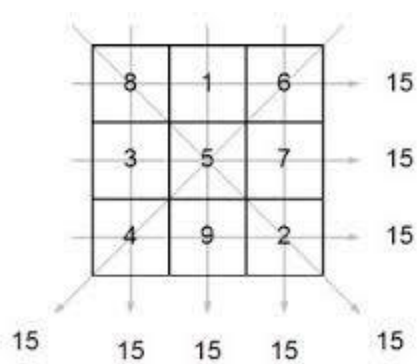
# TTM 2019: CUADRADOS MÁGICOS

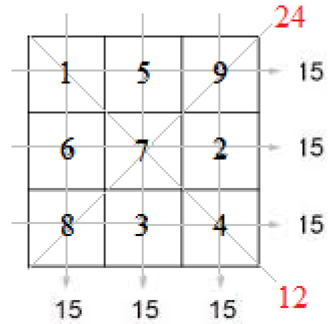
**SUMARIO:**


**►Definiciones y ejemplos**

Un **cuadrado mágico** es una tabla compuesta por pequeñas celdas que forman un cuadrado. En cada celda se coloca un número entero de tal manera que la suma de los números de cada fila, de cada columna, y de sus dos diagonales principales, tiene un mismo valor llamado **suma mágica** o **constante mágica** (*S*).

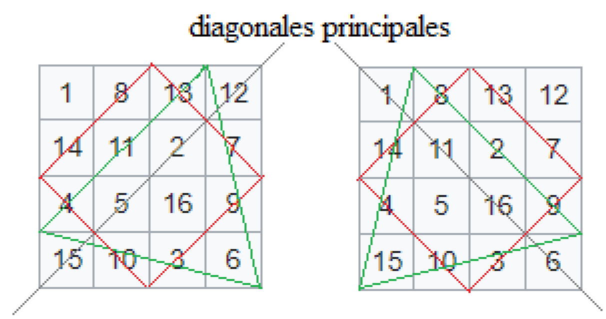


Un cuadrado mágico *n*x*n* es **normal** cuando los números que contiene son los números naturales del 1 al $n^2$. Sin embargo, posteriormente, la definición se generalizó a cualquier tabla numérica *n*x*n* que cumpliese esa condición de la suma. A este número *n* se le denomina **orden** del cuadrado mágico. A los cuadrados que solo la suma de las filas y de las columnas es la misma se les llaman **semimágicos**

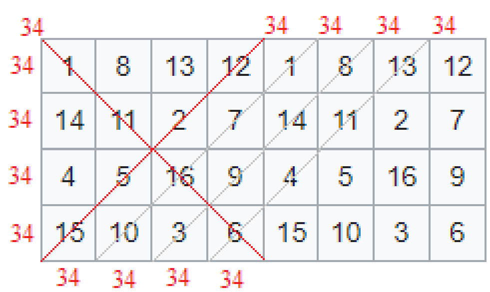



(se han cambiado las filas por columnas y se han intercambiado dos columnas)

y a los que además la suma de los números colocados en dos líneas complementarias, diagonales secundarias o diagonales quebradas también sumen lo mismo se les llama **panmágicos, pandiagonales, diabólicos o perfectos**. (líneas complementarias son dos paralelas a la misma diagonal, una a cada lado, que tienen entre ambas *n* números).


Se pueden visualizar las líneas complementarias añadiendo el mismo cuadrado mágico a continuación del mismo y dibujando líneas paralelas a las diagonales




Dentro de estos últimos están los **compactos**: Son de orden 4*k* y los elementos de cada subcuadrado 2×2, suman *S*/*k*.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 13 | 12 |
| 14 | 11 | 2 | 7 |
| 4 | 5 | 16 | 9 |
| 15 | 10 | 3 | 6 |

Los bloques (1,8,14,11) (8,13,11,2)

(13,12,2,7) (14,11,4,5) (11,2,5,16) (2,7,16,9) (4,5,15,10) (5,16,10,3) (16,9,3,6) (15,10,1,8) (10,3,8,13) (3,6,13,12) (1,14,12,7) (14,4,7,9) (4,15,9,6) (1,12,15,6) suman $S = 34$

Los **completos:** Todos los pares de números separados por las diagonales distantes $n/2$ son complementarios (es decir, suman $n^2 + 1$).

El cuadrado anterior es completo, pares como (6,11) o (2,15) están a distancia 2 separados por las diagonales y suman $4^2 + 1$

Y los **supermágicos**, **maxiperfectos o los más perfectos** que son compactos y completos a la vez, son de orden múltiplo de 4, $n = 4k$

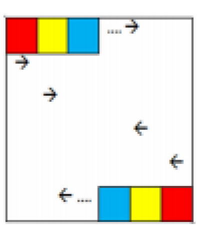
Los ejemplos específicos de cuadrados mágicos maxiperfectos fueron descubiertos en 2015 y demuestran cómo la teoría y la informática pueden definir este grupo de cuadrados mágicos.

Los 48 cuadrados mágicos pandiagonales de orden 4 son maxiperfectos. Para otros órdenes, no todos los cuadrados mágicos pandiagonales son maxiperfectos.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 15 | 18 | 13 | 34 | 61 | 36 | 63 |
| 38 | 57 | 40 | 59 | 24 | 11 | 22 | 9 |
| 23 | 12 | 21 | 10 | 37 | 58 | 39 | 60 |
| 33 | 62 | 35 | 64 | 19 | 16 | 17 | 14 |
| 31 | 4 | 29 | 2 | 45 | 50 | 47 | 52 |
| 41 | 54 | 43 | 56 | 27 | 8 | 25 | 6 |
| 28 | 7 | 26 | 5 | 42 | 53 | 44 | 55 |
| 46 | 49 | 48 | 51 | 32 | 3 | 30 | 1 |

Solo 16 de los 64 bloques de celdas de 2x2 que suman 130 están acentuados por las diferentes fuentes de colores en el ejemplo anterior.

Un cuadrado mágico normal de orden $n$ para el cual para cada par de números simétricamente opuestos del centro suman $n^2 + 1$ se le conoce por **asociativo, regular o simétrico.**



| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 12 | 13 |
| 14 | 11 | 7 | 2 |
| 15 | 10 | 6 | 3 |
| 4 | 5 | 9 | 16 |

A un cuadrado mágico que sea pandiagonal y asociativo se le denomina **ultramágico**, el más pequeño orden de un cuadrado ultramágico es 5.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 27 | 46 | 31 | 1 | 6 | 17 | 47 |
| 8 | 9 | 20 | 26 | 34 | 43 | 35 |
| 29 | 28 | 11 | 32 | 37 | 36 | 2 |
| 45 | 38 | 40 | 25 | 10 | 12 | 5 |
| 48 | 14 | 13 | 18 | 39 | 22 | 21 |
| 15 | 7 | 16 | 24 | 30 | 41 | 42 |
| 3 | 33 | 44 | 49 | 19 | 4 | 23 |

**►¿Cuántos cuadrados mágicos normales hay ?**

De orden uno sólo existe un cuadrado mágico: el formado únicamente por el número 1.

De orden 2 no existe ninguno.

Solamente existen ocho cuadrados mágicos de orden $n = 3$. Estos cuadrados se obtienen por medio de rotaciones y reflexiones a partir de **uno** de ellos. Esta cuestión se puede abordar desde un punto de vista puramente algebraico. Es decir, asignamos una incógnita a cada una de las entradas del cuadrado 3×3, como se muestra en la imagen

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $d$ | $e$ | $f$ |
| $g$ | $h$ | $i$ |

y consideramos las ecuaciones que surgen al considerar las condiciones de que la suma de los elementos de cada fila, de cada columna y cada diagonal da siempre 15. El número del centro "e" vale siempre 5 (EJERCICIO 18). De lo anterior se sigue que el cuadrado mágico es de la forma siguiente:

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $15-a-b$ |
| $20-2a-b$ | 5 | $-10+2a+b$ |
| $-5+a+b$ | $10-b$ | $10-a$ |

Dando a "a" y "b" valores entre 1 y 9, y viendo en qué casos se obtienen siempre números entre 1 y 9 para todas las entradas del cuadrado se llega finalmente a todas las posibles soluciones, que resulta que son ocho. A saber:

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

a = 8, b = 1

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 3 | 4 |
| 1 | 5 | 9 |
| 6 | 7 | 2 |

a = 8, b = 3

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 7 | 2 |
| 1 | 5 | 9 |
| 8 | 3 | 4 |

a = 6, b = 7

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 1 | 8 |
| 7 | 5 | 3 |
| 2 | 9 | 4 |

a = 6, b = 1

| | | |
|---|---|---|
| **4** | **9** | **2** |
| **3** | **5** | **7** |
| **8** | **1** | **6** |

a = 4, b = 9

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 3 | 8 |
| 9 | 5 | 1 |
| 2 | 7 | 6 |

a = 4, b = 3

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 9 | 4 |
| 7 | 5 | 3 |
| 6 | 1 | 8 |

a = 2, b = 9

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 6 |
| 9 | 5 | 1 |
| 4 | 3 | 8 |

a = 2, b = 7

Existen 880 cuadrados mágicos originales o distintos de cuarto orden.

Existen 275$_1$305.224 cuadrados mágicos originales de quinto orden.

Si bien los cuadrados mágicos no forman parte de las investigaciones de vanguardia en matemáticas modernas, quedan aún muchas preguntas abiertas en torno a ellos. A veces, estas tienen relación con problemas actuales importantes. Por ejemplo, el problema de conteo de los cuadrados mágicos normales de orden *n* no ha sido resuelto aún: ni siquiera se conoce el número exacto para $n$ = 6, pero, según estimaciones realizadas en 1998, mediante métodos estadísticos existen $(1{,}7745 \pm 0{,}0016) \times 10^{19}$ cuadrados mágicos normales de orden 6 y $(3{,}7982 \pm 0{,}0004) \times 10^{34}$ cuadrados de orden 7.

Ciertamente, para $n$ = 6 se trata de un problema que se puede programar computacionalmente: bastaría comprobar, para cada permutación posible, si la propiedad mágica se satisface. Sin embargo, la cantidad de estas permutaciones es ”astronómica”, pues es igual a

$$36! = 1\times2\times3\times\ldots\times35\times36,$$ o lo que es lo mismo

371.993$_6$ 326.789$_5$ 901.217$_4$467.999$_3$448.150$_2$835.200$_1$000.000

y esto es porque se disponen de 36 casillas para ubicar el 1; una vez ubicado, quedan 35 casillas para el 2; etc.; el número total de permutaciones posibles es, por lo tanto, igual al producto en cuestión. De esta forma se ve aflorar un problema más general consistente en la elaboración de algoritmos computacionales efectivos que permitan tratar problemas de conteo. Es muy probable que, en los próximos años, nuestro problema particular pueda ser resuelto para $n$ = 6, pero ciertamente estaremos lejos de extender la situación, por ejemplo, para $n$ = 2019.

No existen cuadrados mágicos pandiagonales de orden 3, ni de órdenes $4k + 2$.

El número total de cuadrados panmágicos normales de orden 4 es 384. El número de cuadrados panmágicos de orden 5 es 28800.

Se puede demostrar que no hay cuadrados mágicos asociativos de orden $4k + 2$, para cualquier entero $k$.

El número de cuadrados mágicos asociativos de orden 3, 4, 5, ... son: 1, 48, 48.544, 0, 1$_3$125.154$_2$039.419$_1$ 854.784, …

**►Algunas propiedades elementales generales:**

1. En un cuadrado mágico normal, la constante mágica $S$ es igual a $(1/2)n(n^2+1)$

2. En un cuadrado mágico normal de orden 3, la suma o constante mágica es el triple del elemento de la casilla central (5); en el de orden 5, cinco veces el elemento de la casilla central (13). En general en los cuadrados mágicos normales de orden impar $2n + 1$ la constante mágica es $2n + 1$ veces el elemento central que es $(1/2)(n^2 +1)$
3. Se pueden intercambiar entre sí dos filas junto con dos columnas simétricas en bloque todos los números de una fila con todos los números de otra fila, haciendo lo mismo con los números de las filas y columnas que sean simétricas a ellas respecto del centro del cuadrado.
Por ejemplo: Si elegimos el elemento que esta en la 1ª fila, 4ª columna intercambiaremos la 1ª y la 4ª fila, junto con la 1ª y la 4ª columna, que es donde está el elemento simétrico del anteriormente elegido. Si sólo se intercambiaran las filas (o columnas) sería incorrecto. Para un cuadrado par, hay $n/2$ pares de filas y columnas que pueden intercambiarse; así podemos obtener $2^{n/2}$ cuadrados mágicos equivalentes combinando tales intercambios.Para el cuadrado impar, hay $(n - 1)/2$ pares de filas y columnas que pueden intercambiarse; y $2^{(n-1)/2}$ cuadrados mágicos equivalentes obtenidos mediante la combinación de tales intercambios. Intercambiando todas las filas y columnas gira el cuadrado 180º.
4. Se puede aumentar (o disminuir) un mismo valor $k$ a cada uno de los elementos de un cuadrado mágico de constante $S$, y el cuadrado resultante también será mágico, de constante $S \pm nk$. En particular, si cada elemento en un cuadrado mágico normal se resta de $n^2 + 1$, obtenemos el *complementario* del cuadrado original

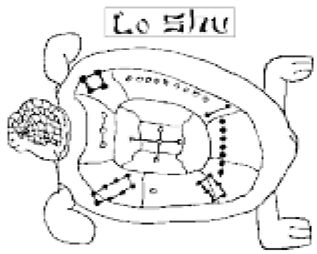
| | | | |
|---|---|---|---|
| 10 | 3 | 13 | 8 |
| 5 | 16 | 2 | 11 |
| 4 | 9 | 7 | 14 |
| 15 | 6 | 12 | 1 |

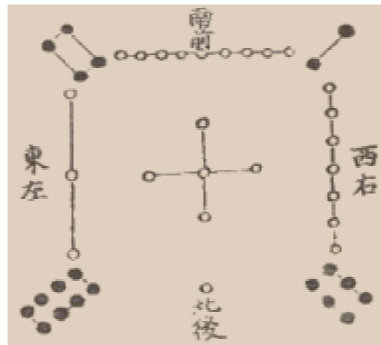
| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 14 | 4 | 9 |
| 12 | 1 | 15 | 6 |
| 13 | 8 | 10 | 3 |
| 2 | 11 | 5 | 16 |

5. Análogamente se puede multiplicar por un mismo número $k$ a cada uno de sus elementos de un cuadrado mágico de constante $S$, y el cuadrado resultante será mágico de constante $kS$.
6. Se pueden sumar o restar los elementos correspondientes de dos cuadrados mágicos del mismo orden de constantes $S_1$, $S_2$, y el cuadrado obtenido será mágico de constante $S_1 + S_2$.
7. Cualquier cuadrado mágico se le pueden aplicar giros y simetrías para producir cuadrados trivialmente distintos, que son equivalentes (y no se consideran distintos).

**►Historia**

El origen de cualquier cultura se basa en leyendas, dioses, seres mitológicos y héroes. La antigua cultura china no fue una excepción y la filosofía Feng Shui (es un antiguo sistema filosófico chino basado en la ocupación consciente y armónica del espacio, con el fin de lograr de este una influencia positiva sobre las personas que lo ocupan, en principio sólo se aplicaba a las construcciones imperiales y a la orientación de las tumbas) se asienta justamente en leyendas y adivinaciones a través de los elementos de la tierra. Originalmente era una forma de conocimiento que estudiaba los cambios que ocurren en la naturaleza. Los símbolos del Feng Shui provienen del libro de los cambios "I Ching", (libro de hacia el año 1200 a.C). En él aparece la leyenda del Lo Shu (en chino "Lo" significa río Amarillo y "Shu" libro): Existía en la antigua china un emperador, Fu Xi, uno de los primeros monarcas de las primeras dinastías, nacido de una joven y del dios del Trueno. Este rey sabio enseñó a su pueblo a pescar con redes (inspirado en las telas de las arañas), a cocinar con fuego, a domesticar animales. Su sabiduría provendría de su capacidad para observar la Naturaleza y los fenómenos terrestres y celestiales. Fu Xi estaba dispuesto a descifrar las leyes naturales, pues notaba que todo lo que sucedía seguían ciertos patrones comunes de existencia. Él fue el primero en ofrecer sacrificios y culto a los espíritus, y él fue el que, en una inundación del río Lo (río Amarillo) descubrió una serie de marcas que formaban un patrón numérico en el caparazón de una tortuga. En concreto sobre el caparazón se escribían los números del 1 al 9 en un cuadrado 3x3 y la suma en cualquiera de las direcciones (horizontal, vertical, diagonal) era siempre la misma. A ese cuadrado se le llamó Lo Shu. Este cuadrado se convirtió en la base de la numerología china y de la astrología, además de la base del Feng Shui. Estos números y su colocación cobraron un significado simbólico de predicción de los cambios en la tierra y en el cielo, y por lo tanto una especie de oráculo. Desde entonces estos cuadrados se han utilizado como amuletos.




Los chinos dieron un entorno místico a esa figura pues asignaron, a los números, los principios básicos de la vida: los números pares simbolizaron el principio yin, de lo femenino, y los impares el principio yang, de lo masculino. El centro del cuadrado está ocupado por el 5, que simboliza la Tierra y representa el equilibrio entre el yin y el yang pues pertenece a las filas, a las columnas y a las diagonales. En los lados se representan los cuatro elementos principales: los metales (4 y 9), el fuego (2 y 7), el agua (1 y 6) y la madera (3 y 8).

Con el tiempo y siguiendo una trayectoria similar a la de otras áreas del saber y del conocimiento, los cuadrados mágicos pasaron a la India. El Templo de Parshvanatha, en Khajuraho, una pequeña localidad situada en el estado de Madhya Pradesh, en la India, se encuentra este cuadrado mágico 4x4, que es uno de los más antiguos que se conocen de este orden 4; construido en el siglo X, acompañado de una frase deseando una victoria de un príncipe .

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 12 | 1 | 14 |
| 2 | 13 | 8 | 11 |
| 16 | 3 | 10 | 5 |
| 9 | 6 | 15 | 4 |

Una teoría completa de construcción de cuadrados mágicos ya aparece en el tratado *Ganita Kaumudi* (año 1356) del matemático hindú Narayana Pandit.

De los indios pasaron a lo árabes. Los pueblos árabes atribuían a los cuadrados mágicos propiedades misteriosas. A partir de una obra de un autor anónimo árabe del siglo XI, que se conserva en Estambul, Jacques Sesiano ha realizado en 1996, la reproducción, traducción y comentarios que se muestran en el libro titulado "*Un traité médiéval sur les carrés magiques*"


El libro explica los métodos generales de construcción de cuadrados mágicos de cualquier dimensión. Se trata del texto más antiguo que se conserva sobre el estudio sistemático de los cuadrados mágicos.

La introducción de los cuadrados mágicos en Europa se produjo en el siglo XIV a través de los árabes por intermedio del monje griego Manuel Moschopoulos, quien publicó un libro basado en los descubrimientos del matemático árabe Al-Buni. También aquí fueron considerados como amuletos y talismanes contra diversas enfermedades (durante la Edad Media se grababan en láminas de plata como amuletos contra la peste negra). En el siglo XVI aparece la obra de Cornelius Agrippa, "*De occulta Philosophia*", escrita en 1533. En ella se construyen cuadrados mágicos de órdenes 3 a 9, llamados tabulae Saturni, Jovis, Martis, Solis, Veneris, Mercurii y Lunae, cada uno de ellos asociado a uno de los siete planetas conocidos (incluyendo el Sol y la Luna). La imagen "Tabula Saturni" de dicha obra corresponde a un cuadrado de orden 3 y de constante 15, como muestra la figura adjunta.

