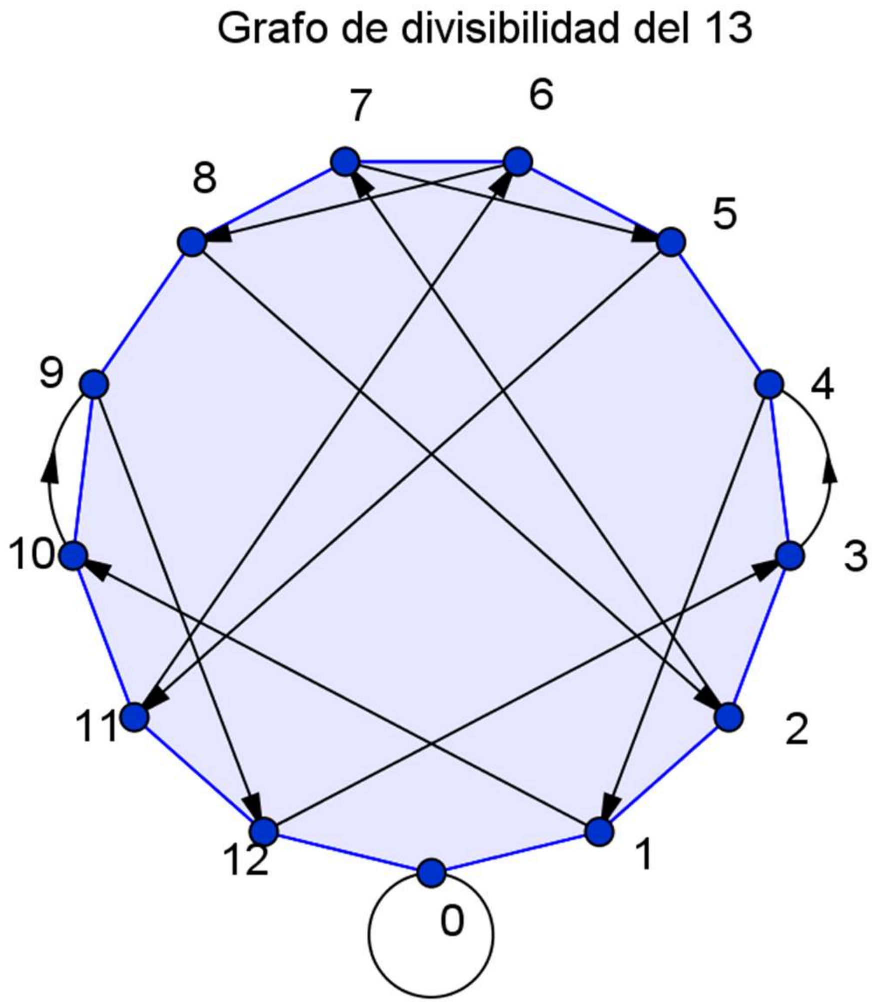


Grafos de divisibilidad

- Estos grafos ayudan a calcular el resto de una división sin dividir.
- Vídeo demostrativo
- Ejemplo:

5605:13

Resto =2



¿CÓMO FUNCIONAN LOS GRAFOS DE DIVISIBILIDAD?

- Se parte del 0
- Se avanzan tantos vértices del polígono en sentido positivo como indique la primera cifra
- Se recorre la arista que sale de ese vértice y no es del polígono.
- A partir de ese vértice se repite el proceso con la cifra siguiente.
- Se acaba cuando se avanza la cifra de las unidades.
- El resto es el número del vértice final.

