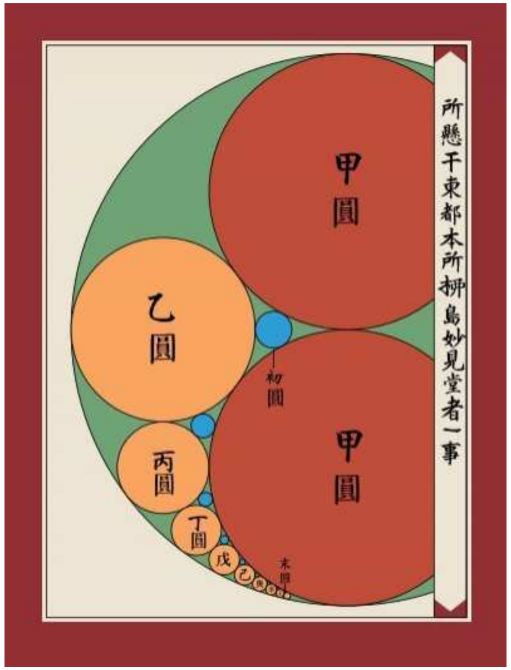
TALLER DE TALENTO MATEMÁTICO

ZARAGOZA, 1 ABRIL 2022

Figuras geométricas inscritas Sangakus japoneses



Josep Rochera
(IES Goya, profesor jubilado)

INTRODUCCIÓN

Históricamente, la Geometría era una de las partes que mejor se estudiaba de la matemática escolar, pero con el paso de los años, la renovación de los programas ha ido reduciendo su estudio cada vez más. En Secundaria se presentan los principales conceptos pero no se profundiza por falta de tiempo. En particular, la Geometría del espacio queda reducida a poco más que una sencilla presentación de los poliedros regulares y la esfera, calculándose áreas y volúmenes de algunos cuerpos. En lo que sigue presentaremos varias formas de resolver problemas de figuras inscritas, en el plano y en el espacio, utilizando diversos métodos.

Curiosamente, éste fue un tema que se estudió bastante bien en el Japón de los siglos XVII a XIX, más exactamente entre 1639 y 1854, debido a que Japón cerró sus fronteras con el exterior, cerrando escuelas matemáticas que se habían creado en parte gracias a las enseñanzas que habían introducido los jesuitas en el país.

Se pudo sortear la persecución oficial, desarrollando el estudio de la Geometría como una forma de realización de ofrendas geométricas a los dioses, conocidas como Sangakus, con problemas que el autor había resuelto y pintado sobre una tabla de madera, adornada en ocasiones de manera exquisita, que se colgaban en los templos shintoístas o, también, budistas.

El significado real de las ofrendas no se conoce con certeza, pudo ser una manera de huir de la realidad, ganar prestigio entre los vecinos, elevar el espíritu con el estudio de las matemáticas,… Con el tiempo, debido al aislamiento, la Geometría se fue desarrollando de forma original.

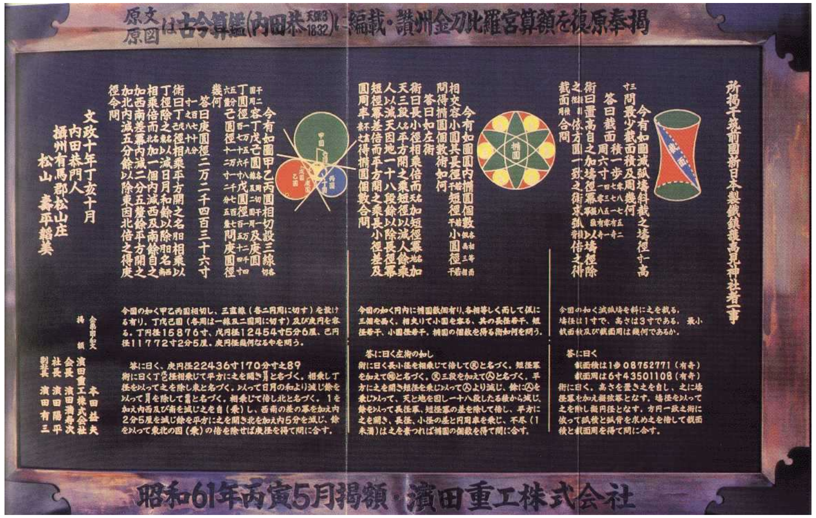
Tal vez por la propia calidad y detalle de los materiales empleados y por la estética y elegancia de las tablas, en éstas sólo se ofrecían los resultados de una manera escueta, pero no las demostraciones de las mismas. No obstante, se cree que los matemáticos que las crearon obtuvieron las demostraciones, aunque no las colgaran de los templos y no nos quede constancia de las mismas.

A partir de 1854, con la apertura forzada del país impuesta por los Estados Unidos, se crean diversas escuelas matemáticas por todo el país y la tradición de los Sangakus fue desapareciendo paulatinamente, hasta el punto que, en la década de los 70 del siglo XX, era prácticamente desconocida incluso por los matemáticos del país. Desde entonces se han ido recogiendo y estudiando las tablas, retirándolas de los templos para preservarlas.