En el Renacimiento se utilizaron cuadrados mágicos con fines terapéuticos. Por esto, como amuleto para ahuyentar la melancolía, los astrólogos de la época "recetaban" cuadrados mágicos de orden cuatro. Muestra de ello es la pintura del alemán Alberto Durero, quien puso un cuadrado mágico de cuarto orden en posición dominante en su grabado Melancolía. Otros tipos de cuadrados mágicos no corrieron la misma suerte, pues era de mal augurio estar en posesión de ellos.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | 666 |
| | 78 | 132 | 108 | 162 | 66 | 120 | 666 |
| | 186 | 24 | 216 | 54 | 174 | 12 | 666 |
| | 72 | 126 | 84 | 138 | 96 | 150 | 666 |
| | 180 | 18 | 30 | 192 | 204 | 42 | 666 |
| | 102 | 156 | 60 | 114 | 90 | 144 | 666 |
| | 48 | 210 | 168 | 6 | 36 | 198 | 666 |
| 666 | 666 | 666 | 666 | 666 | 666 | 666 | |

Desde un período muy

temprano, estos cuadrados llamaron la atención de los matemáticos, especialmente aquellos que poseían un amor por lo maravilloso. En 1693, Frénicle enumera los 880 cuadrados mágicos del orden 4, y propone una clasificación.

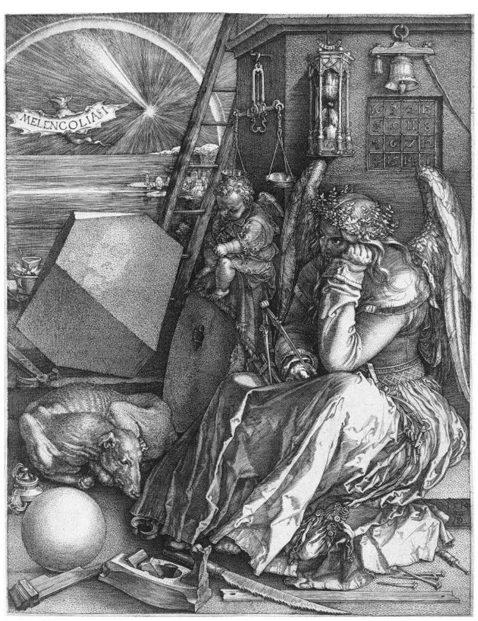
En 1838 aparece la obra de B. Violle "*Traité complet des carrés magiques pairs et impairs, simplex et composés, a bordures, compartiments, chassis, équerre, etc., suivi d'un traité des cubes magiques*", en dos volúmenes.

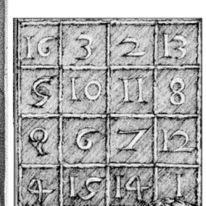
**►El cuadrado mágico más "famoso"**

Es un cuadrado mágico de orden 4 y apareció por primera vez en un grabado, *Melancolía I*, del pintor Alberto Durero que se puede ver en el Germanisches National Museum de Nuremberg o en la Bibliothèque nationale de France, Paris. En este grabado, Durero pintó en lugar destacado un cuadrado mágico de orden 4. Fue realizado en plancha de cobre.

**Alberto Durero** fue un pintor alemán de los siglox XV y XVI con una producción artística muy amplia y de gran calidad. Además de ejercer una gran influencia en sus contemporáneos, fue uno de esos artistas que consiguieron utilizar de forma magistral la geometría y las proporciones matemáticas en su arte. Además fabricó algunos dispositivos mecánicos para facilitar el dibujo en perspectiva, que representó en algunos de sus grabados. También se preocupó bastante del trazado de las secciones cónicas, llegando a escribir tratados donde explicaba métodos para ello.

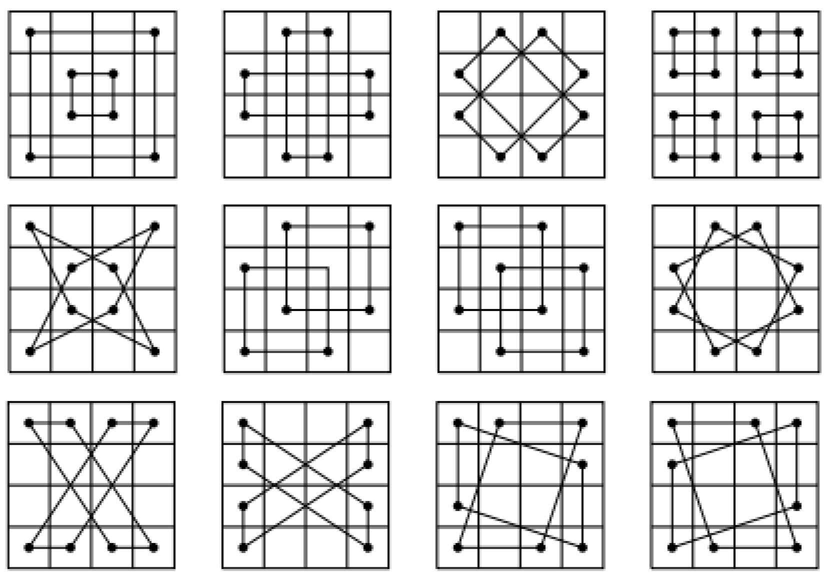
La melancolía era considerada en la antigüedad como uno de los cuatro humores que formaban parte del cuerpo humano (cuatro líquidos que conformaban la personalidad y el estado de una persona). Cada humor se asocia a uno de los cuatro elementos, de las cuatro estaciones, las cuatro edades del hombre, los cuatro vientos, los cuatro puntos cardinales y las cuatro fases del mundo. Melancolía era el peor considerado de los cuatro humores y se asociaba a la tierra, la sequedad, el frío, el viento Boreal, el otoño, la tarde y la edad de los sesenta en el hombre. Los hombres de constitución melancólica poseían una constitución física diferente de los de los otros humores, lo que afectaba a su color de piel (terroso), cabellos, ojos, a su vulnerabilidad ante ciertas enfermedades (mentales, la locura principalmente) y por unas características morales e intelectuales. Así, cualquier alteración del humor melancólico provocaba la locura. Este estado también se asociaba en el Renacimiento al estado del artista en un momento de la creación. La Melancolía se asociaba a uno de los siete pecados capitales, la Pereza. Saturno es el planeta de los creadores. Su influencia es terrible sobre el ánimo de los melancólicos, por lo que han de protegerse con talismanes astrológicos: la mala influencia se aprecia en el cometa, un fenómeno maléfico. La protección está en el cuadrado mágico





En el Medievo y Renacimiento ciertos astros estaban asociados a los cuadrados mágicos de distinto orden: Saturno era el culpable del estado del melancólico, muestras de la presencia de Saturno son los objetos asociados a este planeta: El reloj de arena y la balanza, atributos de Saturno. Saturno era desde la antigüedad el dios asociado a la agricultura. Pero para contrarrestar el efecto de Saturno tenemos a Júpiter, materializado en el cuadrado mágico de orden 4, el talismán. Por otro lado observar la "coincidencia", la constante mágica es 34, 3 + 4 = 7, siete peldaños tiene la escalera que te eleva a otro estado, 7 son los planetas, 7 son los días de la semana. El siete siempre ha tenido múltiples connotaciones mágicas y esotéricas. Por último el compás, asociado a la Geometría, asociado por tanto a la inteligencia, como un instrumento para la creación del artista, como un amuleto para llamar a la creatividad.

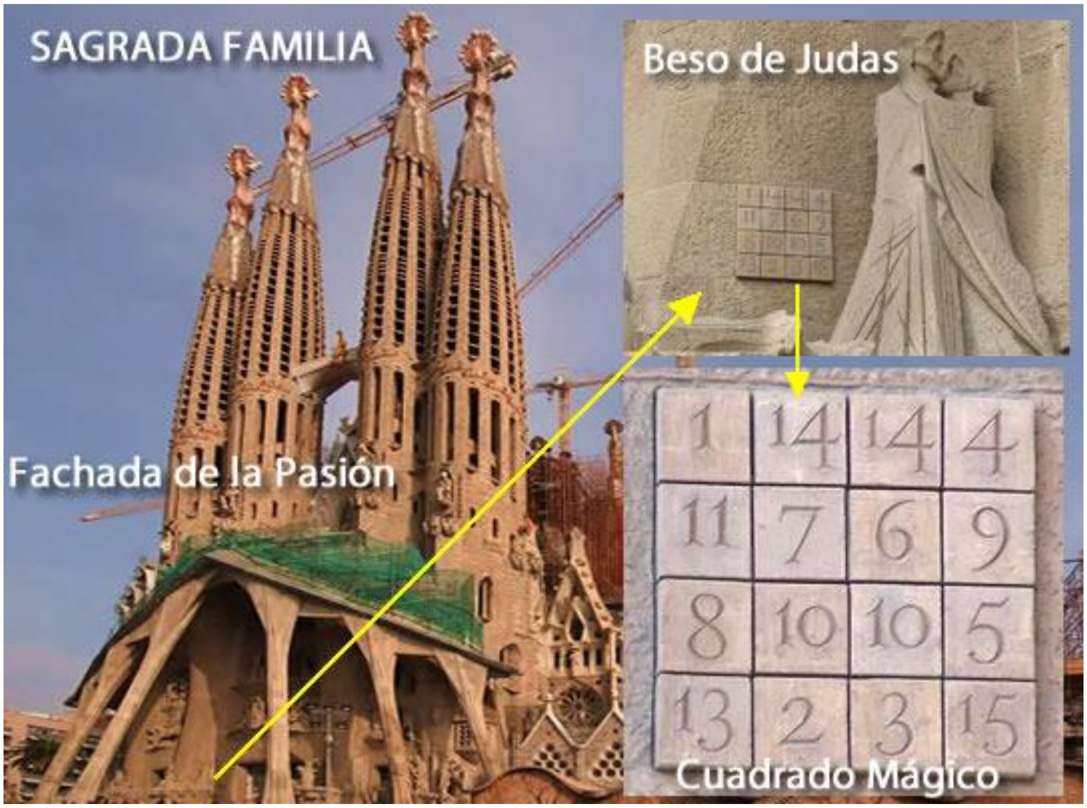
Si dibujamos sobre el cuadrado mágico de Durero los siguientes cuadriláteros y sumamos los números que aparecen en los vértices de los mismos, marcados por puntos, podemos comprobar que todas las sumas son iguales a 34 (es un cuadrado maxiperfecto).

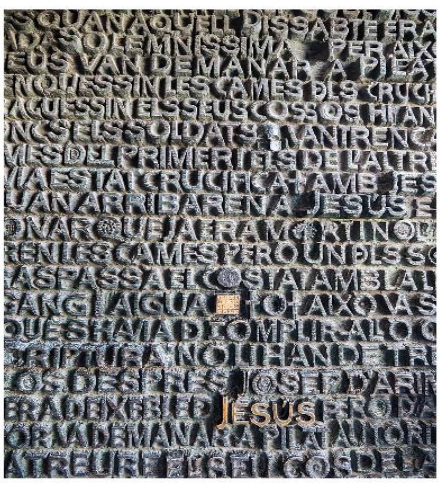


Este grabado es del año **1514** (los números centrales de la última fila). Además se piensa que aparece la fecha de la muerte de su esposa en la última fila: 4 de Enero de 1514 (4-1514-1) Y, por rizar el rizo, los números de las esquinas de la última fila, el 4 y el 1, corresponden en nuestro alfabeto a las letras **D** y **A**, esto es: **D**urero, **A**lberto

**►Otro también famoso**

El cuadrado mágico del templo de la Sagrada Familia de Barcelona fue diseñado por el escultor Josep Subirachs para la fachada de la Pasión: Su constante mágica es 33, la supuesta edad de Cristo en el momento de su muerte. Es semimágico y no es normal, porque en lugar de incluir los 16 primeros números, hay dos que faltan (12 y 16) y dos que se repiten en casillas consecutivas (10 y 14). El cuadrado mágico grabado en piedra del *Beso de Judas* no es el único: las puertas de bronce reproducen a escala pequeña el mismo cuadrado de número mágico 33.



Aparecen también en el mismo templo referencias al cuadrado mágico de Durero: En la *Puerta de la Oración en el Huerto de Getsemaní* podemos ver el sólido de Durero , el cubo con dos vértices truncados (seis pentágonos y dos triángulos como caras) y debajo leemos la palabra *Melancolía.*


En la otra hoja de puerta se ha reproducido un compás y varias figuras geométricas que insisten en el contenido simbólico matemático.

**►Algunos tipos de cuadrados mágicos**

1) **Alfanuméricos**: En este tipo o clase de cuadrados mágicos, se relacionan números con sus palabras del idioma. En el ejemplo, con palabras en inglés, se parte de un cuadrado mágico numérico que genera un cuadrado de palabras, y finalmente se produce un segundo cuadrado mágico numérico originado del conteo del número de letras del cuadrado de palabras.

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 22 | 18 |
| 28 | 15 | 2 |
| 12 | 8 | 25 |

$S = 45$

| | | |
|---|---|---|
| five | twenty – two | eighteen |
| twenty – eight | fifteen | two |
| twelve | eight | twenty – five |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 8 |
| 11 | 7 | 3 |
| 6 | 5 | 10 |

$S = 21$

Investigando en otros idiomas, se ha visto que en francés con números menores que 200 hay únicamente uno, mientras que en inglés hay más de 7, en galés más de 25. Con números menores que 100 no hay ninguno en danés, 6 en holandés, 13 en finés y 221 en alemán. En castellano tenemos el siguiente:

| | | |
|---|---|---|
| 13 | 2011 | 1015 |
| 2015 | 1013 | 11 |
| 1011 | 15 | 2013 |

$S = 3039$

| | | |
|---|---|---|
| trece | dos mil once | mil quince |
| dos mil quince | mil trece | once |
| mil once | quince | dos mil trece |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 10 | 9 |
| 12 | 8 | 4 |
| 7 | 6 | 11 |

$S = 24$

2) **Antimágicos y Heterocuadrados**: Sus cualidades son opuestas al cuadrado mágico. En el heterocuadrado las sumas de las filas, de las columnas, y de las diagonales son todas diferentes, no existe *S* o suma constante o mágica, pudiendo incluso que estas sumas diferentes forman una sucesión de enteros consecutivos (antimágicos).

| | | | | 34 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | 4 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 26 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 42 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 58 |
| 29 | 31 | 36 | 40 | 35 |

heterocuadrado

| | | | | 34 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 15 | 5 | 13 | 35 |
| 16 | 3 | 7 | 12 | 38 |
| 9 | 8 | 14 | 1 | 32 |
| 6 | 4 | 11 | 10 | 31 |
| 33 | 30 | 37 | 36 | 29 |

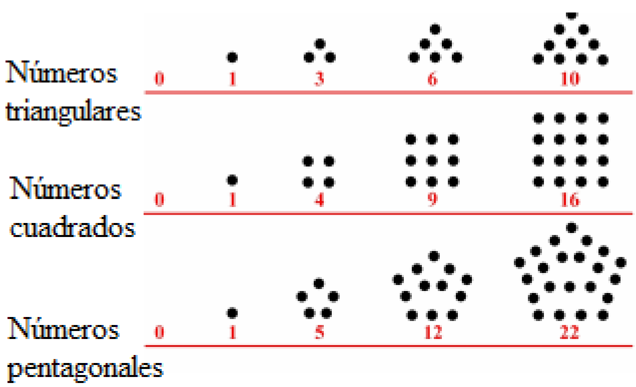
cuadrado antimágico

Los heterocuadrados se pueden construir fácilmente. Si $n$ es impar, se rellena el cuadrado en un patrón en espiral, y si $n$ es par, un heterocuadrado resulta al escribir los números del 1 al $n^2$ en orden, luego se intercambian el 1 y el 2.

Los cuadrados antimágicos de las órdenes uno, dos y tres son imposibles. Hay 18 cuadrados antimágicos de orden cuatro.

Son problemas abiertos los siguientes: ¿Cuántos cuadrados antimágicos de un orden dado existen?¿Existen cuadrados antimágicos para todos los órdenes mayores de 3?¿Existe una demostración sencilla de que no existe un cuadrado antimágicos de orden 3?

3) **Cuadrado mágico de números poligonales**: Es aquel que está formado exclusivamente por números poligonales. El más pequeño cuadrado de este tipo es de orden 6 con constante mágica 1295 que este relleno de los números triangulares consecutivos desde el 0 hasta el 630




| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 406 | 120 | 528 | 105 | 136 |
| 1 | 300 | 435 | 378 | 171 | 10 |
| 66 | 276 | 496 | 15 | 91 | 351 |
| 595 | 78 | 153 | 28 | 210 | 231 |
| 3 | 190 | 55 | 21 | 465 | 561 |
| 630 | 45 | 36 | 325 | 253 | 6 |

4) **Bimágicos y *p*-mágicos:** Si al reemplazar cada número por su cuadrado en un cuadrado mágico se produce otro cuadrado mágico, se dice que el cuadrado es un cuadrado bimágico.
Lucas (1891) y luego Hendricks (1998) demostraron que un cuadrado bimágico de orden 3 es imposible para cualquier conjunto de números, excepto el caso trivial de usar el mismo número 9 veces.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 56 | 34 | 8 | 57 | 18 | 47 | 9 | 31 |
| 33 | 20 | 54 | 48 | 7 | 29 | 59 | 10 |
| 26 | 43 | 13 | 23 | 64 | 38 | 4 | 49 |
| 19 | 5 | 35 | 30 | 53 | 12 | 46 | 60 |
| 15 | 25 | 63 | 2 | 41 | 24 | 50 | 40 |
| 6 | 55 | 17 | 11 | 36 | 58 | 32 | 45 |
| 61 | 16 | 42 | 52 | 27 | 1 | 39 | 22 |
| 44 | 62 | 28 | 37 | 14 | 51 | 21 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 41 | 36 | 5 | 27 | 62 | 55 | 18 |
| 26 | 63 | 54 | 19 | 13 | 44 | 33 | 8 |
| 1 | 40 | 45 | 12 | 22 | 51 | 58 | 31 |
| 23 | 50 | 59 | 30 | 4 | 37 | 48 | 9 |
| 38 | 3 | 10 | 47 | 49 | 24 | 29 | 60 |
| 52 | 21 | 32 | 57 | 39 | 2 | 11 | 46 |
| 43 | 14 | 7 | 34 | 64 | 25 | 20 | 53 |
| 61 | 28 | 17 | 56 | 42 | 15 | 6 | 35 |

Benson y Jacoby (1976) declararon su creencia de que no existen cuadrados bimágicos de orden inferior a 8, y esto fue demostrado posteriormente por Boyer y Trump en 2002.

Wroblewski encontró el primer cuadrado bimágico conocido de orden 6 usando enteros distintos (pero no consecutivos)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 36 | 55 | 124 | 62 | 114 |
| 58 | 40 | 129 | 50 | 111 | 20 |
| 108 | 135 | 34 | 44 | 38 | 49 |
| 87 | 98 | 92 | 102 | 1 | 28 |
| 116 | 25 | 86 | 7 | 96 | 78 |
| 22 | 74 | 12 | 81 | 100 | 119 |

Hay también cuadrados trimágicos,…, $p$-mágicos. Los **cuadrados *p*-mágicos** son aquellos tales que elevadas todas las cifras del cuadrado a la $k$ potencia, siendo $1 \leq k \leq p$, siguen siendo mágicos:

Se han construido cuadrados trimágicos de órdenes 12, 32, 64, 81 y 128; el único de orden 12 fue construido por el matemático alemán Walter Trump en junio de 2002.