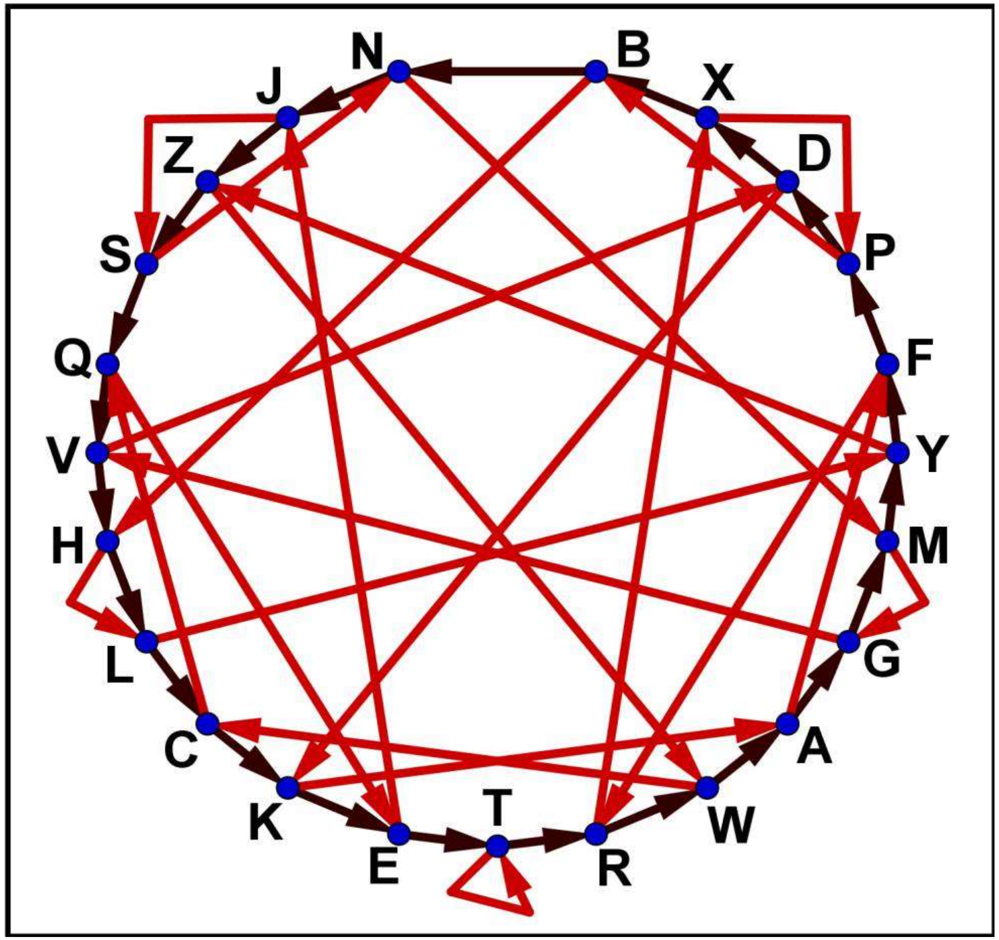
Ejemplos de grafos de divisibilidad

[Enlace a Geogebra]

En este enlace podéis encontrar los grafos de divisibilidad del 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19 y 23

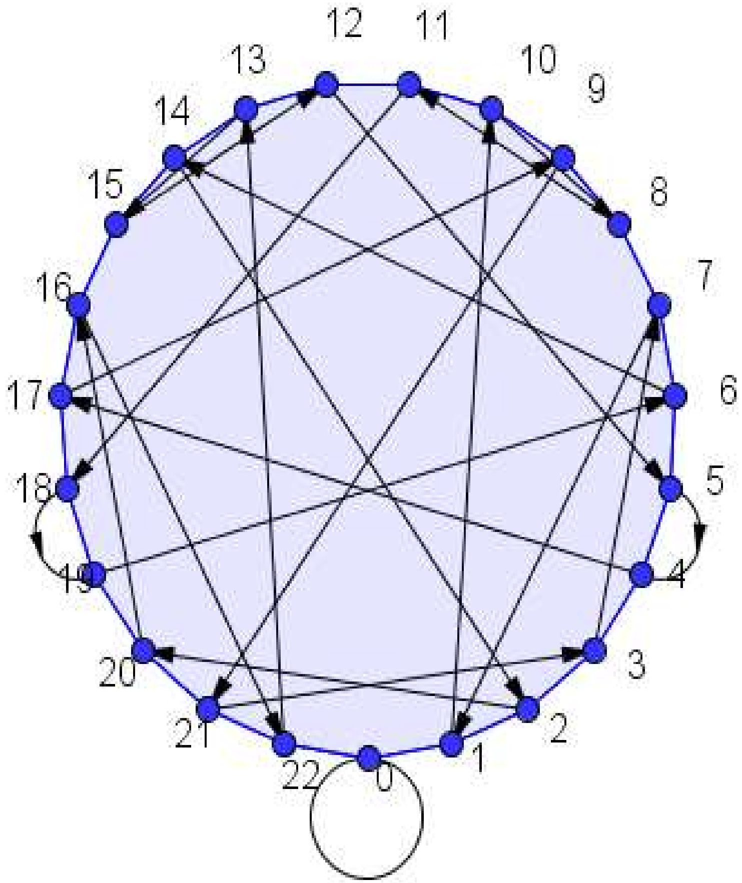
GRAFO DE LA LETRA DEL DNI

Usando el algoritmo de los grafos de divisibilidad se puede averiguar la letra del DNI