Para más información, consultar el artículo de la revista **Scientific American** (**Investigación y Ciencia**) en:

[*https://sites.math.rutgers.edu/~sussmann/papers/res-japanese-temple-geometry.ps.gz*](https://sites.math.rutgers.edu/~sussmann/papers/res-japanese-temple-geometry.ps.gz)
Este enlace descarga directamente una versión comprimida de un archivo PostScript.
Para visualizarlo se debe descomprimir, por ejemplo con 7zip (u otro programa), creándose un a carpeta en cuyo interior está un archivo ps, doble clic para abrir.

En las páginas que siguen, veremos ejemplos de sangakus y resolveremos algunos relativamente sencillos.



Magnífica tabla con tres problemas y su explicación

Los métodos de resolución de los problemas son variados, a continuación se presentarán algunas de las formas distintas en que pueden resolverse. Como curiosidad, del teorema de Pitágoras se conocen unas 300 demostraciones diferentes.

Como norma general se debe intentar reducir la dificultad de la resolución simplificando las figuras, centrándonos en triángulos formados por puntos notables de las figuras, o bien reduciendo un problema de geometría del espacio a uno del plano con una o varias intersecciones de la figura con planos, lo que se conoce como una sección. Una vez en el plano aplicaremos diversos métodos ya conocidos.

En cualquier caso, se requiere un mínimo de ingenio y algo de práctica para determinar qué triángulos se deben considerar.

Preliminares

Para la resolución de los problemas de figuras inscritas utilizaremos herramientas matemáticas tan sencillas como semejanza de triángulos, teorema de Pitágoras, relaciones trigonométricas y utilización de la simetría. Aunque también se pueden usar otros métodos más potentes, como la inversión geométrica, que no veremos.

Debemos fijarnos especialmente en los centros de las circunferencias y polígonos (esferas y poliedros en el espacio) que aparezcan y en sus puntos de intersección. A veces resultará útil descomponer una figura en partes y recomponerla para obtener otra figura más sencilla de resolver.

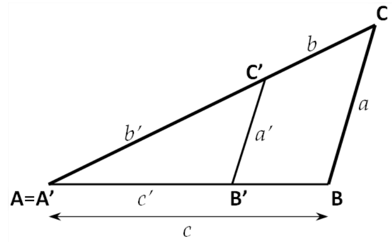
Resumimos los resultados que utilizaremos sin detenernos a comentar nada más. Con letras mayúsculas se representará puntos y ángulos, mientras que para los lados y aristas se usarán minúsculas en cursiva.

P1 Semejanza de triángulos. Proporcionalidad de sus lados

Dos triángulos ABC, A’B’C’ son semejantes si tienen los mismos ángulos y los lados son proporcionales dos a dos.

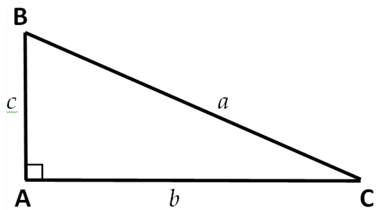
A=A’ B=B’ C=C’

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$



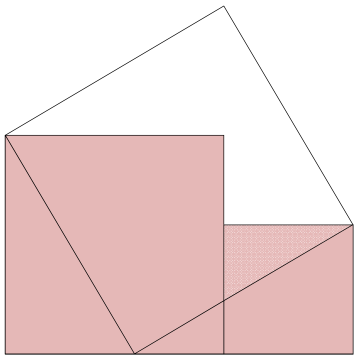
P2 Teorema de Pitágoras

ABC es rectángulo en A sii $a^2 = b^2 + c^2$ (sii = “*si y sólo si*”)

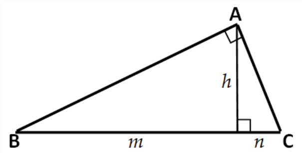


El teorema de Pitágoras se suele utilizar sólo para aplicar la igualdad, pero también se puede emplear para demostrar que un triángulo es rectángulo comprobando que sus lados verifican la relación.

Una demostración geométrica (disección) debida a Prigal en 1873 es:



P3 TEOREMA DE LA ALTURA



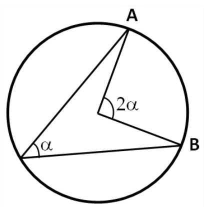
Si ABC es rectángulo en A, h =altura sobre la hipotenusa, y m, n segmentos en que la divide:

$$h = \sqrt{m \cdot n}$$

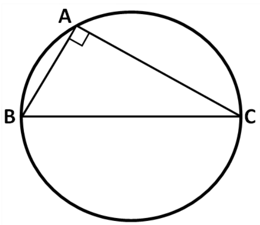
Aunque no es muy usual, su utilización simplifica bastante los cálculos.

P4 ÁNGULOS INSCRITO Y CENTRAL DE UN ARCO EN UNA CIRCUNFERENCIA.

El ángulo inscrito es la mitad que el ángulo central.



P5 ÁNGULO INSCRITO DE UN DIÁMETRO

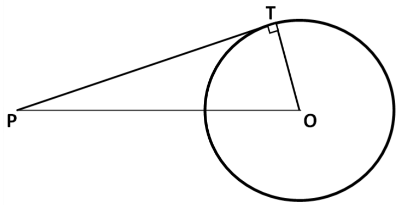


El ángulo inscrito que abarca un diámetro es recto (90º).

Este es un caso particular del anterior pero, por su importancia y utilidad, lo damos por separado.

P6 TANGENTE PERPENDICULAR AL RADIO DE UNA CIRCUNFERENCIA. ESFERAS

El radio de una circunferencia es perpendicular a la tangente en el punto de contacto.