- El primer cuadrado tetramágico, de orden 64, lo obtuvo Andrés González, en junio de 1998, usando números del 1 al 4096 sin repetir ninguno de ellos. Puede segregarse en 64 tableros de ajedrez 8x8 que son mágicos. Según González, en esta obra no se usó ningún ordenador para cuadrarlo. El cuadro se encuentra registrado en el Archivo Internacional Central de Objetos de Arte.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 22 | 33 | 41 | 62 | 66 | 79 | 83 | 104 | 112 | 123 | 144 |
| 9 | 119 | 45 | 115 | 107 | 93 | 52 | 38 | 30 | 100 | 26 | 136 |
| 75 | 141 | 35 | 48 | 57 | 14 | 131 | 88 | 97 | 110 | 4 | 70 |
| 74 | 8 | 106 | 49 | 12 | 43 | 102 | 133 | 96 | 39 | 137 | 71 |
| 140 | 101 | 124 | 42 | 60 | 37 | 108 | 85 | 103 | 21 | 44 | 5 |
| 122 | 76 | 142 | 86 | 67 | 126 | 19 | 78 | 59 | 3 | 69 | 23 |
| 55 | 27 | 95 | 135 | 130 | 89 | 56 | 15 | 10 | 50 | 118 | 90 |
| 132 | 117 | 68 | 91 | 11 | 99 | 46 | 134 | 54 | 77 | 28 | 13 |
| 73 | 64 | 2 | 121 | 109 | 32 | 113 | 36 | 24 | 143 | 81 | 72 |
| 58 | 98 | 84 | 116 | 138 | 16 | 129 | 7 | 29 | 61 | 47 | 87 |
| 80 | 34 | 105 | 6 | 92 | 127 | 18 | 53 | 139 | 40 | 111 | 65 |
| 51 | 63 | 31 | 20 | 25 | 128 | 17 | 120 | 125 | 114 | 82 | 94 |

Cuadrado trimágico de orden 12
(constantes mágicas 870, 83.810 y 9 082.800)

5) **Cero o de Aniquilación**: es un cuadrado mágico en donde la suma mágica *S* es igual a cero. En este caso, evidentemente, se tienen que emplear números positivos y negativos.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | - 7 | - 6 | 5 |
| - 4 | 3 | 2 | 1 |
| 1 | - 2 | - 3 | 4 |
| - 5 | 6 | 7 | - 8 |

6) **Pandigital**: cada elemento está formado por las diez cifras decimales sin repetir ninguna y además la suma de sus filas, columnas y diagonales es también pandigital

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1037956284 | 1036947285 | 1027856394 | 1026847395 |
| 1026857394 | 1027846395 | 1036957284 | 1037946285 |
| 1036847295 | 1037856294 | 1026947385 | 1027956384 |
| 1027946385 | 1026957384 | 1037846295 | 1036857294 |

La suma mágica es 4129607358

**7) Concéntrico o de Bordes**: es un cuadrado mágico que al quitar las filas superior e inferior, y las columnas de izquierda y derecha (o sean los bordes) resulta otro cuadrado mágico.
Un cuadrado mágico **anidado** sigue siendo mágico después de que del borde se elimina sucesivamente un anillo cada la vez. Un ejemplo de un cuadrado mágico anidado es el de orden 7 de la figura de abajo (donde los cuadrados de órdenes 5 y 3 obtenidos de él son mágicos).

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | 1 | 2 | 3 | 42 | 41 | 46 |
| 38 | 31 | 13 | 14 | 32 | 35 | 12 |
| 39 | 30 | 26 | 21 | 28 | 20 | 11 |
| 43 | 33 | 27 | 25 | 23 | 17 | 7 |
| 6 | 16 | 22 | 29 | 24 | 34 | 44 |
| 5 | 15 | 37 | 36 | 18 | 19 | 45 |
| 4 | 49 | 48 | 47 | 8 | 9 | 10 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 31 | 13 | 14 | 32 | 35 |
| 30 | 26 | 21 | 28 | 20 |
| 33 | 27 | 25 | 23 | 17 |
| 16 | 22 | 29 | 24 | 34 |
| 15 | 37 | 36 | 18 | 19 |

| | | |
|---|---|---|
| 26 | 21 | 28 |
| 27 | 25 | 23 |
| 22 | 29 | 24 |

El siguiente (Madachy 1979) es un cuadrado anidado de orden 13, por lo que los interiores de órdenes 11; 9, 7, 5 y 3 son subcuadrados mágicos

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1153 | 8923 | 1093 | 9127 | 1327 | 9277 | 1063 | 9133 | 9661 | 1693 | 991 | 8887 | 8353 |
| 9967 | 8161 | 3253 | 2857 | 6823 | 2143 | 4447 | 8821 | 8713 | 8317 | 3001 | 3271 | 907 |
| 1831 | 8167 | 4093 | 7561 | 3631 | 3457 | 7573 | 3907 | 7411 | 3967 | 7333 | 2707 | 9043 |
| 9907 | 7687 | 7237 | 6367 | 4597 | 4723 | 6577 | 4513 | 4831 | 6451 | 3637 | 3187 | 967 |
| 1723 | 7753 | 2347 | 4603 | 5527 | 4993 | 5641 | 6073 | 4951 | 6271 | 8527 | 3121 | 9151 |
| 9421 | 2293 | 6763 | 4663 | 4657 | 9007 | 1861 | 5443 | 6217 | 6211 | 4111 | 8581 | 1453 |
| 2011 | 2683 | 6871 | 6547 | 5227 | 1873 | 5437 | 9001 | 5647 | 4327 | 4003 | 8191 | 8863 |
| 9403 | 8761 | 3877 | 4783 | 5851 | 5431 | 9013 | 1867 | 5023 | 6091 | 6997 | 2113 | 1471 |
| 1531 | 2137 | 7177 | 6673 | 5923 | 5881 | 5233 | 4801 | 5347 | 4201 | 3697 | 8737 | 9343 |
| 9643 | 2251 | 7027 | 4423 | 6277 | 6151 | 4297 | 6361 | 6043 | 4507 | 3847 | 8623 | 1231 |
| 1783 | 2311 | 3541 | 3313 | 7243 | 7417 | 3301 | 6967 | 3463 | 6907 | 6781 | 8563 | 9091 |
| 9787 | 7603 | 7621 | 8017 | 4051 | 8731 | 6427 | 2053 | 2161 | 2557 | 7873 | 2713 | 1087 |
| 2521 | 1951 | 9781 | 1747 | 9547 | 1597 | 9811 | 1741 | 1213 | 9181 | 9883 | 1987 | 9721 |

Además la constante mágica de cada uno de ellos difiere en 10874 respecto de la del anterior. Es decir, la del de orden 11 es 70681 – 10874 = 59807; la del de orden 9 es 59807 – 10874 = 48933; la del de orden 7 es 48933 – 10874 = 38059; la del cuadrado de orden 5 es 38059 – 10874 = 27185; y la del de orden 3 es 27185 – 10874 = 16311.

8) **Multiplicativo**: es un cuadrado mágico en donde se emplea la multiplicación en vez de la suma para obtener la cantidad constante en filas, columnas, y diagonales, en este caso llamada "*P*".

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 1 | 18 |
| 9 | 6 | 4 |
| 2 | 36 | 3 |

El anterior es el cuadrado mágico multiplicativo más sencillo. Es un cuadrado mágico multiplicativo de grado 3, con la constante $P = 216$. El siguiente es de orden 4 y constante 240:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 3 | 4 |
| 12 | 1 | 2 | 10 |
| 2 | 15 | 8 | 1 |
| 2 | 4 | 5 | 6 |

Cuando los números que componen el cuadro mágico son términos de una progresión geométrica se llaman **cuadrados mágicos geométricos**:

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 64 | 32 |
| 256 | 16 | 1 |
| 8 | 4 | 128 |

Como se puede apreciar, los elementos son potencias consecutivas de base 2. Este método es general, es decir, se puede construir un cuadrado mágico multiplicativo, usando inicialmente un cuadrado mágico normal, empleando sus números como exponentes de un número tomado como base fijo.

La constante mágica es en el caso de una progresión geométrica general

$$P = \sqrt[n]{\left(a_1^2\ r^{(n^2-1)}\right)}$$

Un **cuadrado mágico aditivo-multiplicativo** es un cuadrado de números enteros que lo es simultáneamente aditivo y multiplicativo.

*Horner (1955)*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 46 | 81 | 117 | 102 | 15 | 76 | 200 | 203 |
| 19 | 60 | 232 | 175 | 54 | 69 | 153 | 78 |
| 216 | 161 | 17 | 52 | 171 | 90 | 58 | 75 |
| 135 | 114 | 50 | 87 | 184 | 189 | 13 | 68 |
| 150 | 261 | 45 | 38 | 91 | 136 | 92 | 27 |
| 119 | 104 | 108 | 23 | 174 | 225 | 57 | 30 |
| 116 | 25 | 133 | 120 | 51 | 26 | 162 | 207 |
| 39 | 34 | 138 | 243 | 100 | 29 | 105 | 152 |

*Boyer (2005)*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 75 | 38 | 207 | 102 | 11 | 20 | 91 | 56 |
| 5 | 44 | 49 | 104 | 57 | 50 | 153 | 138 |
| 133 | 200 | 17 | 92 | 45 | 66 | 21 | 26 |
| 99 | 30 | 39 | 14 | 175 | 152 | 23 | 68 |
| 78 | 63 | 22 | 15 | 184 | 119 | 100 | 19 |
| 136 | 161 | 76 | 25 | 42 | 117 | 10 | 33 |
| 28 | 13 | 40 | 77 | 34 | 69 | 114 | 225 |
| 46 | 51 | 150 | 171 | 52 | 7 | 88 | 35 |

El concepto de cuadrado mágico maxiperfecto puede extenderse a cuadrados mágicos multiplicativos

9) **Palíndromo o Capicúa**: esta palabra se refiere la cualidad que tienen algunos números, palabras, o frases, que se leen igual de izquierda a derecha que en sentido inverso. Los cuadrados mágicos palíndromos o capicúas contienen esta clase números en todas sus celdas, y las sumas de sus filas, columnas y diagonales producen una suma (*S*) constante o mágica.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **222** | **595** | **888** | **737** | 2442 |
| | **959** | **666** | **373** | **444** | 2442 |
| | **777** | **848** | **555** | **262** | 2442 |
| | **484** | **333** | **626** | **999** | 2442 |
| 2442 | 2442 | 2442 | 2442 | 2442 | 2442 |

10) **Primos**: aquí se tratan los cuadrados mágicos escritos con números primos.

En términos de números enteros, el primo es aquel número que no es divisible por otro número excepto por 1. (En el pasado ha habido discusiones acerca del número uno, si es primo o no).

Aceptada la convención actual de que el 1 no es primo, el único cuadrado mágico primo de orden tres, con la constante más baja ($S$ = 177) es el mostrado en la siguiente figura

| | | |
|---|---|---|
| 17 | 113 | 47 |
| 89 | 59 | 29 |
| 71 | 5 | 101 |

En 1988 Martin Gardner el célebre divulgador científico, ofreció un premio de $100 para la persona que consiguiera un cuadrado mágico de orden tres formado por números primos en progresión aritmética, ese mismo año Harry Nelson, presentó 22 soluciones, utilizó para hallarlas un ordenador de la Universidad de California, reproducimos aquí el cuadrado de constante más pequeña.

| | | |
|---|---|---|
| **1 480 028 201** | **1 480 028 129** | **1 480 028 183** |
| **1 480 028 153** | **1 480 028 171** | **1 480 028 189** |
| **1 480 028 159** | **1 480 028 213** | **1 480 028 141** |

El siguiente es un cuadrado mágico con los primeros 144 números primos, aunque con dos excepciones: no está el número 2 (el único primo par) y se incluye el número 1 a pesar de que no es primo. Por lo demás, como mandan los cánones de los cuadrados mágicos, cada fila y columna y también las dos diagonales principales suman lo mismo: 4514

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 823 | 821 | 809 | 811 | 797 | 19 | 29 | 313 | 31 | 23 | 37 |
| 89 | 83 | 211 | 79 | 641 | 631 | 619 | 709 | 617 | 53 | 43 | 739 |
| 97 | 227 | 103 | 107 | 193 | 557 | 719 | 727 | 607 | 139 | 757 | 281 |
| 223 | 653 | 499 | 197 | 109 | 113 | 563 | 479 | 173 | 761 | 587 | 157 |
| 367 | 379 | 521 | 383 | 241 | 467 | 257 | 263 | 269 | 167 | 601 | 599 |
| 349 | 359 | 353 | 647 | 389 | 331 | 317 | 311 | 409 | 307 | 293 | 449 |
| 503 | 523 | 233 | 337 | 547 | 397 | 421 | 17 | 401 | 271 | 431 | 433 |
| 229 | 491 | 373 | 487 | 461 | 251 | 443 | 463 | 137 | 439 | 457 | 283 |
| 509 | 199 | 73 | 541 | 347 | 191 | 181 | 569 | 577 | 571 | 163 | 593 |
| 661 | 101 | 643 | 239 | 691 | 701 | 127 | 131 | 179 | 613 | 277 | 151 |
| 659 | 673 | 677 | 683 | 71 | 67 | 61 | 47 | 59 | 743 | 733 | 41 |
| 827 | 3 | 7 | 5 | 13 | 11 | 787 | 769 | 773 | 419 | 149 | 751 |

11) **Reducidos o Frénicles**: se trata de cuadrados mágicos en donde como es habitual se obtiene la misma suma ($S$) para filas, columnas, y diagonales, y además llevan un mismo número de celdas vacías ($V$) en cada una de sus filas, columnas, y diagonales. El nombre de Frénicle se origina por que en 1640, Bernard Frénicle de Bessy propuso esta clase de problema.

Aquí se exponen varios ejemplos de este tipo con diferentes variaciones.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 7 | 15 |
| 10 | 11 | | | 3 |
| | 4 | 8 | 12 | |
| 13 | | | 5 | 6 |
| 1 | 9 | 14 | | |

Cuadrado mágico Frénicle de grado 5, con celdas vacías $V$ = 2, y con una suma constante $S$ = 24.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 601 | 491 | 367 | 137 | 1596 |
| | 277 | 227 | | 431 | 661 | 1596 |
| | 521 | 571 | 337 | 167 | | 1596 |
| | 107 | | 461 | 631 | 397 | 1596 |
| | 691 | 197 | 307 | | 401 | 1596 |
| 1596 | 1596 | 1596 | 1596 | 1596 | 1596 | 1596 |

Cuadrado mágico de Frénicle de grado 5, con una celda vacía por fila, columna y diagonal, con una suma constante *S* = 1596, y empleando los números primos regularmente espaciados .

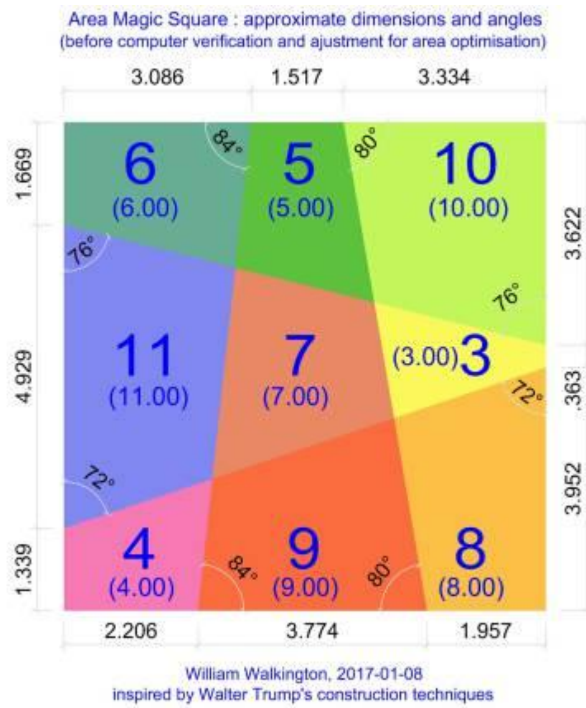
12) **Reversibles**: se trata de un par de cuadrados mágicos en donde el segundo cuadrado se origina al colocar al revés los números del primero.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 96 | 64 | 37 | 45 |
| 39 | 43 | 98 | 62 |
| 84 | 76 | 25 | 57 |
| 23 | 59 | 82 | 78 |

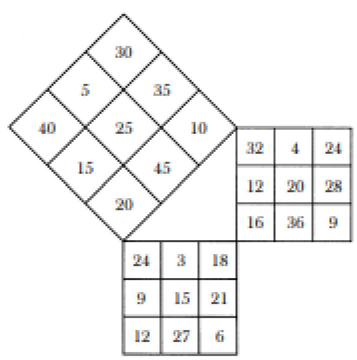
Del cuadrado mágico  anterior se origina el siguiente cuadrado mágico al revertir los números de cada celda, por ejemplo: de 96 a 69; de 64 a 46, etc. Se mantiene en este nuevo cuadrado la suma mágica *S* = 242:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 69 | 46 | 73 | 54 |
| 93 | 34 | 89 | 26 |
| 48 | 67 | 52 | 75 |
| 32 | 95 | 28 | 87 |

13) **Cuadrado de áreas mágicas:** En él, cada región tiene de área el número que incluye, y el resultado da un cuadrado mágico habitual (filas, columnas y diagonales suman lo mismo).




14) **Pitagóricos:** Son conjuntos de tres cuadrados mágicos posicionados en los lados de un triángulo rectángulo tales que la suma de los cuadrados de los números en el cuadrado mágico de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los números en los cuadrados mágicos de los catetos




Los números usados en los cuadrados mágicos son: $c$, $2c$, $3c$ , . . . , $cN^2$ , donde $c$ es la longitud de la hipotenusa y $N$ es el orden del cuadrado mágico. Análogamente, los otros cuadrados están completados con $a$, $2a$, $3a$, . . . , $aN^2$ y $b$, $2b$, $3b$, . . . , $bN^2$ .

En los cuadrados mágicos d orden impar siempre hay una terna pitagórica


15) **Taliman:** Son cuadrados mágicos en los cuales la diferencia entre cada elemento y sus vecinos (en horizontal, vertical y diagonal) es mayor que un número dado

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 1 | 12 | 4 | 9 |
| 20 | 7 | 22 | 18 | 24 |
| 16 | 2 | 13 | 5 | 10 |
| 21 | 8 | 23 | 19 | 25 |
| 17 | 3 | 14 | 6 | 11 |

En este la diferencia es mayor que 4. Notar que en los cuadrados mágicos de orden 3 no puede ser la diferencia mayor de 1.

Estos cuadrados son conocidos desde 1970 y no hay reglas, hasta ahora, para su construcción

16) **Periódicos**: Son aquellos derivados del desarrollo decimal de una fracción periódica.
Por ejemplo, el desarrollo decimal de la fracción 1/19 tiene un periodo formado por 18 cifras. Las sucesivas fracciones de denominador 19 contienen las mismas cifras en el mismo orden cíclico y, con ellas, puede construirse el siguiente cuadrado mágico (de suma 81):

1/19 = 0,052631578947368421
2/19 = 0,105263157894736842
3/19 = 0,157894736842105263
4/19 = 0,210526315789473684
5/19 = 0,263157894736842105
6/19 = 0,315789473684210526
7/19 = 0,368421052631578947
8/19 = 0,421052631578947368
9/19 = 0,473684210526315789
10/19 = 0,526315789473684210
11/19 = 0,578947368421052631
12/19 = 0,631578947368421052
13/19 = 0,684210526315789473
14/19 = 0,736842105263157894
15/19 = 0,789473684210526315
16/19 = 0,842105263157894736
17/19 = 0,894736842105263157
18/19 = 0,947368421052631578

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 |
| 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 |
| 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 |
| 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 |
| 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 |
| 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 |
| 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 |
| 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 |
| 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 |
| 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 |
| 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 |
| 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 |
| 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 |
| 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 |
| 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 |
| 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 |
| 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 |
| 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 |

De hecho, este cuadrado es el más pequeño que se puede construir con los decimales de una fracción periódica. El siguiente cuadrado mágico que se puede construir a partir de un número cíclico corresponde a la parte periódica de 1/383.