LETRA DEL DNI = GRAFO DE DIVISIBILIDAD

- Se basa en el grafo de divisibilidad del 23
- Cada resto tiene asignada una letra



Resto division	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Letra asociada	T	R	W	A	G	M	Y	F	P	D	X	B

Resto division	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Letra asociada	N	J	Z	S	Q	V	H	L	C	K	E

Teorema de euler

- En un poliedro:

  Vértices-Aristas+Caras=2

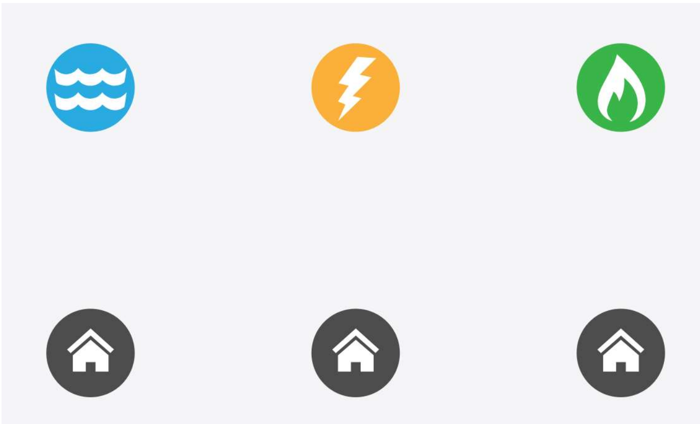
  Ecken-Kanten+Flächen=2

- ¿Qué relación hay entre los grafos y el teorema de Euler?
- ¿Se pueden transformar los poliedros en grafos?
- ¿Y los grafos en poliedros?

La APP Poly Pro nos ayudará a verlo

PROBLEMA 3

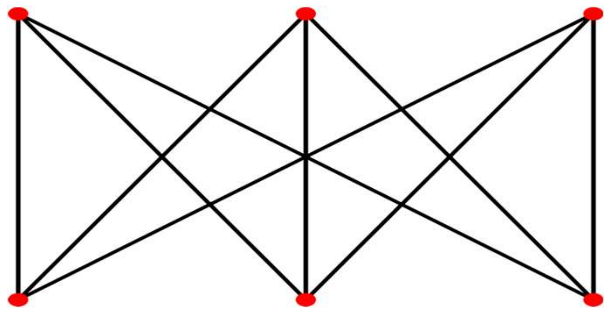
- Tenemos tres casas que necesitan abastecimiento de agua, electricidad y gas. Teniendo en cuenta que los conductos están en el mismo plano y no pueden cruzarse, como los diseñarías.



- Juego online: https://es.mathigon.org/course/graph-theory/planar-graphs

AYUDA:

- ¿Se puede formar un poliedro a partir del grafo que has formado?



Solución 3

- Este problema es imposible de resolver porque no se puede formar un poliedro a partir de este grafo.
- No se cumple el teorema de Euler.

    aristas = 9

    vértices = 6

    caras = ????

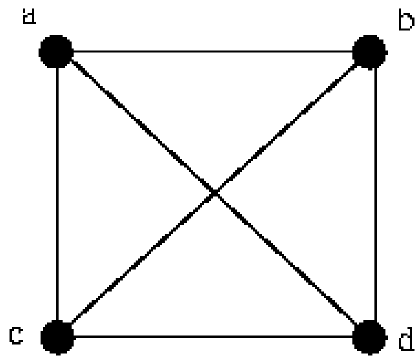
Según Euler debería haber 5 caras.