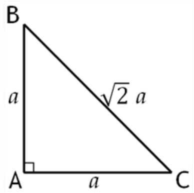


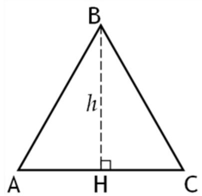
Si T es el punto de tangencia:

$$\widehat{PTO} = 90°$$

Para esferas, el radio es perpendicular al plano tangente. Por lo que si dos esferas son tangentes (solo tienen un punto en común), su plano tangente es perpendicular a la línea que pasa por sus centros.

P7 TRIÁNGULOS RECTÁNGULO E ISÓSCELES, Y EQUILÁTERO.



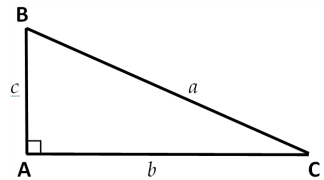


Con cierta frecuencia hay que calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos a , y la altura de un triángulo equilátero, por lo que conviene memorizar sus valores: $\sqrt{2}\,a$ y $\frac{\sqrt{3}}{2}\,a$.

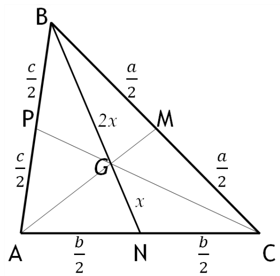
P8 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

Si ABC es rectángulo en A, se tiene que:

$$sen\ C = \frac{c}{a} \quad , \quad cos\ C = \frac{b}{a} \quad , \quad tan\ C = \frac{c}{b}$$



P9 BARICENTRO DE UN TRIÁNGULO



De cuando en cuando se utiliza la propiedad de que la distancia del baricentro a un vértice es el doble que al punto medio del lado opuesto. Así, si G es el baricentro de ABC y BN es una mediana:

$$\overline{GB} = 2\,\overline{GN}$$

P10 SIMETRÍA

Conviene siempre buscar simetrías en las figuras, pues en caso de haberlas la solución puede ser bastante más sencilla. Veremos un ejemplo más adelante.

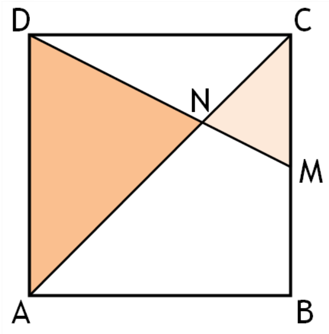
Geometría del plano

Semejanza

1.1 Triángulos en un cuadrado (X Olimpiada Matemática Nacional 2º ESO, 1999)

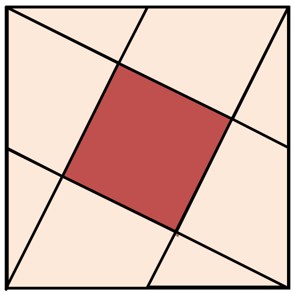
En el cuadrado ABCD de lado unidad se consideran AC y DM, donde M es el punto medio del lado BC.

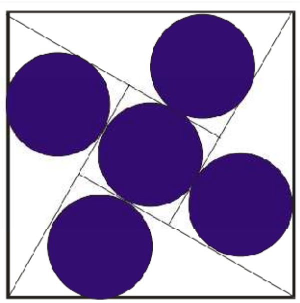
- Calcule la razón entre las superficies del cuadrilátero ABMN y el triángulo CDN.
- ¿Cuál sería la razón si M fuese el punto de BC tal que $\overline{BC} = 3\,\overline{BM}$?
- ¿Y si M cumpliese: $\overline{BC} = n\,\overline{BM}$?



1.2 Razón entre cuadrados

En un cuadrado se han trazado los segmentos que unen los vértices con los puntos medios de sus lados, formándose un cuadrado central (más oscuro), calcule la razón entre las áreas del cuadrado del centro con el total.



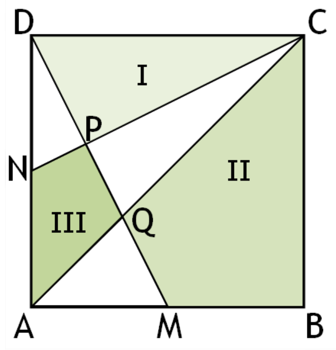

The fifth sangaku

(El dibujo de la derecha es un Sangaku auténtico).

Nota sobre las soluciones y sobre la agrupación de las figuras.

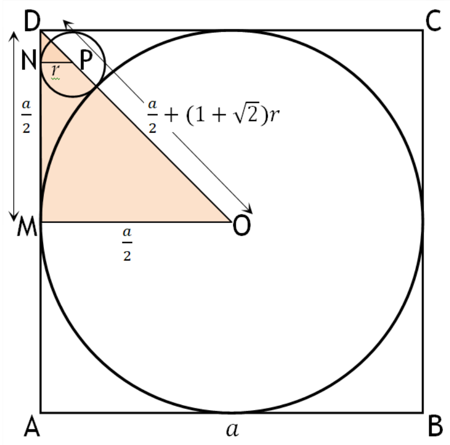
1.3 Regiones de un cuadrado (XIII Olimpiada Matemática Nacional 2º ESO, 2002)

En el cuadrado ABCD, M y N son los puntos medios de los lados AB y AD, y P, Q son las intersecciones de CN y AC con DM. Determine el área de las regiones sombreadas.