**►Retos con cuadrados mágicos**

Vemos un ejemplo que ilustra el interés que ha despertado entre los matemáticos este tipo de desafíos: es el cuadrado mágico que envió Leonhard Euler a Joseph-Louis Lagrange en 1770, el cual está formado solo por números cuadrados. La constante mágica es igual a 8.515:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $68^2$ | $29^2$ | $41^2$ | $37^2$ |
| $17^2$ | $31^2$ | $79^2$ | $32^2$ |
| $59^2$ | $28^2$ | $23^2$ | $61^2$ |
| $11^2$ | $77^2$ | $8^2$ | $49^2$ |

El reto está servido: ¿serías capaz de encontrar un cuadrado mágico de orden 3, que esté formado por números cuadrados? En 1996, **Martin Gardner** ofreció una recompensa de 100$ a la primera persona que lo consiguiera. En abril de 2010, **Christian Boyer** amplió la oferta y publicó una lista de seis enigmas (incluyendo el anteriormente descrito). Ofreció una recompensa de 8.000€ y 12 botellas de champán a repartir entre quienes resuelvan dichos enigmas.

Describiremos algunos de ellos. El primero, con un premio de 1.000€ y una botella de champán, es una versión simplificada del planteado por Martin Gardner: ¿eres capaz de encontrar un cuadrado mágico de orden 3, que tenga al menos siete números cuadrados? No vale el único conocido hasta el momento:

| | | |
|---|---|---|
| $373^2$ | $289^2$ | $565^2$ |
| 360721 | $425^2$ | $23^2$ |
| $205^2$ | $527^2$ | 222121 |

Andrew Bremmer y Lee Sallows descubrieron de forma independiente este cuadrado mágico de cuadrados, aunque necesitaron completarlo con los números 360721 y 222121, que no son cuadrados. Para no ahondar en el tema, describiremos un segundo enigma de la lista de Boyer, también premiado con 1000€ y una botella de champán: ¿podrías construir un cuadrado semimágico de orden 3, que esté formado solo por cubos de números naturales? Lo mejor que se ha conseguido hasta el momento es un cuadrado semimágico con ocho cubos y es el siguiente:

| | | |
|---|---|---|
| $51^3$ | $619^3$ | $165^3$ |
| $618^3$ | $162^3$ | $115^3$ |
| $178^3$ | $72^3$ | 235788435 |

El creador de puzzles Pierre Berloquin propuso el problema de construir cuadrados mágicos con números primos en progresión aritmética en su libro de 1976 titulado "*100 juegos numéricos*". Lo llamo apropiadamente Primos mágicos. El teorema de Green y Tao (2004) asegura que **existen** progresiones aritméticas de números primos de cualquier longitud, (en 2017, la más larga que se había encontrado era una de 26 elementos), con lo cual se podrían construir cuadrados mágicos con sólo números primos de cualquier tamaño.

$$43142746595714191 + 23681770 \cdot 223092870 \cdot n,\ n = 0, 1, \ldots, 25.$$

Estos y otros ejemplos son una muestra de que muchos problemas matemáticos pueden ser difíciles de resolver a pesar de tener un planteamiento elemental. Esto permite además aplicar el ingenio, la creatividad y la constancia en la búsqueda de soluciones, cualidades que no están reservadas a los matemáticos profesionales. Algunas especialidades matemáticas han surgido precisamente a partir de soluciones ingeniosas a problemas aparentemente elementales.

Los 12 enigmas de Christian Boyer eran los siguientes: se trata de construir o probar la imposibilidad de construir

1. Un cuadrado mágico 3x3 usando 7 (u 8, ó 9) enteros al cuadrado, diferentes.
2. Un cuadrado bimágico 5x5 usando enteros positivos distintos.
3. Un cuadrado semimágico 3x3 de cubos usando enteros positivos distintos elevados al cubo (pequeño enigma #3a: cuadrado 7×7).
4. Un cuadrado mágico 4x4 de cubos usando enteros positivos distintos elevados al cubo (pequeños enigmas #4a, #4b, #4c: cuadrados 5×5, 6×6 y 7×7).
5. Un cubo mágico multiplicativo usando enteros positivos distintos < 364.
6. Un cuadrado mágico aditivo-multiplicativo 5x5 usando enteros positivos distintos (pequeños enigmas #6a, #6b: cuadrados 6×6 y 7×7).

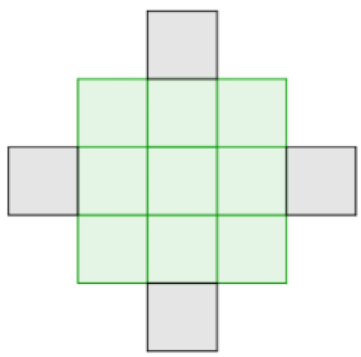
De momento quedan por resolver los números; #2 #4; #4a; #4b; #6; #6a

**►Construcción de cuadrados mágicos**

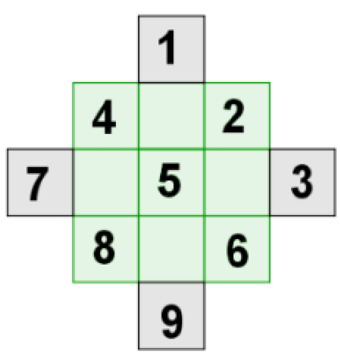
Para la construcción de cuadrados mágicos tenemos varios procedimientos, cuyo uso depende del orden del cuadrado que queramos construir. Existen reglas para construir cuadrados de orden impar, cuadrados de orden $4k$ y cuadrados de orden $4k + 2$. Es decir, podemos construir cuadrados de cualquier orden pero con procedimientos distintos según el tipo. Comentamos los dos primeros, por ser el método general para el último bastante más complicado.

*Cuadrados mágicos de órdenes impar*

Método de Bachet*:* Empieza dibujando el esqueleto de tu cuadrado. Después añade casillas en todos los laterales, hasta formar un rombo.



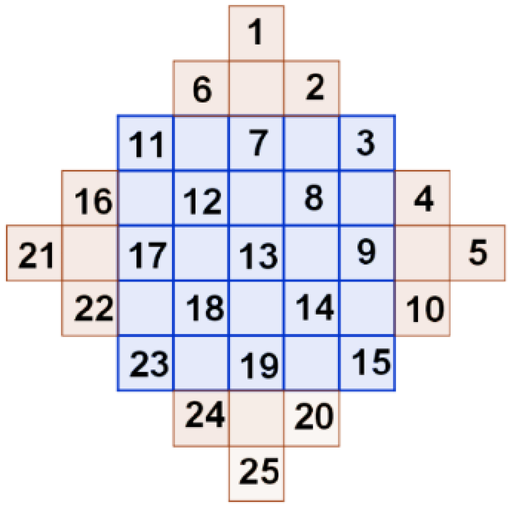
Ahora, se empieza en el extremo superior con el 1 y se coloca todas las cifras siguiendo las diagonales alternas formadas en el rombo.




Sólo falta completar el cuadrado mágico. ¿De qué forma? Se utiliza una especie de simetría. Las celdas externas de la parte superior pasan a completar la parte inferior. Y las de la parte inferior pasan a la parte superior. De la misma forma usamos después una simetría vertical.

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

Veamos otro ejemplo




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 24 | 7 | 20 | 3 |
| 4 | 12 | 25 | 8 | 16 |
| 17 | 5 | 13 | 21 | 9 |
| 10 | 18 | 1 | 14 | 22 |
| 23 | 6 | 19 | 2 | 15 |

*Cuadrados mágicos de órdenes* $4k$

Construimos un cuadrado con los números dispuestos de forma consecutiva. Una vez hecho esto conservamos la submatriz central de orden $n/2$ y las cuatro submatrices de las esquinas de orden $n/4$. Los números restantes se giran 180º respecto del centro del cuadrado, o si se prefiere se recolocan en orden decreciente.

Para $k = 1$ obtenemos el siguiente cuadrado mágico de orden 4

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 14 | 4 |
| 12 | 6 | 7 | 9 |
| 8 | 10 | 11 | 5 |
| 13 | 3 | 2 | 16 |

Para $k$ = 2 obtenemos el siguiente cuadrado mágico de orden 8:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

⇨

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 62 | 61 | 60 | 59 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 54 | 53 | 52 | 51 | 15 | 16 |
| 48 | 47 | 19 | 20 | 21 | 22 | 42 | 41 |
| 40 | 39 | 27 | 28 | 29 | 30 | 34 | 33 |
| 32 | 31 | 35 | 36 | 37 | 38 | 26 | 25 |
| 24 | 23 | 43 | 44 | 45 | 46 | 18 | 17 |
| 49 | 50 | 14 | 13 | 12 | 11 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 6 | 5 | 4 | 3 | 63 | 64 |

**►Construcción de algunos cuadrados mágicos particulares. El del cumpleaños**

Si a, b y c son tres números enteros cualesquiera, la siguiente disposición muestra la forma general de un cuadrado mágico de orden 3:

| | | |
|---|---|---|
| a + b | a – (b + c) | a + c |
| a – (b – c) | a | a + (b – c) |
| a – c | a + (b + c) | a – b |

*Cuadrado mágico instantáneo*

Este juego, original de Royal V. Heath y publicado por John Hilliard en el libro Greater Magic, permite simular gran habilidad en la construcción de un cuadrado mágico cuya suma constante sea elegida por un espectador. Para realizar el juego, pide a un espectador que nombre un número cualquiera, entre 23 y 100. A continuación, escribe en una hoja de papel una tabla cuadriculada de tamaño 4x4 y, rápidamente, rellena cada cuadro con los siguientes números:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | 1 | 12 | 7 |
| 11 | 8 | b | 2 |
| 5 | 10 | 3 | c |
| 4 | d | 6 | 9 |

Observar que la mayoría de cuadros contienen un valor fijo, independiente de la elección del número. Solo hay cuatro números que dependen del resultado deseado. Si llamamos $N$ al número elegido, para conseguir un cuadrado mágico con constante igual a $N$, sustituye los valores “a”, “b”, “c” y “d” por $N$ – 20, $N$ – 21, $N$ – 18 y $N$ – 19, respectivamente. Por ejemplo, si el número elegido es $N$ = 31, la tabla quedaría así:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11 | 1 | 12 | 7 |
| 11 | 8 | 10 | 2 |
| 5 | 10 | 3 | 13 |
| 4 | 12 | 6 | 9 |

Se puede comprobar que es un cuadrado mágico, pues la suma de las filas, las columnas y las diagonales es igual a *N.* Además se trata de un cuadrado pandiagonal, pues también es igual a *N* la suma de los valores de las diagonales secundarias. Más aún, es un cuadrado maxiperfecto.

*Cuadrado mágico del cumpleaños*

El caso más sencillo es poner la fecha de nacimiento como un número de tres cifras: la primera corresponde al número del día del nacimiento (D); la segunda al número del mes (M) y la tercera a las dos últimas cifras del año del nacimiento (A). Se construye un cuadrado mágico de tamaño 3x3 en base a la siguiente distribución:

| | | |
|---|---|---|
| A + D + 2M | A | A + 2D + M |
| A + 2D | A + D + M | A + 2M |
| A + M | A + 2D + 2M | A + D |

El método utilizado asegura que se trata de un cuadrado mágico de suma constante 3.(D + M + A). Supongamos que se trata del 12 de marzo de 2004 (12/03/04) Con estos datos: D = 12; M = 3; A = 4. Que llevado al cuadrado mágico anterior, tendríamos:

| | | |
|---|---|---|
| 22 | 4 | 31 |
| 28 | 19 | 10 |
| 7 | 34 | 16 |

Si consideramos el día de nacimiento (A), el número del mes de nacimiento (B); el número del año del nacimiento en grupos de dos cifras (C y D), el siguiente podría servirnos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| C+1 | D-1 | A+1 | B-1 |
| D-2 | C-2 | B+2 | A+2 |
| B+1 | A+3 | D-3 | C-1 |

pues es un cuadrado mágico de suma mágica A + B + C + D( Podría salir alguna casilla negativa, si C < 2 (difícil); D < 3)

Mostramos a continuación otra forma de construir un cuadrado mágico personalizado con la fecha de nacimiento de cualquier persona. (En realidad sirve para cualquier cuaterna de números *a*, *b*, *c*, *d*). Coloca tu fecha de nacimiento en primera línea, asigna valores enteros arbitrarios a *m* y *n*, y calcula tu propio cuadrado mágico

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $d+m+n$ | $c-m-n$ | $b-m+n$ | $a+m-n$ |
| $b-m$ | $a+m$ | $d+m$ | $c-m$ |
| $c-n$ | $d+n$ | $a-n$ | $b+n$ |

De constante mágica $a + b + c + d$. Para que salgan números positivos,tiene que ocurrir: $a > n$; $b > m$; $c > m$; $c > n$; $c > m + n$

Este no es panmágico. Si queremos uno panmágico

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $(s - a) + n$ | $(s - b) - \mathrm{n}$ | $(s - c) + n$ | $(s - d) - n$ |
| $s - c$ | $s - d$ | $s - a$ | $s - b$ |
| $c - n$ | $d + n$ | $a - n$ | $b + n$ |

Donde $s = (a + b + c + d)/2$ y n es un número arbitrario.

Otro fórmula general equivalente, pero dónde se ve que es fácil que salgan números decimales, aun a pesar de que a $k$ que se pueden dar un valor arbitrario, es la siguiente:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $\frac{b+c+d-a}{2}+k$ | $\frac{a-b+c+d}{2}-k$ | $\frac{a+b-c+d}{2}+k$ | $\frac{a+b+c-d}{2}-k$ |
| $\frac{a+b-c+d}{2}$ | $\frac{a+b+c-d}{2}$ | $\frac{b+c+d-a}{2}$ | $\frac{a-b+c+d}{2}$ |
| $c-k$ | $d+k$ | $a-k$ | $b+k$ |

Siendo $a$, $b$, $c$, $d$ las cifra de los días, meses y años (partido en grupos de dos cifras).

**El cuadrado mágico de Ramanujan**

*Srinivasa Ramanujan*, (1887 – 1920), célebre matemático de la India, confeccionó para sí el cuadrado mágico siguiente:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 22 | 12 | 18 | 87 |
| 88 | 17 | 9 | 25 |
| 10 | 24 | 89 | 16 |
| 19 | 86 | 23 | 11 |

Si bien satisface solo 36 de las 52 relaciones para ser panmágico, tiene la particularidad de llevar su fecha de nacimiento en primera línea: 22 de diciembre de 1887.

¿Por qué Ramanujan no produjo un cuadrado panmágico con su fecha de nacimiento en la primera línea? La respuesta es que la fecha de nacimiento dé lugar a una suma $S = a + b + c + d$ que sea par. Sin embargo, para Ramanujan, esta suma es igual a 22 + 12 + 18 + 87 = 139.

Y es así como, por intermedio de los cuadrados mágicos, el mundo de los seres humanos se divide inexorablemente en dos. Por una parte, están las personas afortunadas que nacieron en una fecha que genera un número par, y poseen por tanto cuadrados panmágicos de números enteros. Por otro lado, están aquellos desafortunados como Ramanujan que solo tienen cuadrados semipanmágicos debido a haber nacido en una fecha impar.

Otro cuadrado mágico más sencillo para la fecha del cumpleaños, pero pueden salir números negativos si MM < 2 y YY = 00

| | | | |
|---|---|---|---|
| DD | MM | CC | YY |
| YY+1 | CC-1 | MM-3 | DD+3 |
| MM-2 | DD+2 | YY+2 | CC-2 |
| CC+1 | YY-1 | DD+1 | MM-1 |

**Los cuadrados panmágicos de orden** 5 **como obituarios**

Uno de los más grandes matemáticos de la historia, *Leonhard Euler*, se interesó mucho en los cuadrados mágicos, llegando incluso a escribir un tratado sobre ellos. Nació el 15 de abril de 1707 y murió el 18 de septiembre de 1783, a la edad de 77 años. En honor a él, tenemos el cuadrado de abajo. Notarás rápidamente que los números de las casillas coloreadas corresponden a los de su fecha de nacimiento y muerte, y que el cuadrado es panmágico con suma igual a 77. Ahora bien, la imposición de estas condiciones fuerza que algunas entradas sean números negativos, si bien todos son enteros.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 69 | 04 | -09 | 17 | -04 |
| 15 | 04 | -05 | 56 | 07 |
| -18 | 59 | 31 | 02 | 03 |
| 18 | 01 | -10 | -15 | 83 |
| -07 | 09 | 70 | 17 | -12 |

Damos la fórmula general de los cuadrados panmágicos 5×5.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $s+n-\mu$ | $k$ | $p+q-\mu$ | $\ell$ | $r+m-\mu$ |
| $p$ | $\ell+r-\mu$ | $m+n-\mu$ | $k+s-\mu$ | $q$ |
| $k+m-\mu$ | $q+s-\mu$ | $\mu$ | $p+r-\mu$ | $\ell+n-\mu$ |
| $r$ | $p+n-\mu$ | $k+\ell-\mu$ | $q+m-\mu$ | $s$ |
| $\ell+q-\mu$ | $m$ | $r+s-\mu$ | $n$ | $k+p-\mu$ |

Resulta interesante señalar que la suma asociada a este cuadrado es igual a

$$k+\ell+m+n+p+q+r+s-3\mu.$$

Por esta razón, para colocar las fechas de nacimiento y de muerte de una persona en un cuadrado panmágico que tenga a la cantidad de años vividos por la persona como suma, es necesario que se satisfaga una condición aritmética de divisibilidad por 3 entre todas estas cifras. Una vez más, los números de Ramanujan no son buenos para esto.

**►Cuadrados latinos**

Los cuadrados mágicos están estrechamente emparentados con los **cuadrados latinos**, en los que $n$ números (u otros signos) se repiten en una cuadrícula $n$x$n$ de forma que cada número aparezca una y solo una vez en cada fila y cada columna. Los cuadrados latinos son conocidos desde la antigüedad, y ya los árabes e indios los usaban como amuletos. Una aparición más moderna ocurre en el siglo XIII, cuando el filósofo Ramón Llull (1232-1315) introduce en su texto "*Ars*

*Demostrativa*" (1283) cuatro cuadrados latinos de orden 4, utilizando como símbolos los cuatro elementos: fuego, aire, agua y tierra.

PRIMA FIGURA
ELEMENTALIS.