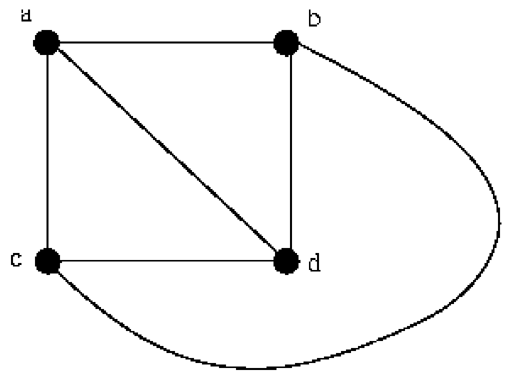
Cada cara está rodeada por 4 aristas.

Por lo que debería haber 20 aristas, pero las estoy contando 2 veces cada una pues cada arista toca 2 caras, con lo que habrá 10. CONTRADICCIÓN

Grafos planos

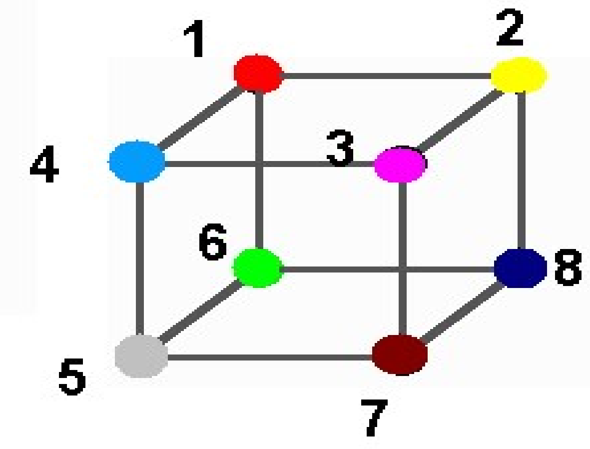
- Un grafo se dice que es plano si lo puedo dibujar sin que se crucen los arcos.

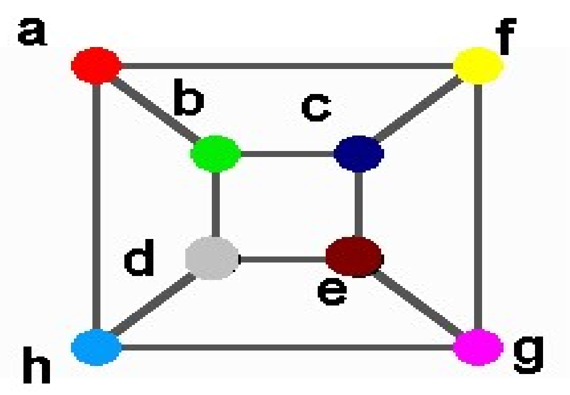


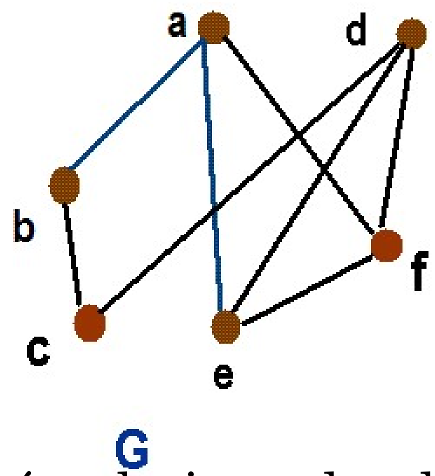


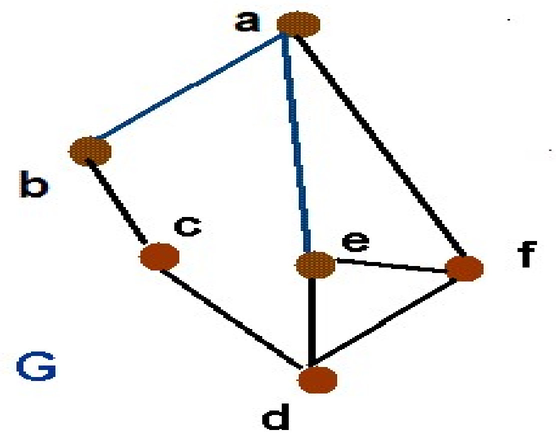
- Nota: hay grafos planos en cuyas representaciones vemos arcos que se cruzan, basta con que haya una en la que no lo hagan para denominarse plano.

OTROS EJEMPLOS









¿Podrías decir cuales de los grafos anteriores son planos?