1.4. Dos circunferencias inscritas en un cuadrado

Se considera un cuadrado de lado a, halle el radio r de la circunferencia de la esquina en función de a.



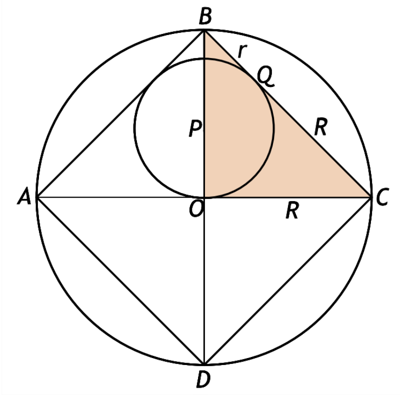
De DNP tenemos $DP = \sqrt{2}\,r$, y de DMO $DO = \sqrt{2}\,\frac{a}{2}$, por lo que:

$$\sqrt{2}\,\frac{a}{2} = \frac{a}{2} + \left(1+\sqrt{2}\right) r \quad \text{y} \quad r = \frac{(\sqrt{2}-1)}{2\,(1+\sqrt{2})}\,a$$

Teorema de Pitágoras

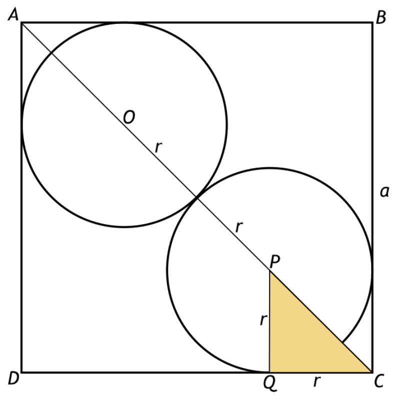
1.5 Cuadrado entre circunferencias

Halle la relación entre el radio de la circunferencia pequeña y el de la grande (ABCD es un cuadrado). Justifique los datos contenidos en la figura.



1.6 Dos circunferencias dentro de un cuadrado

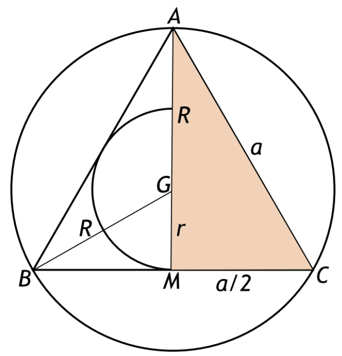
Inscribir en un cuadrado dos circunferencias del mismo radio que sean tangentes (EJERCICIO).



Propiedades del baricentro

1.7 Circunferencias inscrita y circunscrita a un triángulo equilátero

Relación entre los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita a un triángulo equilátero.



Por simetría, el centro de las circunferencias, G, es el baricentro de ABC, luego:

R = AG = 2 AMB = 2 r.

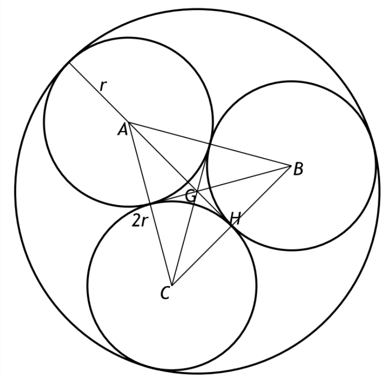
Además, de ACM: h = AM = R+r = 3 r .

De aquí (altura de un triángulo equilátero y propiedad del baricentro):

$$r = \frac{h}{3} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a \quad \text{y} \quad R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

1.8 Tres circunferencias tangentes a una cuarta

Circunferencia circunscrita a tres circunferencias tangentes del mismo radio. (EJERCICIO).

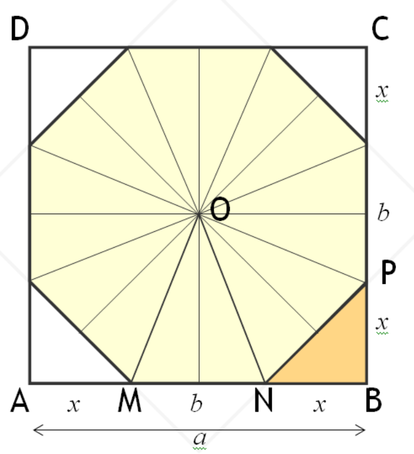


VARIABLES AUXILIARES

En muchas ocasiones la utilización de variables auxiliares simplifica los cálculos. Un ejemplo puede ser:

1.9 OCTÓGONO REGULAR INSCRITO EN UN CUADRADO

Lado y área del octógono regular inscrito en un cuadrado de lado a.