Figura Ignis

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ignis | Aër | Aqua | Terra |
| Aër | Ignis | Terra | Aqua |
| Aqua | Terra | Ignis | Aër |
| Terra | Aqua | Aër | Ignis |

Figura Aëris

| | | | |
|---|---|---|---|
| Aër | Ignis | Aqua | Terra |
| Ignis | Aër | Terra | Aqua |
| Aqua | Terra | Aër | Ignis |
| Terra | Aqua | Ignis | Aër |

Figura Aquæ

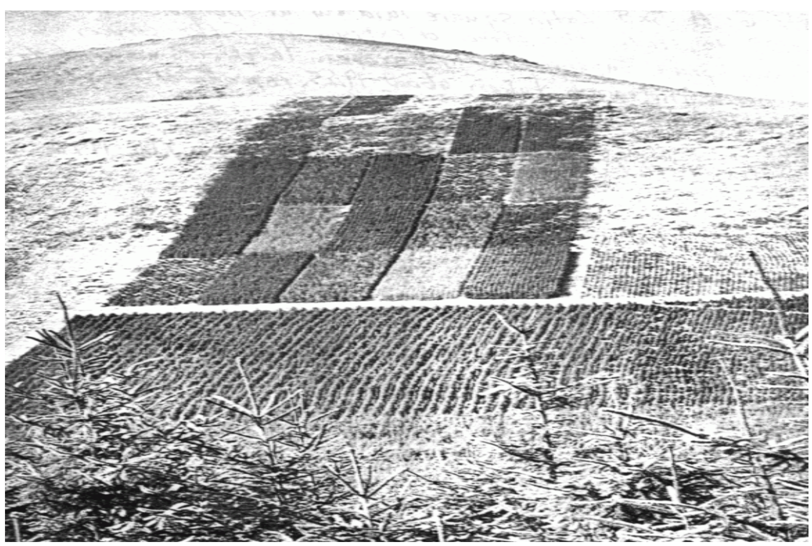
| | | | |
|---|---|---|---|
| Aqua | Terra | Aër | Ignis |
| Terra | Aqua | Ignis | Aër |
| Aër | Ignis | Aqua | Terra |
| Ignis | Aër | Terra | Aqua |

Figura Terræ

| | | | |
|---|---|---|---|
| Terra | Aqua | Aër | Ignis |
| Aqua | Terra | Ignis | Aër |
| Aër | Ignis | Terra | Aqua |
| Ignis | Aër | Aqua | Terra |

Se llaman cuadrados latinos porque Leonhard Euler los estudió utilizando caracteres latinos en lugar de números (aunque no fue él quien los inventó; los primeros ejemplos se remontan a un manuscrito árabe del siglo XIII)

Los cuadrados latinos, tienen interesantes aplicaciones en estadística (en el diseño de experimentos), en álgebra, en teoría de la información: Conjuntos de cuadrados latinos han encontrado una aplicación como códigos de corrección de errores en situaciones donde la comunicación se ve perturbada por ruido, como cuando se intenta transmitir Internet de banda ancha a través de líneas eléctricas, en criptografía, en geometría proyectiva, o en juegos matemáticos. Veamos un sencillo ejemplo de su utilización en el diseño de experimentos estadísticos.



Fotografía del cuadrado latino más famoso que se ha utilizado en diseño de experimentos. El diseño fue realizado por el matemático y estadístico R. A. Fisher en 1926, y llevado a la práctica en 1929 en el Bosque Beddgelert, en el norte de Gales, para estudiar el comportamiento de cinco tipos de árboles.

Imaginemos que queremos estudiar el comportamiento de cuatro fertilizantes, llamémosles A, B, C y D, sobre el cultivo de una cierta planta en un invernadero, en diferentes condiciones de luz y temperatura, por ejemplo, con un 25%, 50%, 75% y 100% de exposición a la luz del sol, y a 15º, 20º, 25º y 30º de temperatura. Entonces montamos una estructura reticular cuadrada en el invernadero, en la que cada fila se corresponde con una exposición diferente a la luz del sol y cada columna con una temperatura distinta. Para el diseño del experimento estadístico se disponen los fertilizantes siguiendo un diseño de cuadrado latino (por ejemplo el que aparece en la siguiente imagen) para que en cada temperatura, y también para cada exposición al sol, se utilice uno y solo uno de los fertilizantes.

| | 25% | 50% | 75% | 100% |
|---|---|---|---|---|
| 15º | A | B | C | D |
| 20º | B | D | A | C |
| 25º | C | A | D | B |
| 30º | D | C | B | A |

**►Sudokus**

El Sudoku (una vez resuelto correctamente) es un cuadrado latino de 9x9, con la condición adicional de que en las subcuadrículas remarcadas de 3x3 también tienen que estar los dígitos del 1 al 9 , una y solo una vez.

Contrariamente al cuadrado mágico, cuyo origen se pierde en la noche de los tiempos, el sudoku es un invento moderno, de nuestros días, y tiene aquello que llamamos ficha de trazabilidad con fechas, nombres y apellidos. El sudoku, con el nombre de *number place,* fue inventado en 1979 por el arquitecto americano Howard Garns; fue rediseñado a la forma que le conocemos ahora y bautizado como *sudoku* (expresión japonesa que se puede traducir por "el número debe aparecer sólo una vez "*Sūji wa dokushin ni kagiru* (数字は独身に限る). El nombre se abrevió a Sūdoku (sū = número, doku = solo) por el japonés Maki Kaji en 1980 y lanzado al gran público a iniciativa del juez jubilado neozelandés Wayne Gould, a través de negociaciones a lo largo del tiempo con empresas editoras de periódicos a partir de 1997. Hay que decir que la aceptación del pasatiempo por el público fue prácticamente inmediata: en 2004 sólo insertaba sudokus en sus páginas el *Times*; en 2005 se le unió el *Daily Telegraph*; en 2006 ya publicaban sudokus diarios de sesenta países y, a finales de 2007, ya eran noventa los países, hasta llegar a nuestros días en que se pueden encontrar casi en cualquier diario.

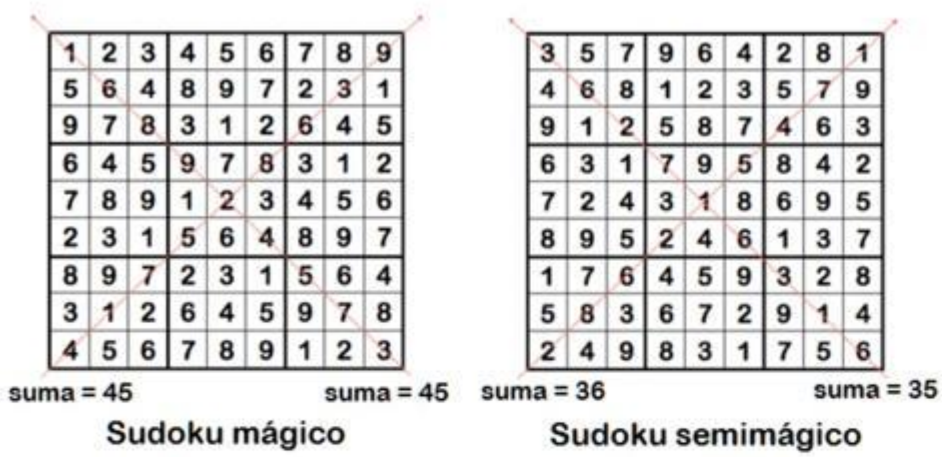
El problema del sudoku mínimo o el problema del mínimo número de casillas rellenas, era hasta hace poco un problema abierto sobre el cual ya hacía tiempo que se estaba trabajando. Pero ya no lo es, ya que el domingo 1 de enero de 2012 pasó a convertirse en un problema resuelto. Se ha demostrado que el número mínimo de casillas que debe traer rellenas un sudoku para que pueda tener solución única es 17**.** Esto significa que todo sudoku (que tenga solución) con 16 casillas rellenas o menos, seguro que tendrá más de una solución. Los artífices de esta demostración fueron Gary McGuire, Bastian Tugemann y Gilles Civario, de la School of Mathematical Sc (University College Dublin, Ireland, en su trabajo *There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem***.** En este artículo, de solamente 36 páginas, se demuestra que no hay sudokus con 16 casillas rellenas de principio que tengan solución única mediante el estudio de todos los posibles resultados. Es decir, McGuire y su equipo han estudiado todos los posibles sudokus con 16 números colocados de principio y han visto que ninguno de ellos tiene solución única. Para no tener que comprobarlo en todos los casos posibles, unos $6{,}7.10^{21}$ (Exactamente $6_3670.903_2752.021_1072$ 936.960, es el número de diferentes sudokus que pueden plantearse. El número de cuadrados latinos de 9×9 es alrededor de un millón de veces más grande: 5.524$_4$751.496$_3$156.892$_2$842.531$_1$225.600), estudiaron posibles simplificaciones atendiendo, por ejemplo, a ciertos tipos de simetrías. Obtuvieron así que tenían que estudiar unos 5500 millones de sudokus esencialmente distintos, una ardua tarea que realizaron mediante software. Según el equipo responsable de la demostración, este resultado puede ayudar a resolver algunos problemas de teoría de grafos y puede tener aplicaciones en bioinformática y en testeo de software.

Aparte de este resultado, existe también otro resultado matemático referente a la solución única de un sudoku, relacionado con el número máximo de dígitos iniciales. ¿Cuál es el máximo número de dígitos iniciales que un sudoku puede tener sin que éste tenga solución única?. La respuesta es 77. En general un sudoku de dimensión $n$x$n$ que tenga menos de $n^2 - 4$ puede no tener solución única.

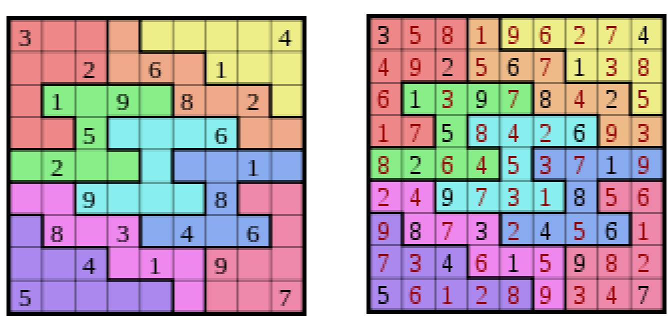
El número de dígitos iniciales en los sudokus parece tener una importancia fundamental a la hora de resolverlos. Es comúnmente aceptado que el número de éstos determina la dificultad de un sudoku. Sin embargo, aunque resulte sorprendente, la cantidad de dígitos iniciales apenas afecta a la dificultad del sudoku, e incluso puede no afectar en absoluto. De hecho la resolución de un sudoku está basada en la relevancia y posición de lo dígitos, más que en la cantidad de éstos

Todos los sudokus son cuadrados semimágicos pues en cada fila y columna aparecen todos los números del uno al nueve, así que la constante mágica es: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.

Aquellos sudokus en los que también sumen 45 los números que forman cada diagonal serán mágicos.




Hay muchas variantes del clásico sudoku, por ejemplo:



► **Cuadrados grecolatinos**

Un **cuadrado grecolatino**, **cuadrado de Euler** o **cuadrado latino ortogonal** de orden $n$ se denomina, a la disposición en una cuadrícula cuadrada $n$×$n$ de los elementos de dos conjuntos $S$ y $T$, ambos con *n* elementos, cada celda conteniendo un par ordenado (*s*, *t*), siendo *s* elemento de *S* y *t* de *T*, de forma que cada elemento de *S* y cada elemento de *T* aparezca exactamente una vez en cada fila y en cada columna y que no haya dos celdas conteniendo el mismo par ordenado.

Veamos un ejemplo, el conjunto *S* está compuesto por letras mayúsculas del abecedario latino y el conjunto *T* por letras del abecedario griego. En cada casilla del cuadrado tenemos una letra mayúscula y otra griega y cada una de estas letras aparece una única vez en cada fila y columna. Veamos tres ejemplos de cuadrados de orden 3, 4 y 5:

| | | |
|---|---|---|
| Aα | Bγ | Cβ |
| Bβ | Cα | Aγ |
| Cγ | Aβ | Bα |

Orden 3

| | | | |
|---|---|---|---|
| Aα | Bγ | Cδ | Dβ |
| Bβ | Aδ | Dγ | Cα |
| Cγ | Dα | Aβ | Bδ |
| Dδ | Cβ | Bα | Aγ |

Orden 4

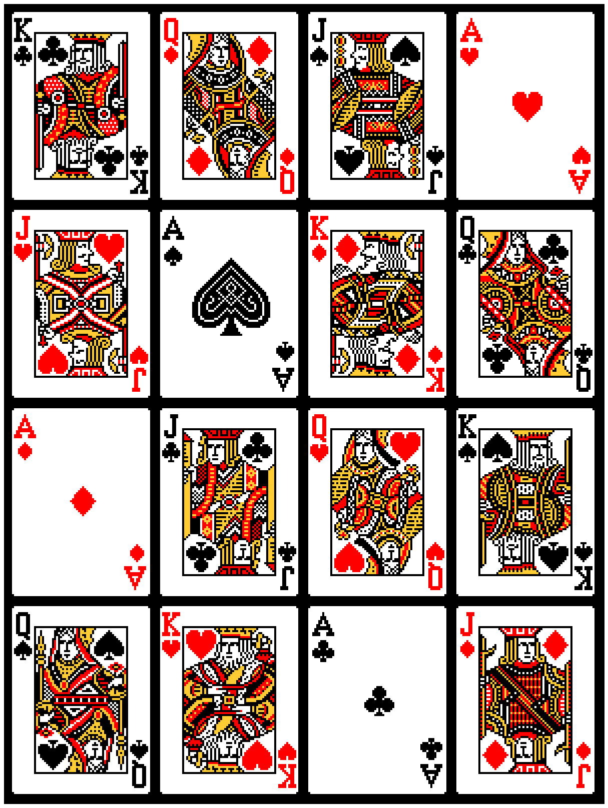
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Aα | Bδ | Cβ | Dε | Eγ |
| Bβ | Cε | Dγ | Eα | Aδ |
| Cγ | Dα | Eδ | Aβ | Bε |
| Dδ | Eβ | Aε | Bγ | Cα |
| Eε | Aγ | Bα | Cδ | Dβ |

Orden 5

Aunque el matemático más prolífico de todos los tiempos, introdujo en 1776 los cuadrados grecolatinos, como un nuevo método para construir cuadrados mágicos, por ejemplo si en el cuadrado grecolatino de orden 5 anterior tomamos como conjunto de letras latinas {A, B, C, D, E} los números {0, 1, 2, 3, 4} y como conjunto de letras griegas {α, β, γ, δ, ε}, los números {0, 5, 10, 15, 20} y sumamos los dos caracteres latino + griego se obtiene el siguiente cuadrado mágico:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 16 | 7 | 23 | 14 |
| 6 | 22 | 13 | 4 | 15 |
| 12 | 3 | 19 | 5 | 21 |
| 18 | 9 | 20 | 11 | 2 |
| 24 | 10 | 1 | 17 | 8 |

Algunos ejemplos de estos ya habían aparecido con anterioridad. Los cuadrados latinos ortogonales eran bien conocidos antes de Euler. Según lo descrito por Donald Knuth en el Volumen 4 de *El Arte de Programar Computadoras*, la construcción del conjunto 4x4 fue publicado por Jacques Ozanam en 1725 (en *Récréations mathématiques et physiques*) en forma de solitario de cartas. El problema consistía en colocar los ases, reyes, reinas y jotas de una baraja de cartas estándar, en una cuadrícula 4x4 de modo que en cada fila y cada columna aparecieran los cuatro palos y las cuatro figuras. Este problema tiene varias soluciones.



Una variante común a este problema era establecer la restricción adicional de que no se repitiese ningún palo, ni ninguna figura en las diagonales principales. Según lo descrito por Martin Gardner en *Entrenamiento de Gardner* y en *Nuevos pasatiempos matemáticos* el número de soluciones diferentes a este problema se estimó incorrectamente por Rouse Ball en 72, (sin contar giros, ni simetrías) y el error se mantuvo durante muchos años antes de que se demostrara por Kathleen Ollerenshaw que el número de soluciones era de 144. Cada una de las 144 soluciones tiene 8 reflexiones y rotaciones, lo que da un total de 1.152 soluciones.

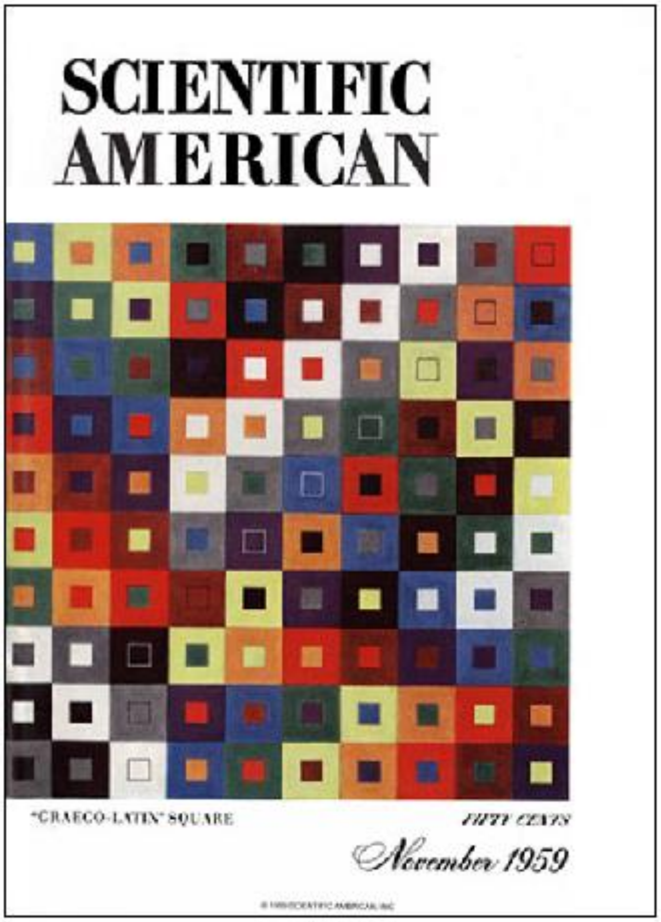
El **problema de los treinta y seis oficiales** es un rompecabezas matemático propuesto por Leonhard Euler en 1782. El problema pregunta si es posible colocar a treinta y seis oficiales de seis regimientos diferentes y de cada uno de los seis grados (en cada regimiento) en un cuadrado de 6x6 de forma que no coincidan dos oficiales del mismo rango o del mismo regimiento en ninguna fila y en ninguna columna. Esta disposición forma un cuadrado greco-latino. Euler demostró que el problema general podía resolverse siempre que el lado del cuadrado fuese impar o múltiplo de cuatro (par de clase par) y conjeturó que no existía ninguna solución posible cuando era impar de clase par (múltiplo de 2 que no es múltiplo de 4).