TEOREMA

- En todo grafo plano se cumple que:

Vértices – aristas + caras = 2

¿lo puedes comprobar?

TEOREMA

- En todo grafo plano se cumple que:

Vértices – aristas + caras = 2

¿lo puedes comprobar?

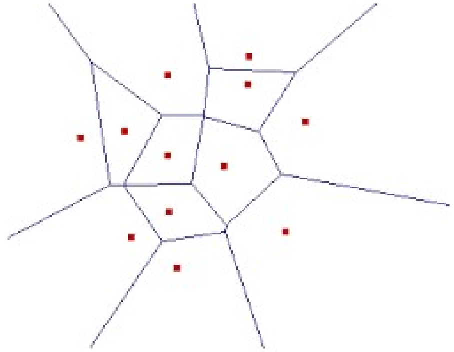
SI

Cada grafo plano tiene un poliedro asociado.

GRAFOS PLANOS

- DIAGRAMA DE VORONOI

Https://www.youtube.com/watch?v=YKTaqXmkZAE

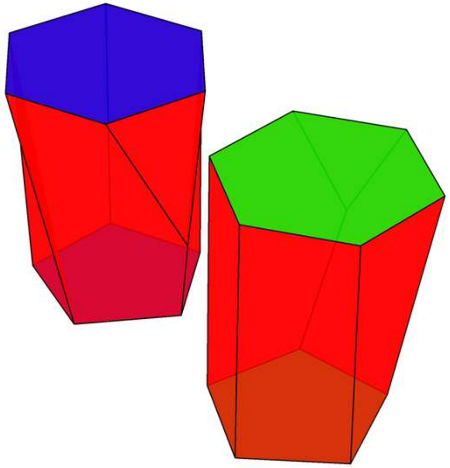


- Nueva figura geométrica ESCUTOIDE.

https://www.bbc.com/mundo/noticias-45019575

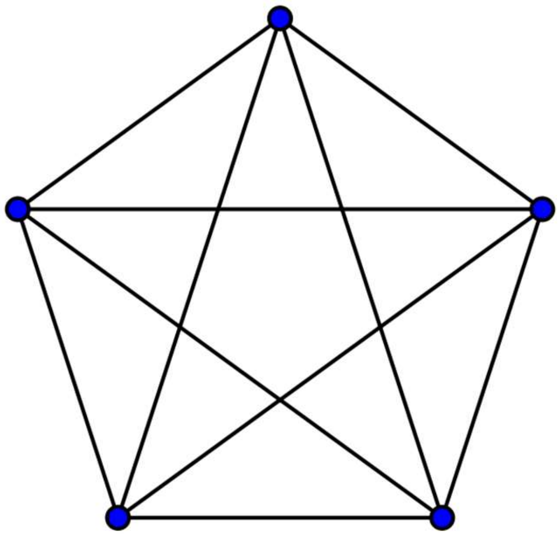
https://www.youtube.com/watch?v=bqiSA1dEnB4

https://www.youtube.com/watch?v=R7gOOxrP61Q



Problema 4

- ¿Es plano este grafo?



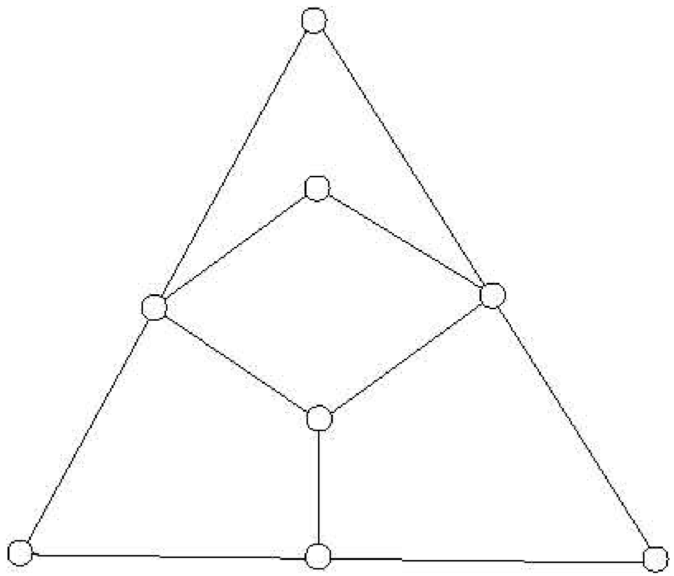
Piensa en una resolución análoga
a la del problema 3.