Sea b el lado del octógono y x (variable auxiliar) el cateto de los triángulos de las esquinas:

$$a = b + 2x \quad , \quad b = \sqrt{2}\, x$$

de donde: $a = b + 2 \cdot \frac{b}{\sqrt{2}} = (1 + \sqrt{2})b$

por lo que: $b = \frac{a}{1+\sqrt{2}}$

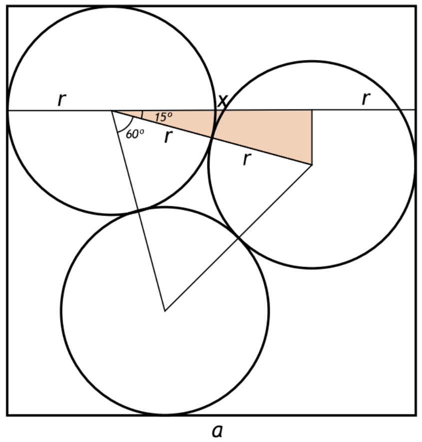
El área del octógono es fácil de calcular por la diferencia:

$$S_{octógono} = S_{ABCD} - 4S_{NBP}$$

TRIGONOMETRÍA

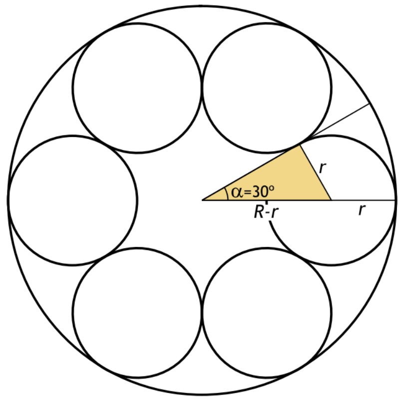
1.10 TRES CIRCUNFERENCIAS INSCRITAS EN UN CUADRADO

Inscribir tres circunferencias del mismo radio r en un cuadrado de lado a.



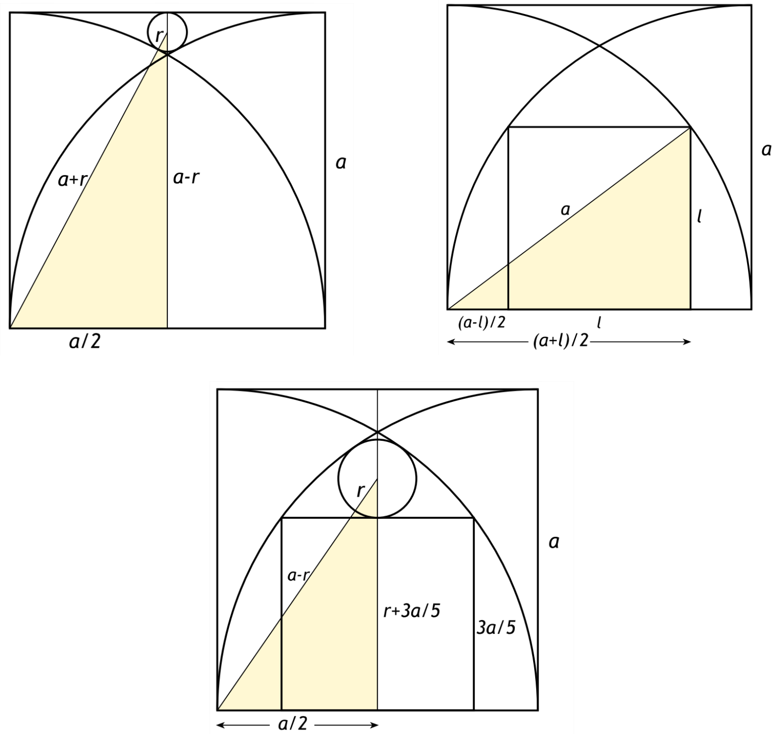
1.11 CIRCUNFERENCIAS TANGENTES ENTRE SÍ E INSCRITAS EN OTRA

Radio r de seis circunferencias tangentes entre sí e inscritas en otra de radio R.

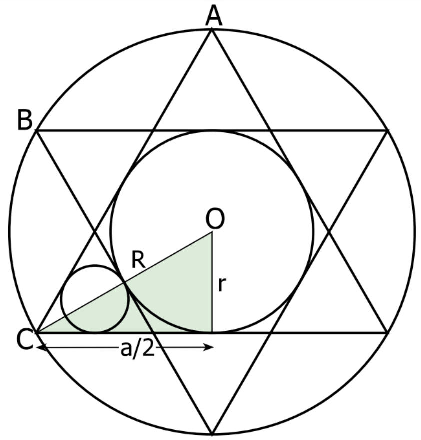


Generalizar al caso de n circunferencias interiores.

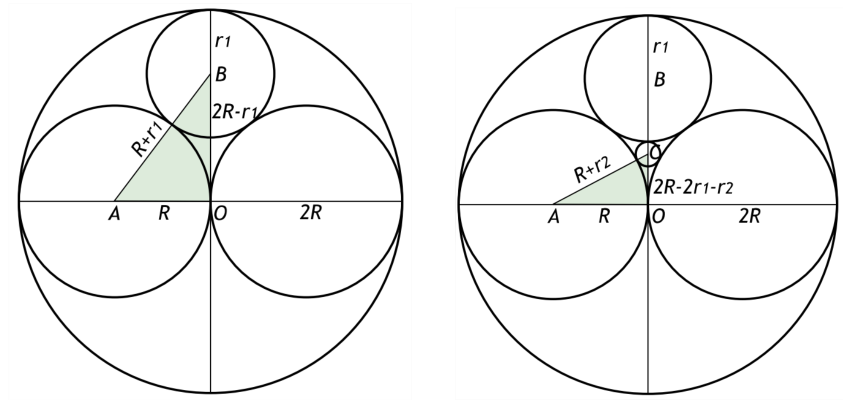
1.12 CUADRADOS Y CIRCUNFERENCIAS INSCRITOS