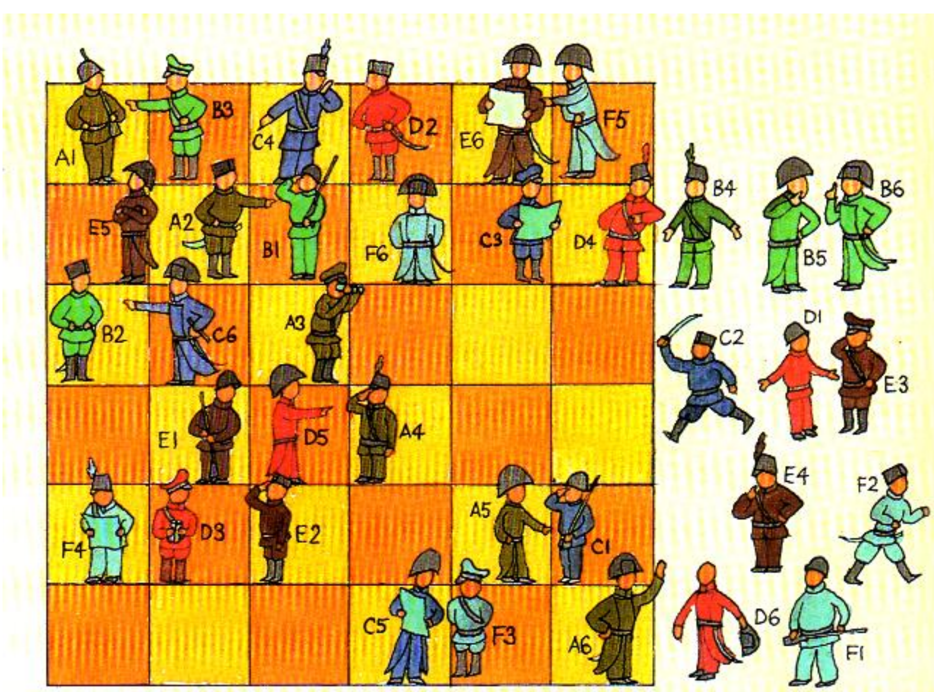
Gaston Tarry en 1901 demostró la conjetura de Euler para el orden 6. En 1959, R.C. Bose y S. Shrikhande construyeron algunos contraejemplos de orden 22, siguiendo puntos de vista matemáticos. Poco más tarde E. T. Parker encontró un contraejemplo de orden 10 utilizando en la búsqueda un UNIVAC (lo que hace que sea uno de los primeros problemas de combinatoria resueltos con una computadora digital).

En 1960, Parker, Bose, y Shrikhande (conocidos como los aguafiestas de Euler) demostraron que la conjetura de Euler es falsa para todo $n \geq 10$. Por lo tanto, existen cuadrados grecolatinos de lado $n$ para todos los $n \geq 3$, excepto $n = 6$.

La demostración de que la conjetura de Euler era falsa y que existían cuadrados latinos ortogonales de ordenes $4k + 2$ superiores a 6 fue un resultado que tuvo cierta repercusión en la sociedad. Fue portada en el New York Times, y además Martin Gardner escribió un artículo en

American Scientific ese mismo año, 1959, *Cómo tres matemáticos han refutado la famosa conjetura de Leonhard Euler*, y la portada de la revista, que mostramos aquí, era el cuadrado greco-latino de orden 10, pero con colores



Además del caso del 6x6 el único otro caso en que el problema no tiene solución equivalente es el caso de 2x2, es decir, cuando hay 4 oficiales.

*Cuadrados latinos mutuamente ortogonales*

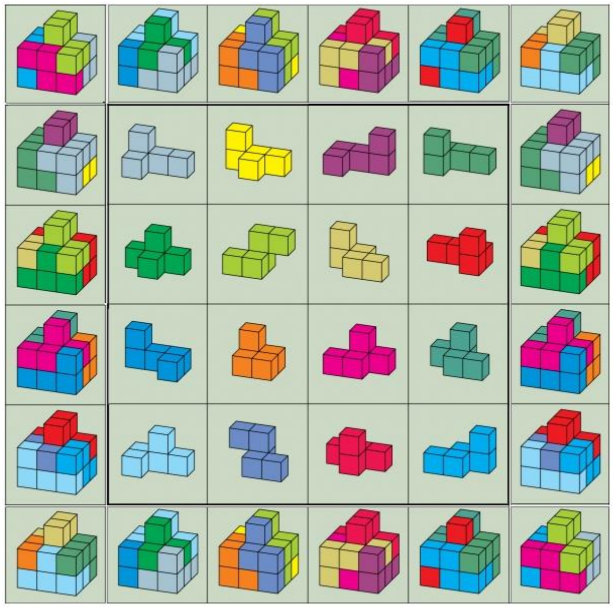
Un conjunto de cuadrados latinos, se llaman mutuamente ortogonales, si para cada par de ellos son ortogonales entre sí.
Dos cualesquiera de los siguientes: texto, color de primer plano, color de fondo y tipo de letra forman un par de cuadrados latinos ortogonales:


El cuadro anterior muestra cuatro cuadrados latinos mutuamente ortogonales de orden 5, que representan, respectivamente:
El texto: fiordo, Jawbox, flemas, cueros, dorado
El color de las letras: blanco, rojo, lima, azul y amarillo
El color del fondo: negro, marrón, azul verdoso, azul marino y plateado
El tipo de letra: con remates (Georgia / Times Roman), palo seco (Verdana/Helvetica), monoespaciado (Courier New), cursiva (Comic Sans), y de fantasía (Impact).

El número de cuadrados grecolatinos que puedan existir para un determinado orden $n$ no es conocido para cualquier $n$, y es un área de investigación en combinatoria. Se sabe que el número de cuadrados grecolatinos no puede exceder de $n$-1 y este límite superior se alcanza cuando $n$ es una potencia de un número primo. El mínimo es conocido por ser 2 para todo $n$ excepto para $n$ = 1, 2 y 6, donde es 1. En general el número máximo es desconocido para los números compuestos. Los primeros valores a partir de $n$ = 2, 3, 4,..., 9 son 1, 2, 3, 4, 1, 6, 7, 8.

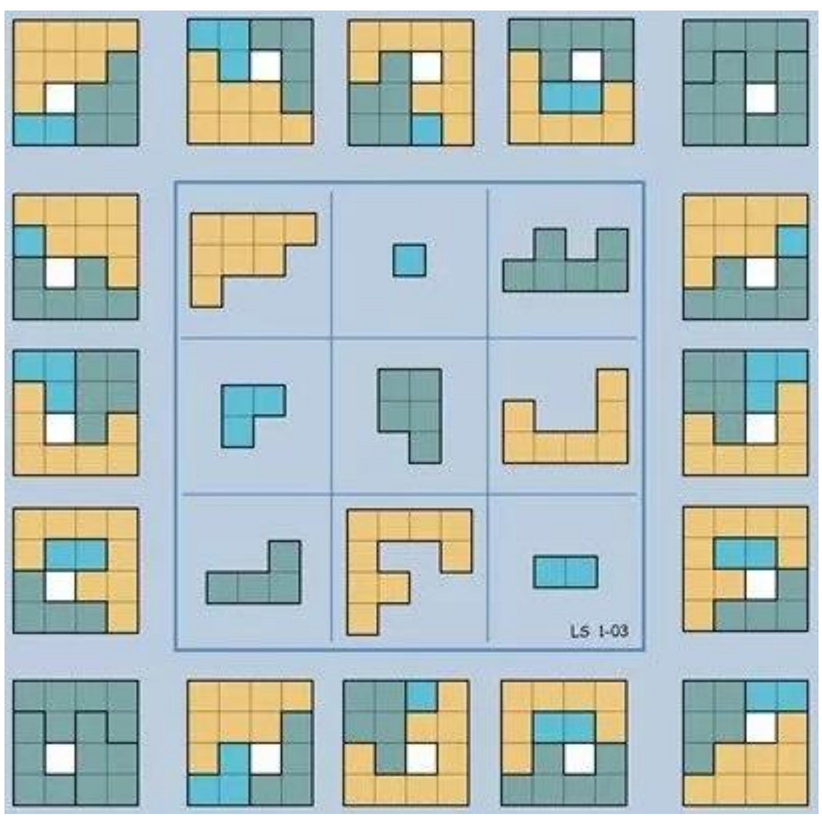
**►Cuadrados geomágicos**

Los cuadrados geomágicos fueron inventados en 2001 por el ingeniero electrónico británico Lee Sallows, aficionado a las matemáticas recreativas. Lee Sallows descubrió que los cuadrados mágicos numéricos conocidos desde la antigüedad son en realidad versiones unidimensionales de algo mucho mayor. Vemos unos primeros ejemplos:

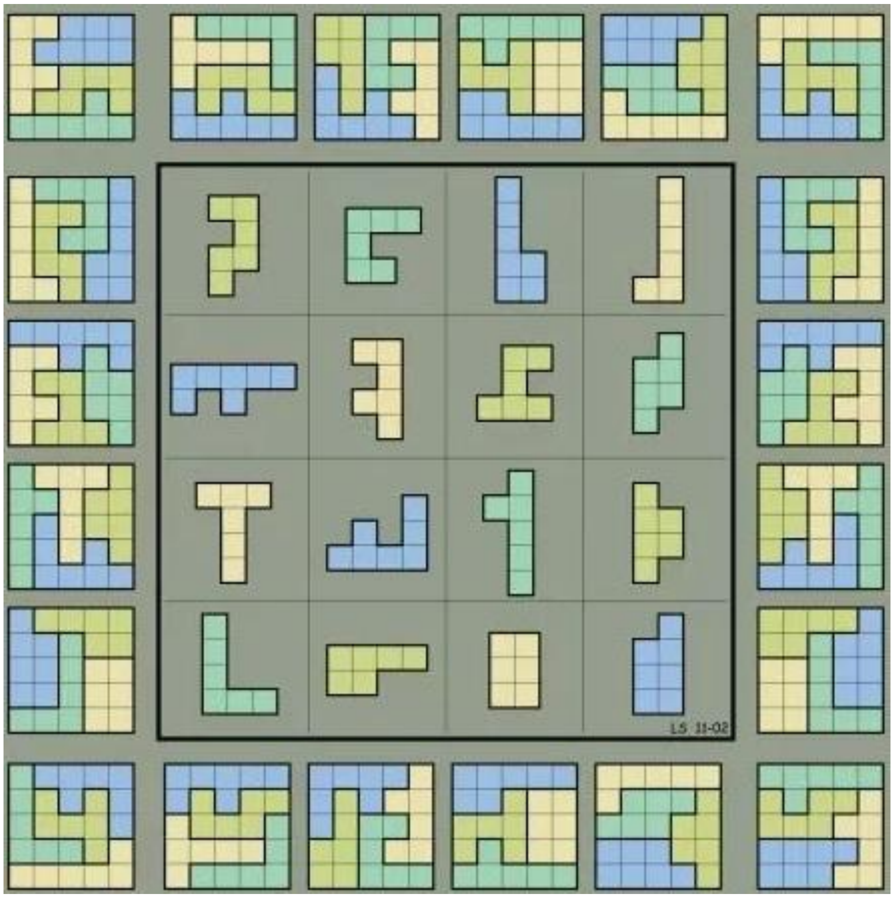


Son cuadrados en los que las figuras geométricas que hay en cada celda puede encajarse a modo de puzzle con las del resto de la misma fila o columna para formar una figura más grande, en dos o tres dimensiones: el resultado es una figura mayor; lo interesante es que todas encajan.

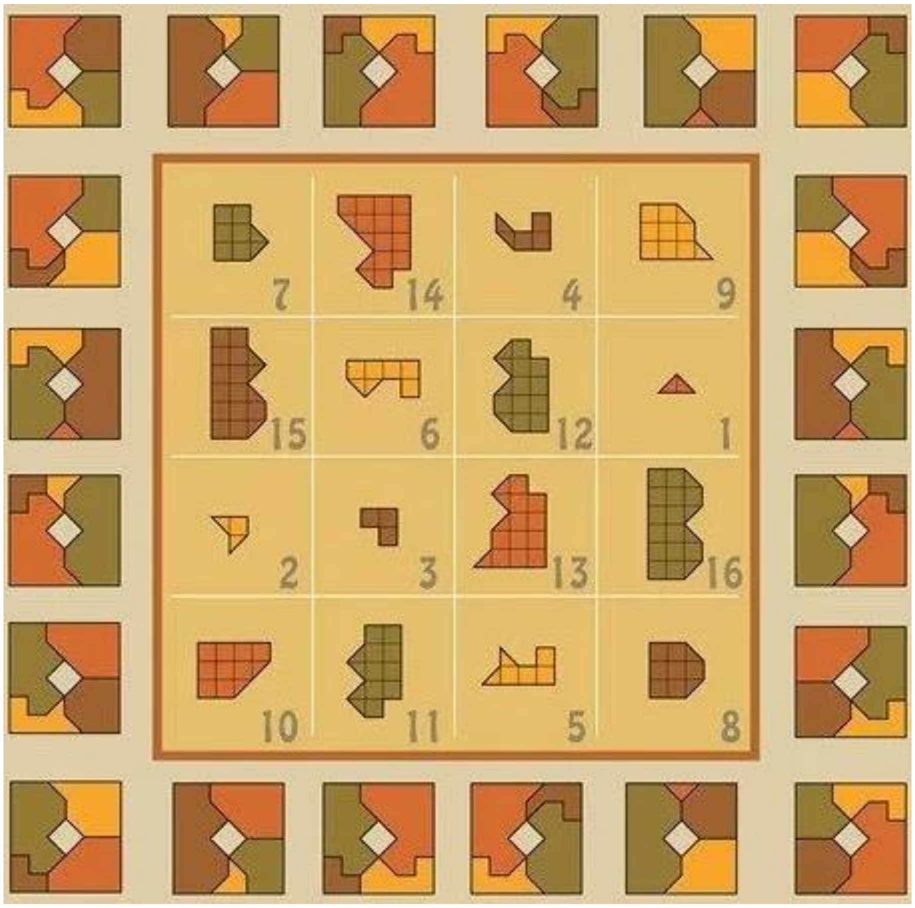
A continuación ponemos algunos ejemplos más de cuadrados geomágicos sacados de su propia página. Los dos siguientes son de 3x3, y como curiosidad fijaros en que las piezas son de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 unidades. A este tipo de cuadrados geomágicos se les denomina *normales*.



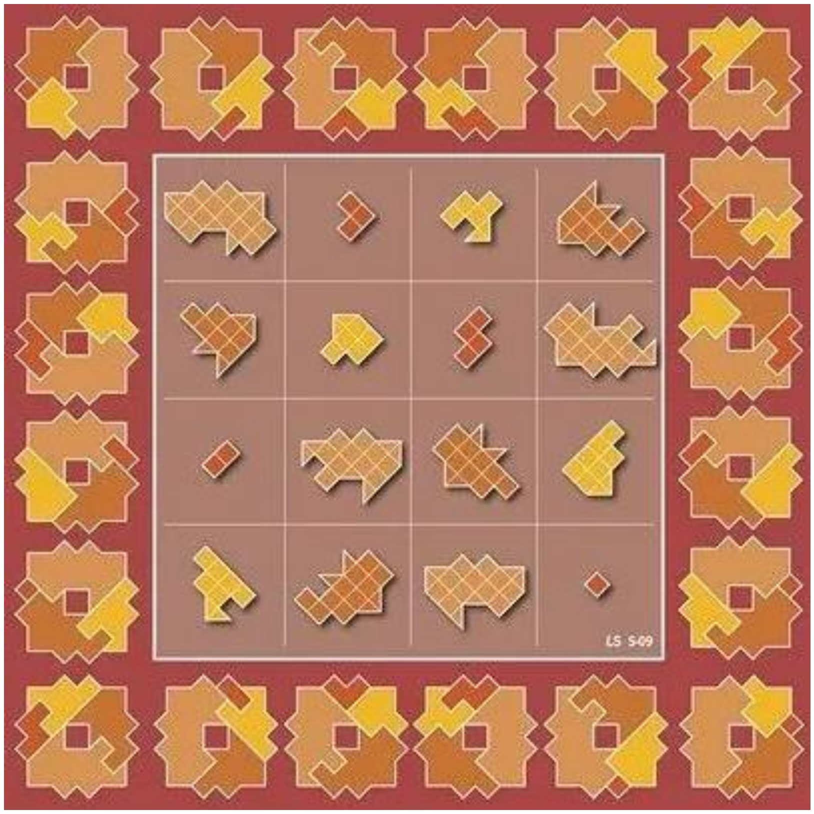
En el siguiente cuadrado geomágico  4x4, cada línea tiene 3 piezas de 6 unidades y 1 pieza de 7 unidades:

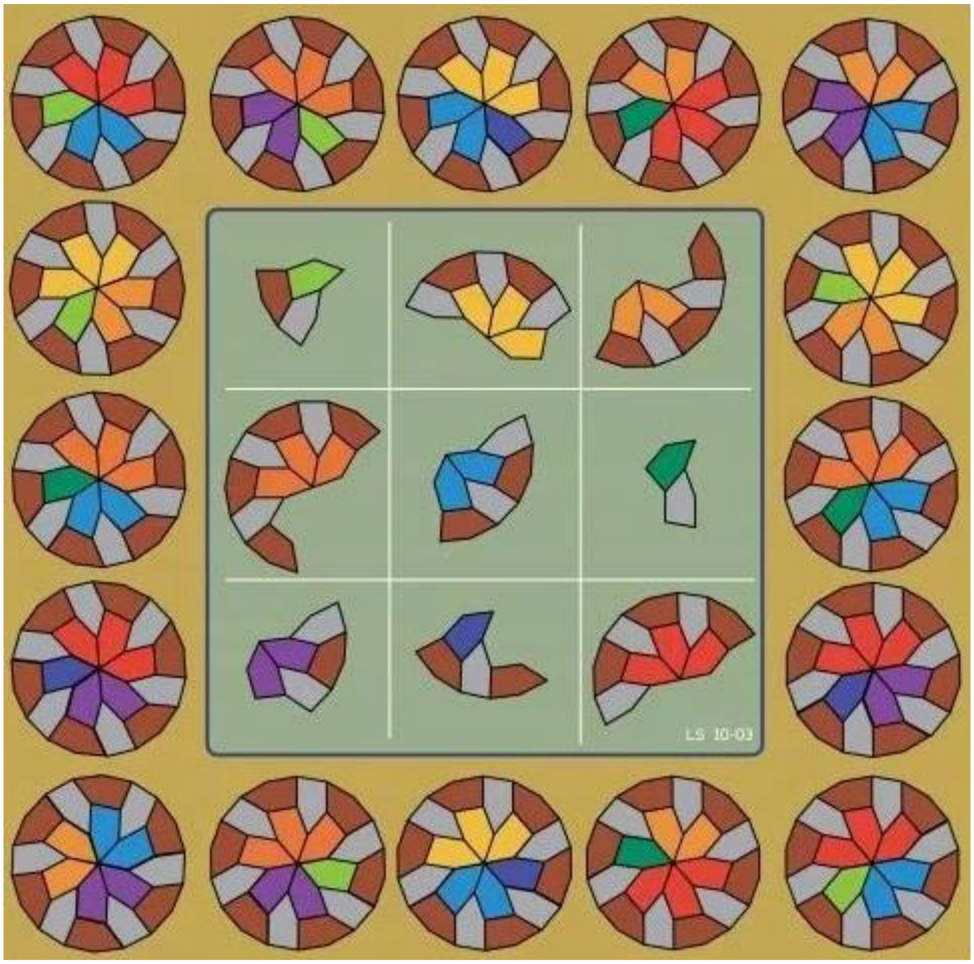


Este otro es un cuadrado geomágico normal 4x4 *Tipo X*:



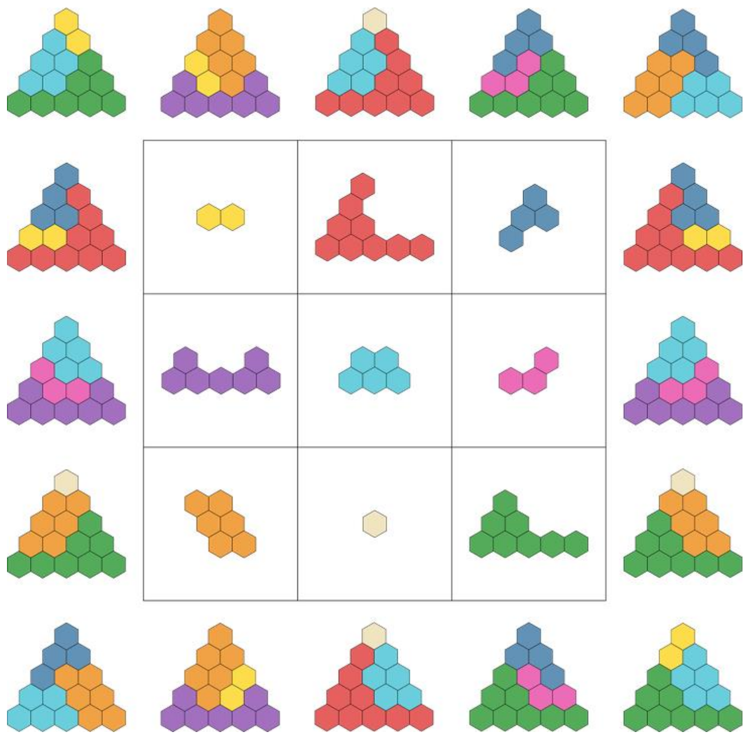
Éste, tipo mosaico, encontrado por Michael Hirschhorn, un matemático de la Universidad de Nueva Gales del Sur en Australia. El mosaico se forma partiendo, en este caso, de formas no regulares:






En su galería de cuadrados geomágicos hay otras variantes (58 en total en el momento de escribir esto), a cual más interesante.