PROBLEMA 5

- PROBLEMA DEL VIAJANTE:

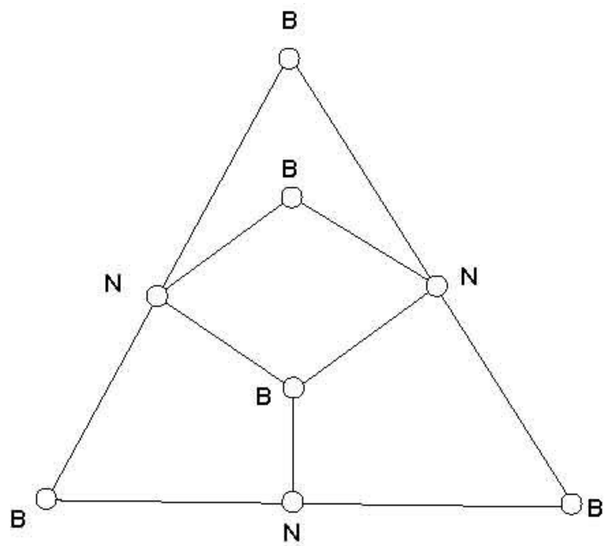
Un viajante vive en uno de estos pueblos y cada día tiene que recorrer todos los demás. ¿Hay un camino que pase por todos una única vez?

https://es.mathigon.org/course/graph-theory/travelling-salesman



Solución 5

- Los nodos de este grafo se pueden dividir en dos grupos, de forma que cada nodo de un grupo solamente esté rodeado por nodos del otro.



- Observa que cualquier camino alterna nodos de un grupo y de otro. Por lo que contando….

Grafos hamiltonianos

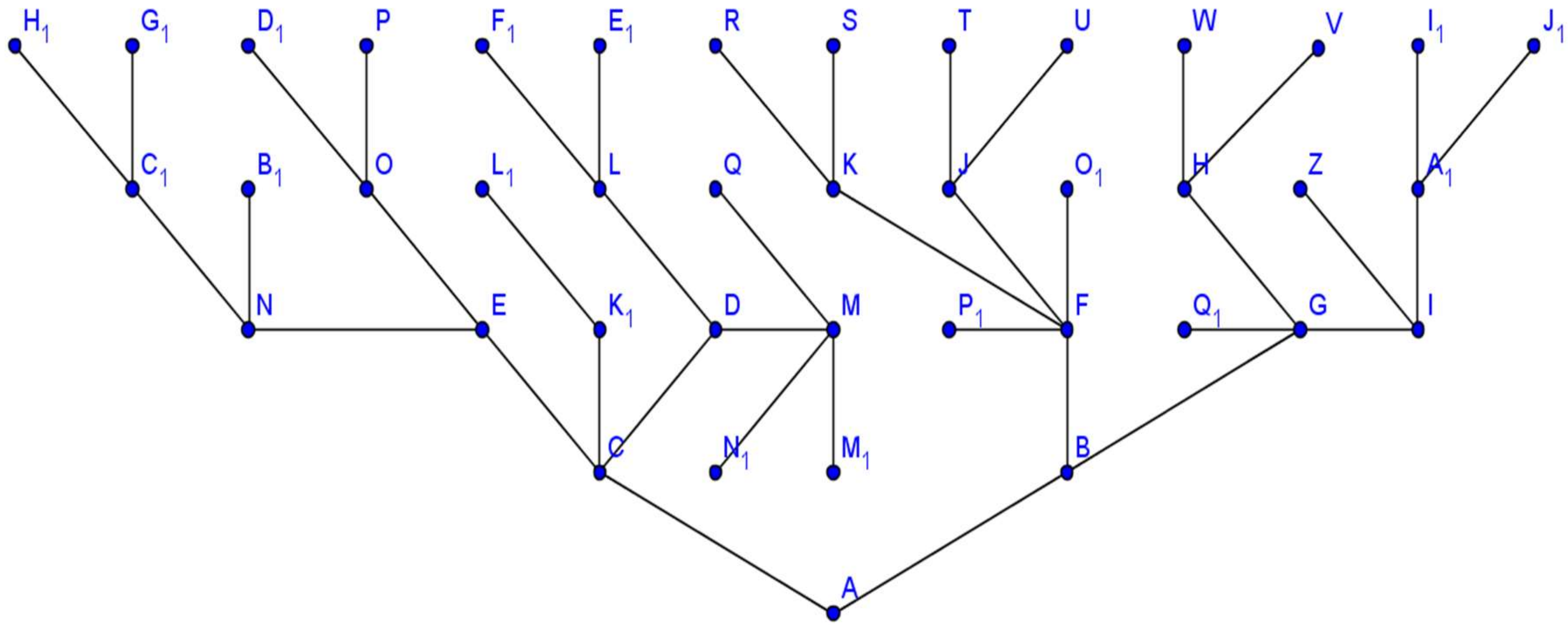
- Un grafo se dice que es hamiltoniano si existe un camino que recorre todos sus vértices pasando una única vez por cada uno de ellos.