1.13 CIRCUNFERENCIAS INSCRITAS EN UNA ESTRELLA PITAGÓRICA

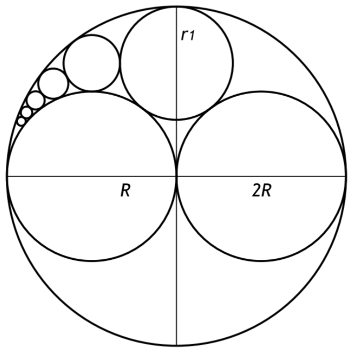


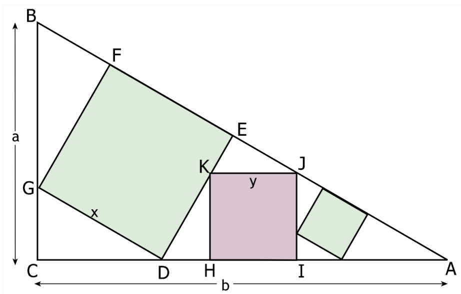
1.14 CIRCUNFERENCIAS INSCRITAS EN OTRA CIRCUNFERENCIA



1.15 SUCESIÓN DE FIGURAS INSCRITAS

La continuación del ejercicio anterior da lugar a una sucesión infinita de circunferencias inscritas. Para resolver este problema se debe emplear el concepto de inversión geométrica.





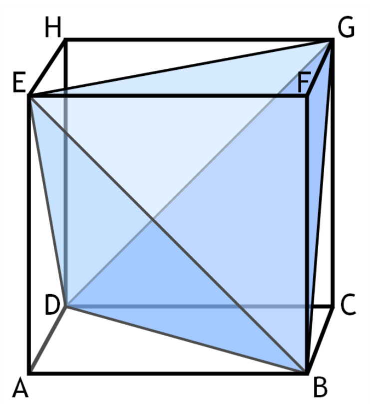
Otro problema mucho menos complejo es el de una sucesión de cuadrados inscritos en un triángulo rectángulo. Para resolverlo, fijémonos que los triángulos ABC, ADE, AIJ,… son todos ellos semejantes. Así se debe aplicar la semejanza de triángulos.

2. Geometría del espacio

Según la R.A.E., el cénit es el punto intersección de la vertical de un lugar con la esfera celeste, por encima de la cabeza del observador. Para resolver problemas de geometría del espacio, conviene considerar la visión que se tendría de la figura vista desde el cénit para, a continuación, levantar el alzado por la línea que más nos interese. Se entenderá bien con unos ejemplos.

2.1 TETRAEDRO REGULAR INSCRITO EN UN CUBO

Arista, área total y volumen de un tetraedro regular inscrito en un cubo de arista a.



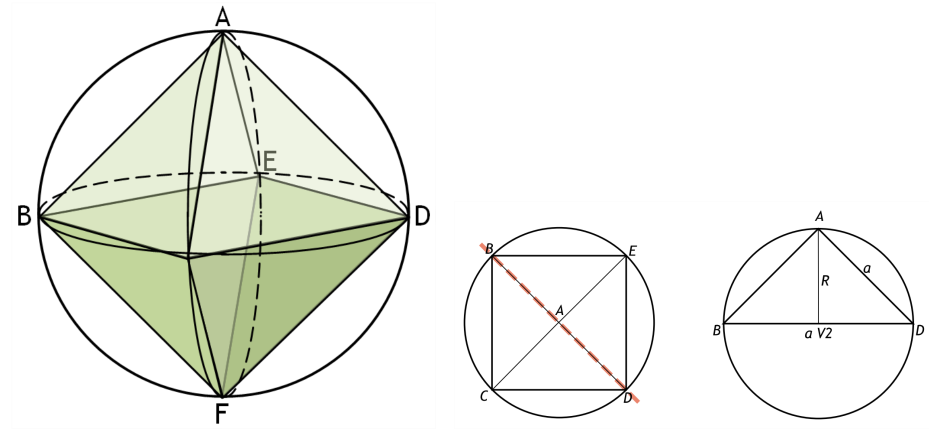
Sin observar la figura puede tenderse a pensar que la base del tetraedro está en la del cubo, y que el vértice superior es el centro de la cara superior del cubo, pero en ese caso el tetraedro no sería regular, al no ser todas sus aristas iguales, ni sus caras triángulos equiláteros.

Cuando nos damos cuenta de que las aristas del tetraedro pedido son las diagonales de las caras del cubo, la solución es sencilla formando triángulos equiláteros.en cada cara. La arista será: $b = a\sqrt{2}$.

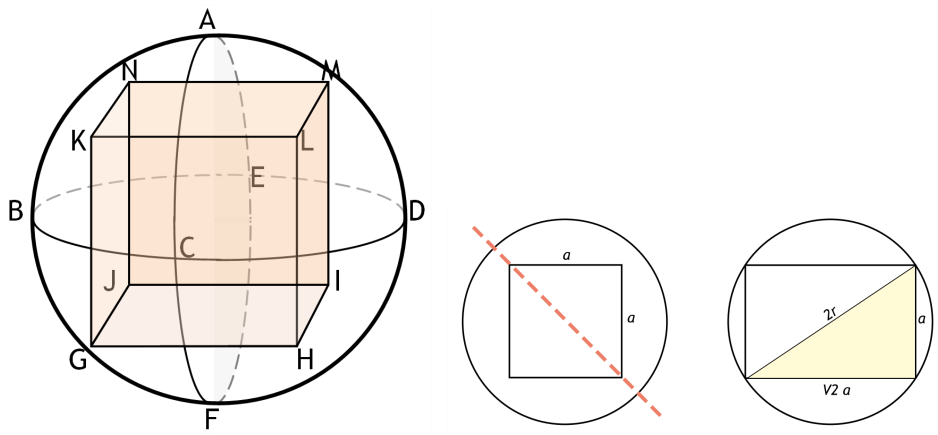
El área: $S_{total} = 4\frac{b \cdot h}{2}$