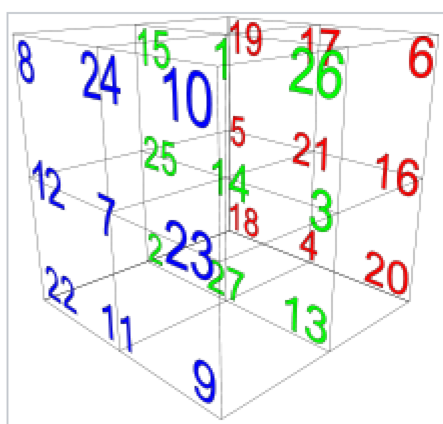
El cuadrado geomágico normal de abajo tiene un triángulo hecho de hexágonos como suma mágica. Como hay 15 hexágonos que forman el triángulo, este es el equivalente geométrico del famoso cuadrado mágico numérico Lo Shu, en el que los números del 1 al 9 ocupan los 9 cuadros de cuadrícula, y la suma mágica es 15.



## ►Otras formas geométricas mágicas

### ●Cubos mágicos

Un cubo mágico es una versión *nxnxn* de un cuadrado mágico en el que las $n^2$ filas, $n^2$ columnas, $n^2$ pilares y cuatro diagonales espaciales suman el mismo número $M_3(n)$ conocido como la **constante mágica** del cubo. Se suele suponer que los cubos mágicos son "**normales**", es decir, que tienen como elementos los enteros consecutivos 1, 2,..., $n^3$. Sin embargo, este requisito se elimina en los llamados cubos **multimágicos**.




Si existe, un cubo mágico normal tiene una constante mágica $M_3(n) = (1/2)n(n^3 + 1)$.

Para $n = 1, 2, ...,$ las constantes mágicas son: 1, 9, 42, 130, 315, 651, ... .

Si solo suman lo mismo $M_3(n)$ las filas, columnas, pilares, un cubo mágico se llama **cubo semimágico**. Si, además, las diagonales de cada *nxn* corte ortogonal suman $M_3(n)$, entonces el cubo mágico se llama **cubo mágico perfecto**. Si un cubo mágico perfecto es mágico no solo a lo largo de las diagonales espaciales principales, sino también en las diagonales espaciales quebradas, se lo conoce como **cubo mágico pandiagonal**.

Hay un cubo mágico trivial perfecto de orden uno, pero no existen cubos perfectos para las órdenes 2, 3 y 4. Si bien los cubos mágicos perfectos normales de las órdenes 7 y 9 se conocen desde fines del siglo XIX, desde hace mucho tiempo no se sabía si podían existir cubos mágicos perfectos de órdenes 5 o 6. Un cubo mágico perfecto 5x5x5 se descubrió posteriormente por el informático C. Boyer y el matemático W. Trump el 14 de noviembre de 2003. Este cubo contiene todos los números desde 1 hasta 125. La suma de los 5 números en cada uno de las 25 filas, de 25 columnas, de 25 pilares, de 30 diagonales y de 4 triagonales (diagonales del espacio) es igual a la constante mágica 315.

1° nivel

$$\begin{bmatrix} 25 & 16 & 80 & 104 & 90 \\ 115 & 98 & 4 & 1 & 97 \\ 42 & 111 & 85 & 2 & 75 \\ 66 & 72 & 27 & 102 & 48 \\ 67 & 18 & 119 & 106 & 5 \end{bmatrix}$$

2° nivel

$$\begin{bmatrix} 91 & 77 & 71 & 6 & 70 \\ 52 & 64 & 117 & 69 & 13 \\ 30 & 118 & 21 & 123 & 23 \\ 26 & 39 & 92 & 44 & 114 \\ 116 & 17 & 14 & 73 & 95 \end{bmatrix}$$

3° nivel

$$\begin{bmatrix} 47 & 61 & 45 & 76 & 86 \\ 107 & 43 & 38 & 33 & 94 \\ 89 & 68 & (63) & 58 & 37 \\ 32 & 93 & 88 & 83 & 19 \\ 40 & 50 & 81 & 65 & 79 \end{bmatrix}$$

4° nivel

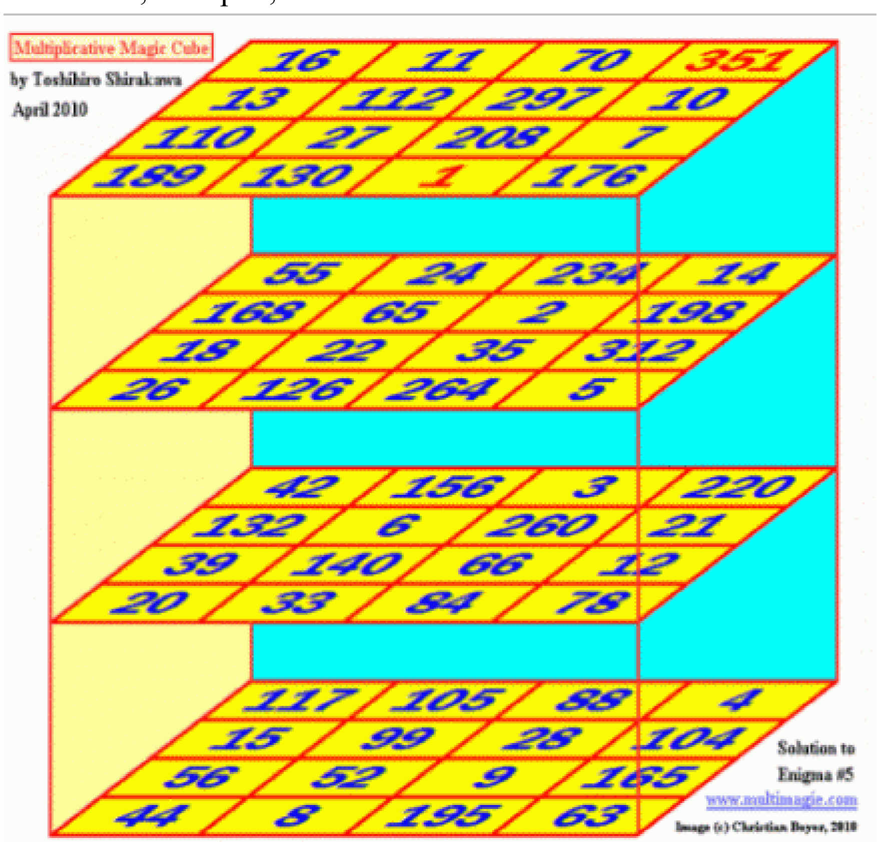
$$\begin{bmatrix} 31 & 53 & 112 & 109 & 10 \\ 12 & 82 & 34 & 87 & 100 \\ 103 & 3 & 105 & 8 & 96 \\ 113 & 57 & 9 & 62 & 74 \\ 56 & 120 & 55 & 49 & 35 \end{bmatrix}$$

5° nivel

$$\begin{bmatrix} 121 & 108 & 7 & 20 & 59 \\ 29 & 28 & 122 & 125 & 11 \\ 51 & 15 & 41 & 124 & 84 \\ 78 & 54 & 99 & 24 & 60 \\ 36 & 110 & 46 & 22 & 101 \end{bmatrix}$$

El 5º enigma de los propuestos por C. Boyer era encontrar un cubo mágico multiplicativo con números enteros positivos menores que 364.

Toshihiro Shirakawa, de Japón, encontró uno el 6 de Abril de 2010.

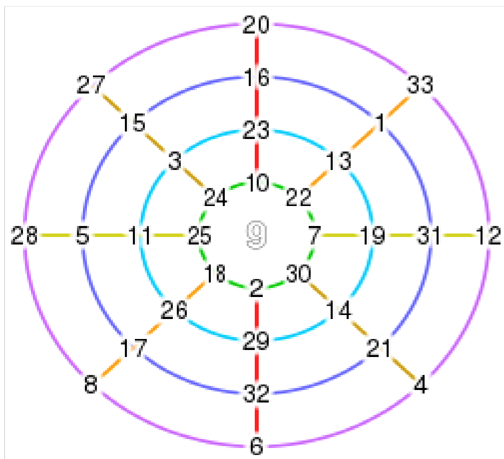


El cubo mágico multiplicativo más pequeño conocido hasta entonces era de orden 4 y tenía como término más grande 416 y el producto mágico 8648640, o 13!/6! (Boyer 2006).

Un cubo mágico perfecto o semiperfecto que produce otro cubo mágico del mismo tipo cuando sus elementos están al cuadrado se conoce como cubo bimágico. Del mismo modo, un cubo mágico que sigue siendo mágico cuando sus elementos son elevados al cuadrado y al cubo, se conoce como cubo trimágico.

### ●Círculos mágicos

Los **círculos mágicos** fueron inventados por el matemático chino Yang Hui de la Dinastía Song (960-1279) en el siglo XIII. Consisten en una serie de números naturales colocados en círculos, en disposiciones concéntricas, donde la suma de los números de cada diámetro y de cada círculo, incluido el centro si lo hay, es idéntica.



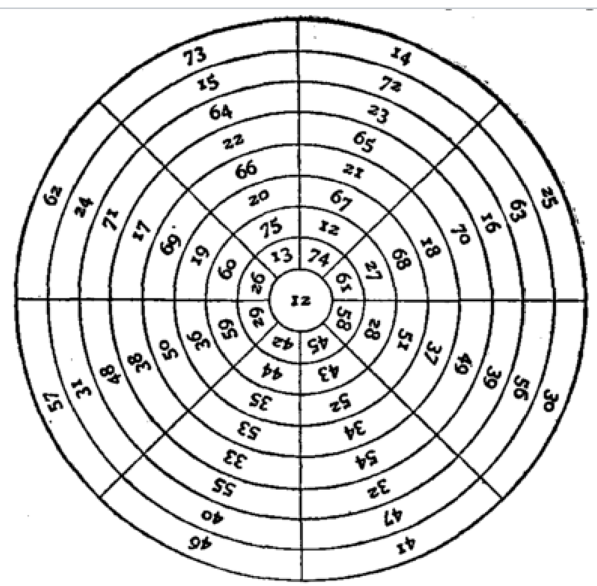

Círculo mágico de Yang Hui. Está construido con los números naturales del 1 al 33, colocados en cuatro círculos concéntricos de 8 números y con el número 9 en el centro.

---

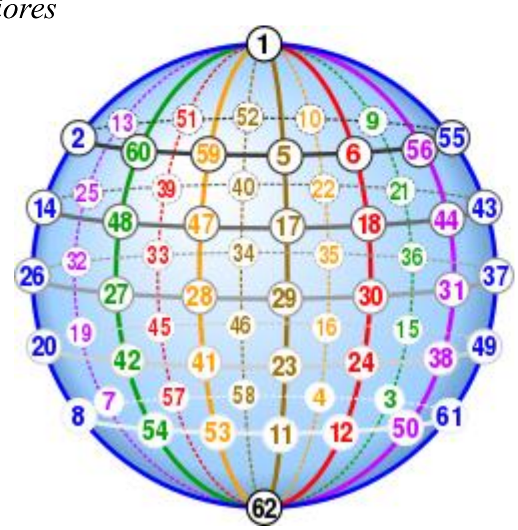
Este círculo mágico tiene las siguientes propiedades:

- La suma total del círculo es 561.
- La suma de los números 4 diámetros es 147.
- La suma de los 8 números de cada anillo concéntrico más el valor 9 del centro es también 147.
- La suma de cada uno de los 8 radios, excluido el 9 central, es 69. Por ejemplo, en los radios que conforman el primer diámetro de los indicados anteriormente:
- La suma de los números de cada anillo, excluido el 9 central, es 2 x 69.
- Además hay 8 semicírculos en los que la suma es también 69.

Se atribuye a Benjamin Franklin el "círculo mágico de círculos" consta de ocho anillos anulares y un círculo central, cada anillo dividido en ocho celdas por radios dibujados desde el centro; por lo tanto, hay 65 celdas. El número 12 se coloca en el centro, y los números consecutivos 13 a 75 se colocan en las otras celdas. Las propiedades de esta figura incluyen lo siguiente: (1) la suma de los ocho números en cualquier anillo junto con el número central 12 es 360, el número de grados en un círculo; (2) la suma de los ocho números en cualquier conjunto de celdas radiales junto con el número central es 360; (3) la suma de los números en cualquiera de las cuatro celdas adyacentes, ya sea anular, radial o radial y dos anulares, junto con la mitad del número central, es 180.



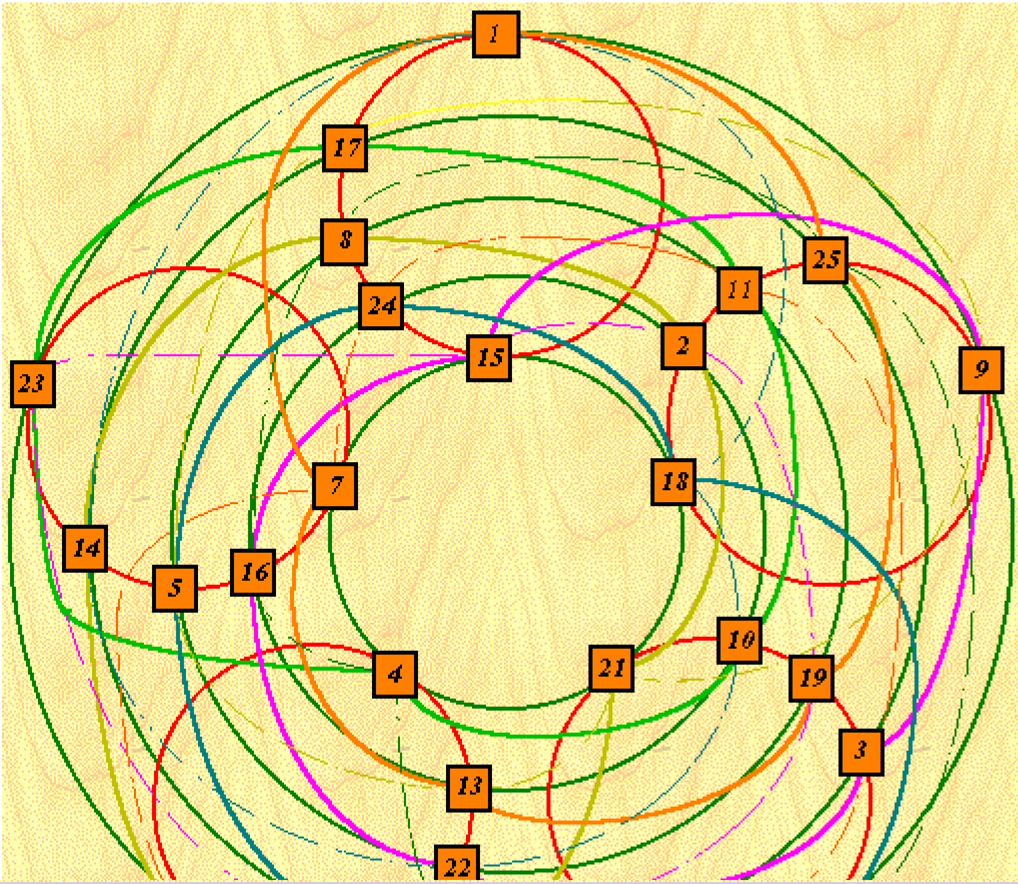
*Extensión a dimensiones superiores*



*La esfera de Andrews con los números del 1 al 62 dispuestos a lo largo de las intersecciones de 5 círculos de latitud (gris discontinuo) y 6 círculos de longitud (gris continuo)*

En 1917, WS Andrews publicó una disposición de los números 1, 2, 3,..., 62 en once círculos de doce números cada uno en una esfera que representa los paralelos y meridianos de la Tierra, de modo que cada círculo tiene 12 números con un total de 378.