El problema de comprobar si un grafo es hamiltoniano o no, parece similar al de los grafos eulerianos, pero en realidad es mucho mas difícil ya que no hay ningún criterio general para comprobarlo.

ÁRBOLES

- Un árbol es un tipo especial de grafo.

¿Podrías decir que características especiales tiene este grafo que no tengan los demás?

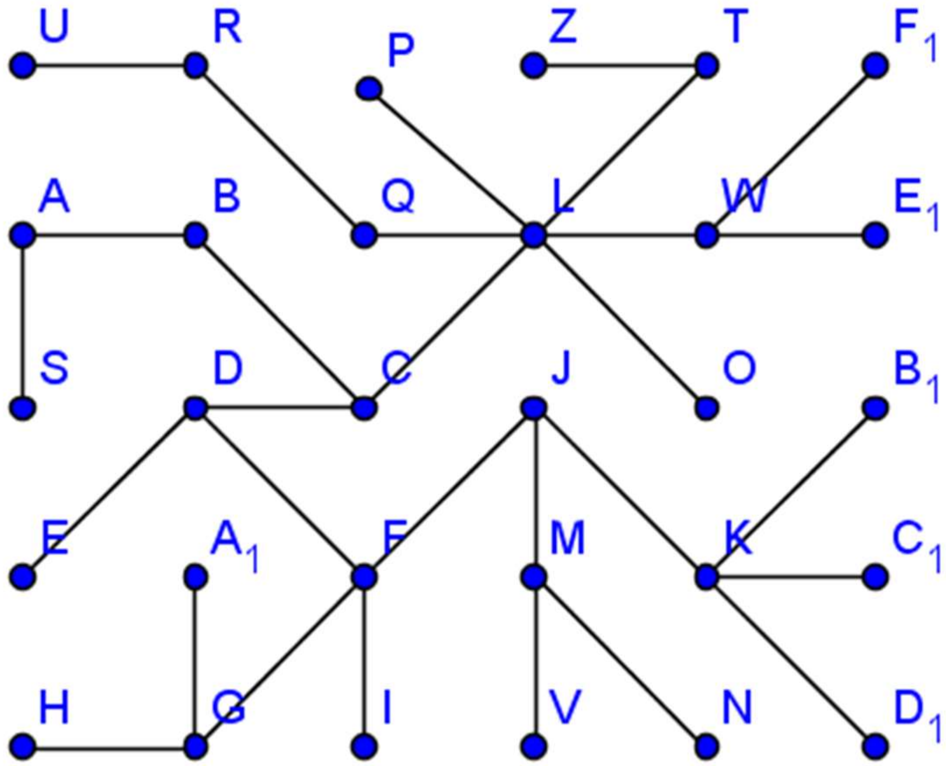


Árboles

Un árbol es un grafo que:

- No tiene ningún circuito (camino cerrado).
- No tiene ninguna cara acotada.
- Si quito un arco cualquiera el grafo se desconecta.
- Es el grafo conexo mas pequeño que incluye todos los vértices.
- Sólo hay un único camino para ir de un vértice a otro.

¿ES ESTO UN ÁRBOL?



FIN

ESPERO QUE OS HAYA GUSTADO

Carmen Fernández Grasa
CPI La Jota. Zaragoza