Y el volumen: $V_{tetraedro} = V_{cubo} - 4\, V_{pirámide\ esquina} = a^3 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{1}{3}\, a^3$

2.2 OCTAEDRO INSCRITO EN UNA ESFERA

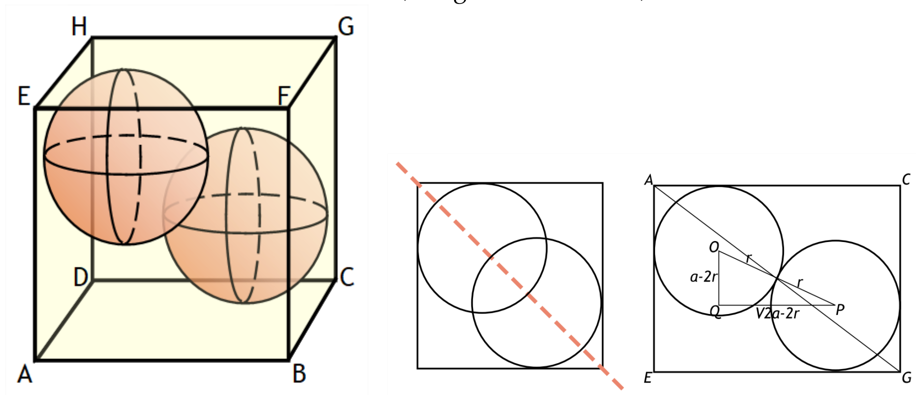


2.3 CUBO INSCRITO EN UNA ESFERA



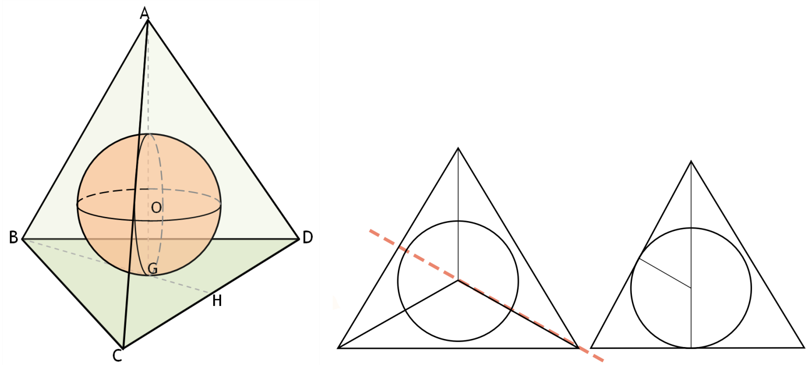
2.4 DOS ESFERAS INSCRITAS EN UN CUBO

Radio de dos esferas del mismo radio, tangentes exteriores, e inscritas en un cubo.

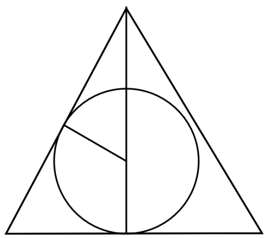


2.5 ESFERA INSCRITA EN TETRAEDRO REGULAR

Esfera inscrita en un tetraedro regular de arista a.

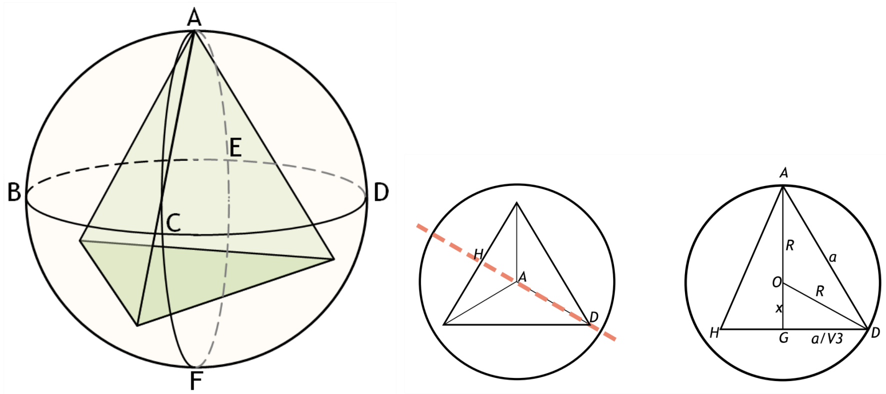


A la vista del resultado podemos preguntarnos si el dibujo era real o estaba verdaderamente deformado. Con los resultados obtenidos podemos construir la circunferencia y el triángulo a escala, obteniendo la figura:

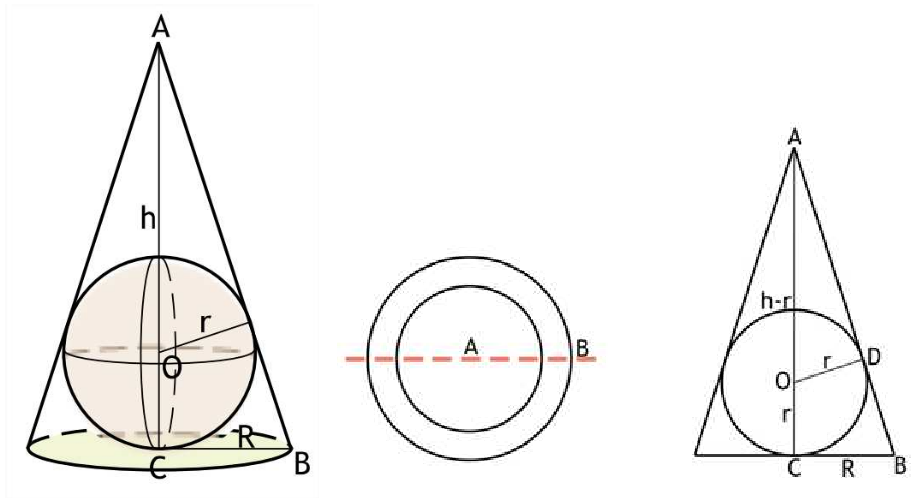


2.6 TETRAEDRO REGULAR INSCRITO EN ESFERA

Tetraedro regular de arista a inscrito en una esfera de radio R.

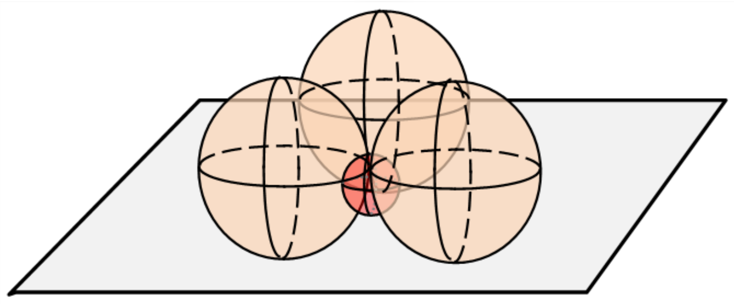


2.7 ESFERA INSCRITA EN UN CONO

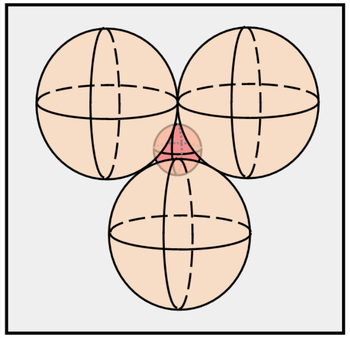


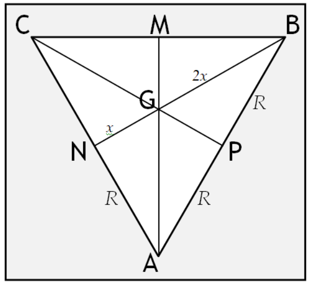
2.8 CUATRO ESFERAS TANGENTES SOBRE UN PLANO

Sobre una mesa hay tres esferas del mismo radio R y tangentes entre sí. En el hueco que determinan con la mesa, está inscrita una pequeño esfera tangente a las tres anteriores y con radio r. Halle r en función de R.

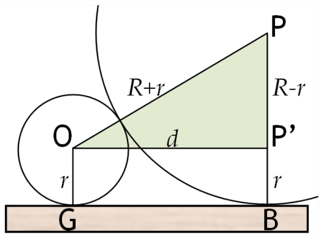


La vista cenital sería:



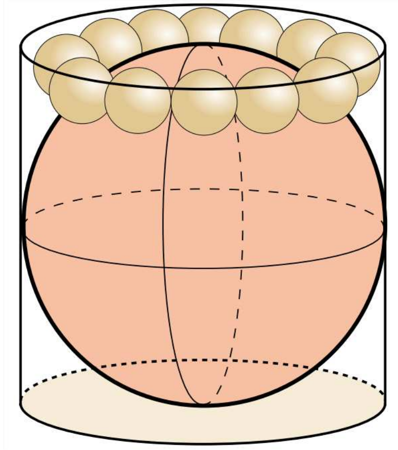


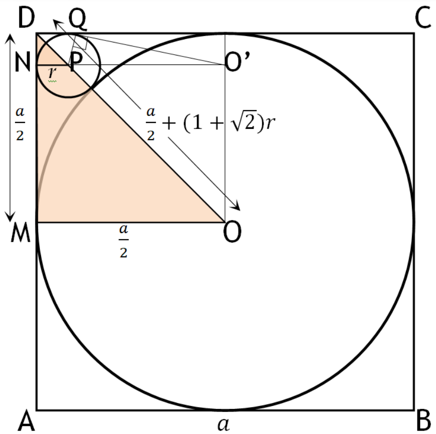
Y una vista de alzado (corte con un plano vertical) a lo largo de GB:



2.9 ESFERA INSCRITA EN UN CILINDRO CON BOLAS

Uncilindro está circunscrito a una esfera, en el espacio superior se inscriben unas bolas del mismo tamaño. Determine el radio de éstas y cuántas se podrán poner. ¿Serán todas ellas tangentes?





Por el problema **1.4**: $r = \frac{\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})}a$.

En el triángulo O'PQ : sen $O' = \frac{r}{\frac{a}{2}-r}$, lo que da un valor para el ángulo (doble del calculado) bajo el que se ve una bola de 23'91º , con lo que caben 360º/23'91 = 15'05 bolas. Así, sólo caben 15 bolas y no pueden ser todas tangentes entre sí.