El siguiente es un toro, que puede usarse como generador de un cuadrado mágico pandiagonal de orden 5. Se inicia en el número 1, y se siguen los grandes círculos, para generar las filas del cuadrado mágico A. Si se comienza en el número 2 y se sigue los círculos grandes se genera las columnas del cuadrado mágico **B.** De esta forma, se pueden formar 25 cuadrados mágicos pandiagonales diferentes comenzando con cada uno de los 25 números del modelo. Se pueden construir otros 25 cuadrados mágicos diferentes formando las filas y columnas con los números a lo largo de las líneas espirales. En realidad, se pueden construir cuatro cuadrados mágicos siguiendo las líneas radiales, y otros cuatro siguiendo las líneas espirales, en cualquier dirección alrededor del toro. Sin embargo, tres de estos cuadrados mágicos son solo versiones disfrazadas del cuarto, porque son rotaciones o reflejos.




| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 65 | | 65 | 65 | 65 | 65 | 65 |
| 65 | 1 | 9 | 12 | 20 | 23 | 65 |
| 65 | 17 | 25 | 3 | 6 | 14 | 65 |
| 65 | 8 | 11 | 19 | 22 | 5 | 65 |
| 65 | 24 | 2 | 10 | 13 | 16 | 65 |
| | 15 | 18 | 21 | 4 | 7 | 65 |
| | 65 | 65 | 65 | 65 | 65 | |

**A.**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 65 | | 65 | 65 | 65 | 65 | 65 |
| 65 | 2 | 11 | 25 | 9 | 18 | 65 |
| 65 | 10 | 19 | 3 | 12 | 21 | 65 |
| 65 | 13 | 22 | 6 | 20 | 4 | 65 |
| 65 | 16 | 5 | 14 | 23 | 7 | 65 |
| | 24 | 8 | 17 | 1 | 15 | 65 |
| | 65 | 65 | 65 | 65 | 65 | |

**B.**

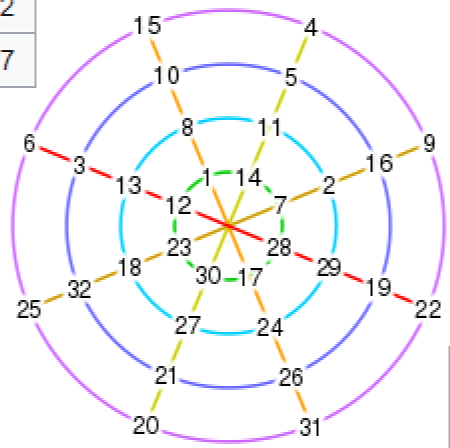
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 65 | | 65 | 65 | 65 | 65 | 65 |
| 65 | 1 | 25 | 19 | 13 | 7 | 65 |
| 65 | 14 | 8 | 2 | 21 | 20 | 65 |
| 65 | 22 | 16 | 15 | 9 | 3 | 65 |
| 65 | 10 | 4 | 23 | 17 | 11 | 65 |
| | 18 | 12 | 6 | 5 | 24 | 65 |
| | 65 | 65 | 65 | 65 | 65 | |

**C.**

*Relación con los cuadrados mágicos*

Un círculo mágico se puede derivar de uno o más cuadrados mágicos poniendo un número en cada intersección de un círculo y un radio. Se pueden agregar radios adicionales replicando las columnas del cuadrado mágico.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | 15 | 4 | 9 |
| 3 | 10 | 5 | 16 |
| 13 | 8 | 11 | 2 |
| 12 | 1 | 14 | 7 |

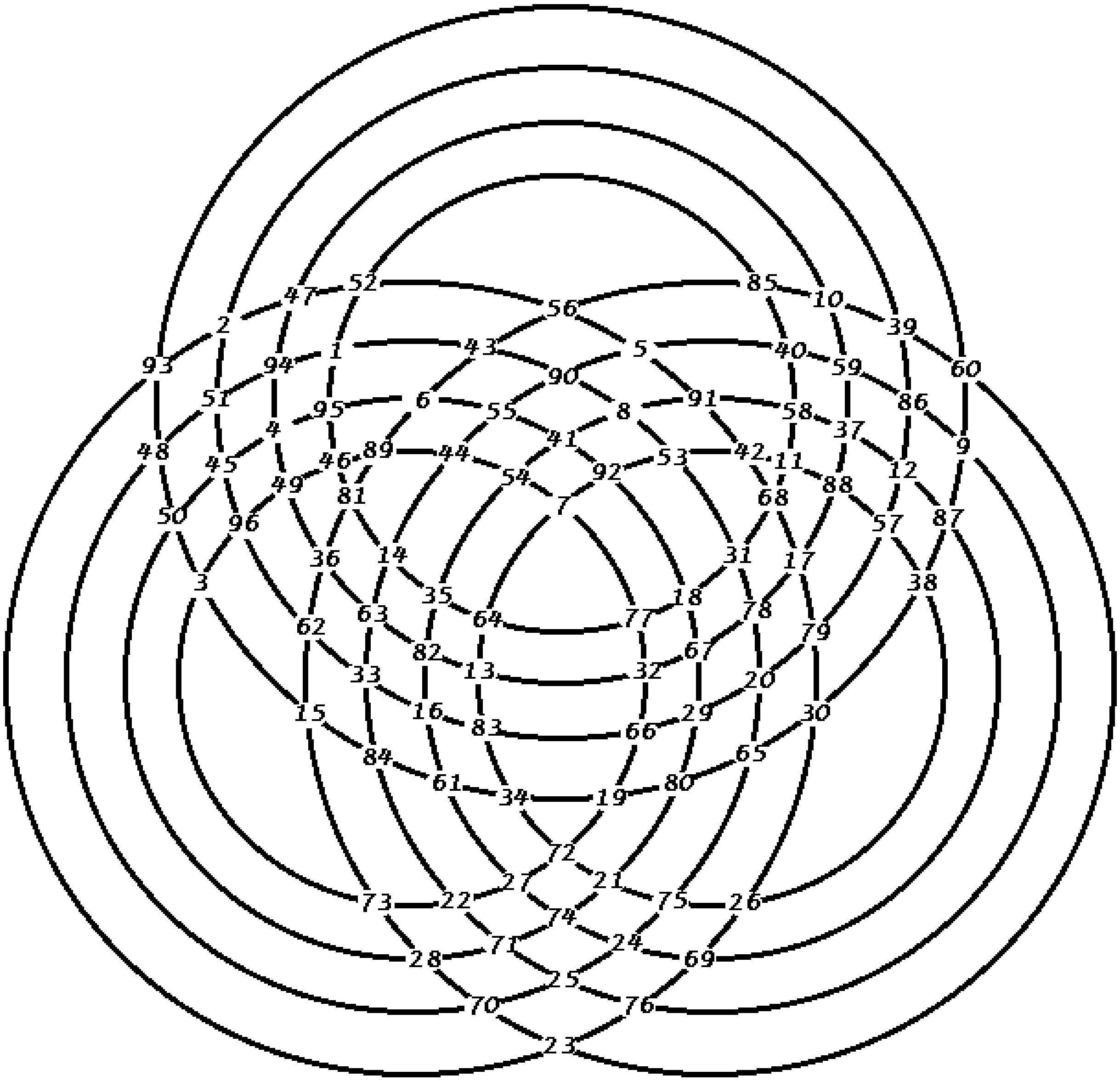



Círculo mágico derivado del cuadrado mágico

| | | | |
|---|---|---|---|
| 22 | 31 | 20 | 25 |
| 19 | 26 | 21 | 32 |
| 29 | 24 | 27 | 18 |
| 28 | 17 | 30 | 23 |

En el ejemplo de la figura anterior, el siguiente cuadrado panmágico 4×4 se copió en la parte superior del círculo mágico. Cada número, con 16 agregados, se colocó en la intersección simétrica sobre el centro de los círculos. Esto da como resultado un círculo mágico que contiene los números del 1 al 32, con cada círculo y diámetro totalizando 132.

La siguiente figura  contiene seis cuadrados mágicos pandiagonales de 4x4 que suman 194 de 52 formas diferentes. (4 filas, 4 columnas, 2 diagonales principales, 6 pares diagonales quebradas, 4 esquinas 3x3 casillas, 16 esquinas 4x4 casillas, y 16 esquinas de 2x2 casillas). Los doce círculos de 16 números suman 776 (4 veces 194).

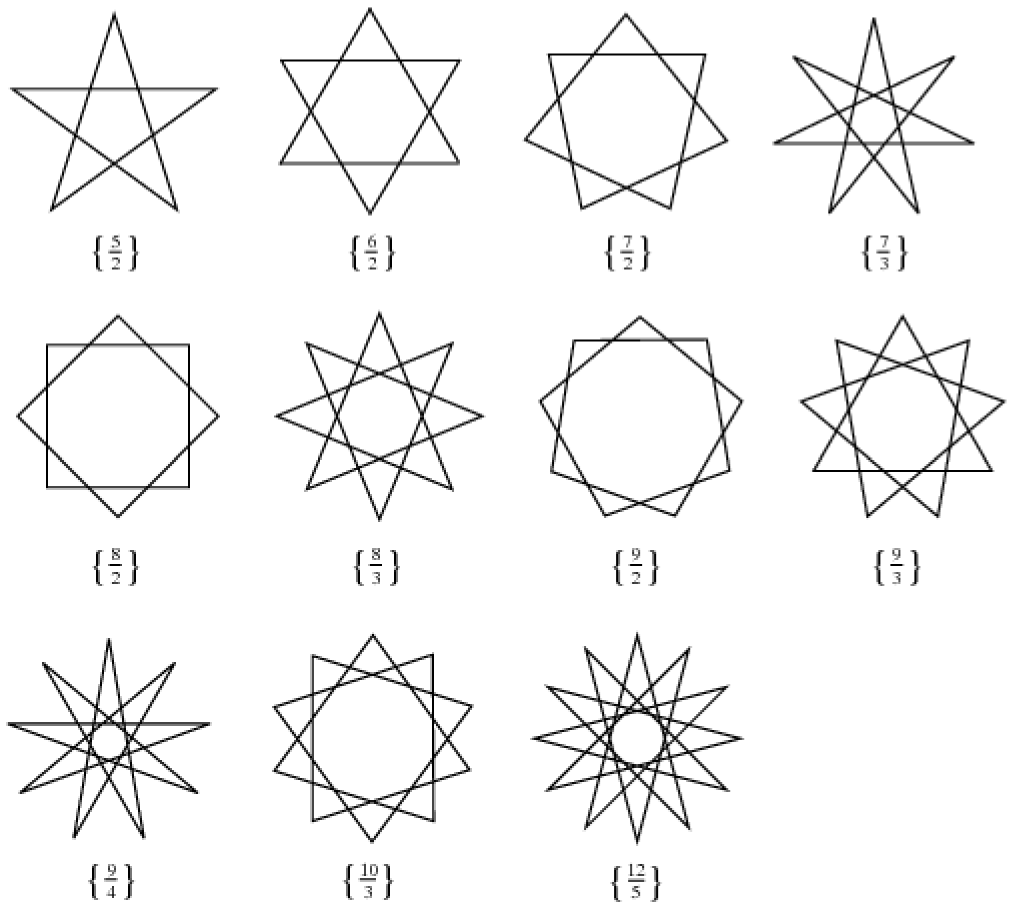



**●Polígonos estrellados y Estrellas mágicas**

Si a partir de los vértices de un polígono regular de *p* lados se unen sus vértices alternadamente, es decir, cada *q* vértices sucesivamente hasta alcanzar el vértice inicial, se obtiene un **polígono regular estrellado**, cuyos lados y ángulos son todos iguales. La figura que se obtiene puede representarse mediante la expresión {*p/q*}. Por ejemplo, a partir de un pentágono regular ($p = 5$) puede trazarse una estrella de cinco puntas uniendo el primer vértice con el tercero ($q = 2$), el tercero con el quinto, el quinto con el segundo, el segundo con el cuarto y el cuarto con el primero. Se obtiene así el polígono estrellado {*5/2*}.

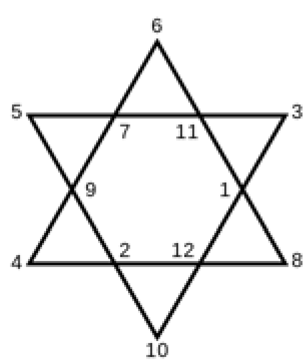
Para generar un polígono estrellado, la fracción *p/q* debe ser irreducible, esto es, *p* y *q* han de ser primos relativos.

Cuando la fracción *p/q* no es irreducible, los vértices del polígono inicial no quedan todos conectados. Pueden obtenerse entonces figuras denominadas **estrellas** dando una «segunda vuelta» con los mismos criterios, partiendo del primer vértice no conectado en la primera etapa. Así se obtiene finalmente una figura que también podría construirse mediante la superposición de polígonos girados. Un ejemplo típico sería el de la Estrella de David, construido a partir de un hexágono y de orden {6/2}.

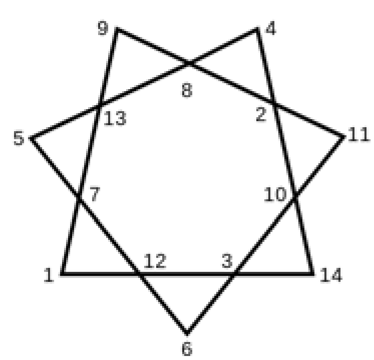



Una **estrella mágica/polígono estrellado de *n* puntas** es una estrella/ polígono estrellado en el cual se disponen en cada uno de los vértices e intersecciones los números naturales del 1 al $2n$, de tal modo que los números situados en cada línea del polígono sumen lo mismo (constante mágica). La constante mágica de una estrella mágica/polígono estrellado mágico de $n$ puntas es $M = 4n + 2$.

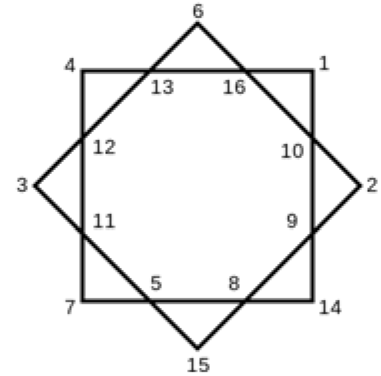
No existen estrellas/polígonos estrellados con menos de 5 puntas y la construcción de una estrella mágica de 5 puntas es imposible. El ejemplo más pequeño de una estrella mágica tiene 6 puntas. A continuación se ofrecen algunos ejemplos. Paras valores específicos de $n$, tienen nombres propios, por ejemplo para $n$ = 6, la estrella mágica de 6 puntas, se conoce como *hexagrama mágico* y así ocurre con el resto.




Hexagrama mágico
$M = 26$

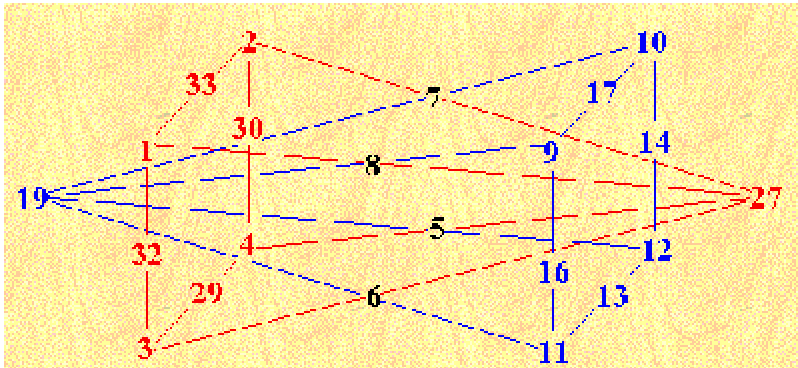



Heptagrama mágico
$M = 30$

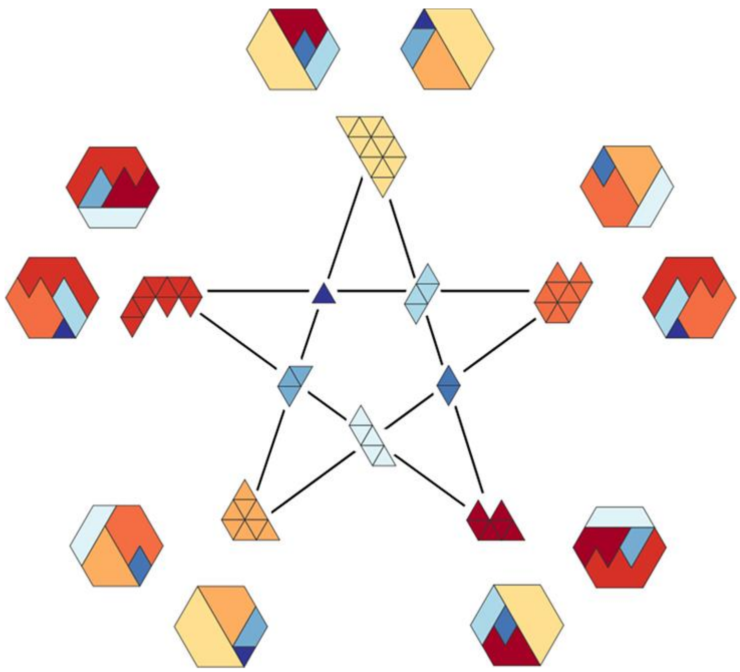



Octagrama mágico
$M = 34$

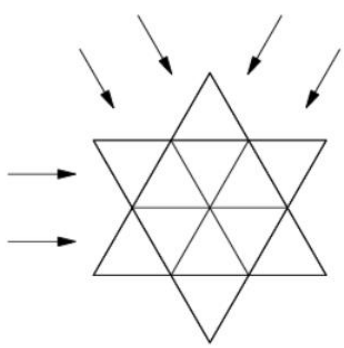
Las hay incluso en 3 dimensiones



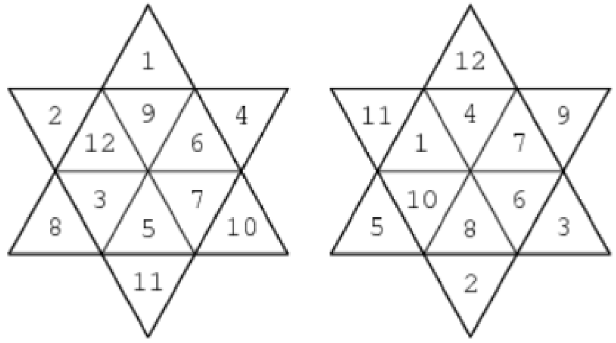

A continuación se muestra un pentagrama mágico geométrico que usa diez formas: una en cada punto de la estrella y cada vértice del pentágono interno. Un hexágono es la forma de la suma mágica.



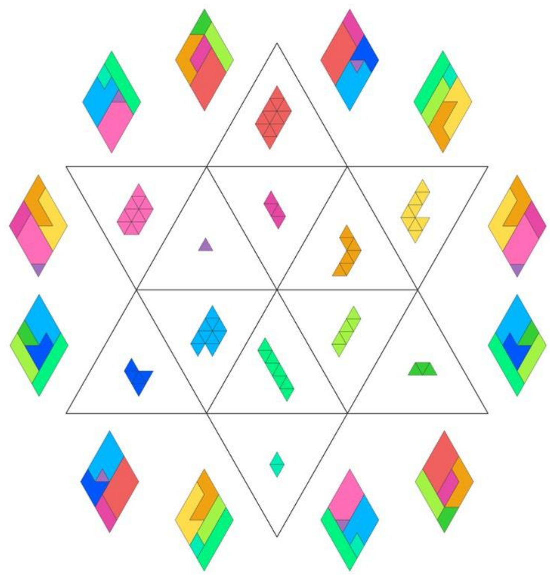
Otro hexagrama mágico, pero esta vez en vez de números en los vértices, tenemos los números en los triángulos interiores, de tal manera que las sumas de números en las seis direcciones señaladas abajo sumarán al mismo número.



Hay exactamente dos soluciones, donde estas dos soluciones son complementarias. Tienen sumas 33 y 32, respectivamente.




Y aquí tenemos un hexagrama mágico que tiene como suma mágica un diamante.



**●Hexágonos mágicos**

De manera similar a los cuadrados mágicos, en este hexágono se distribuyen los números de 1 a 19 (uno en cada celda) de manera que cada una de las líneas verticales y diagonales formadas por los números suman siempre 38, llamada constante mágica.

18+17+3 = 11+1+7+19 = 9+6+5+2+16 = 14+8+4+12 = 15+13+10 = 38
16+19+3 = 12+2+7+17 = 10+4+5+1+18 = 13+8+6+11 = 15+14+9 = 38
9+11+18 = 14+6+1+17 = 15+8+5+7+3 = 13+4+2+19 = 10+12+16 = 38

Llamamos *orden* del hexágono al número $n$ de celdas hexagonales que conforman cada lado, en nuestro caso éste sería de orden 3. Además, para tener un carácter especialmente mágico las $3n^2 - 3n + 1$ (***n*-ésimo número hexagonal**) celdas hexagonales que lo componen deben rellenarse con los números naturales del 1 al $3n^2 - 3n + 1$.

Junto con el evidente hexágono trivial de *orden* 1, no existen más hexágonos mágicos que el de orden 3 salvo rotaciones o reflexiones del mismo. Éste fue descubierto independientemente por Ernst von Haselberg en 1887, W. Radcliffe en 1895, H. Lulli y Martin Kohl en 1940, Clifford W. Adams, que trabajó en el problema de 1910 a 1957, y Vickers en 1958.

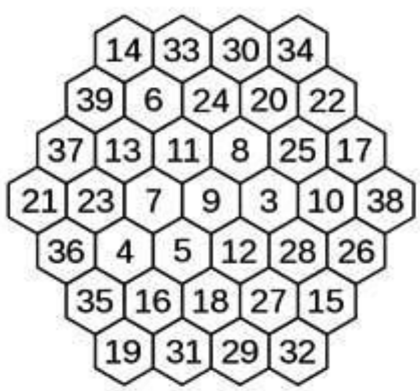
Este problema y la solución tienen una larga historia. Clifford W. Adams, un empleado retirado de una compañía ferroviaria de Filadelfia, comenzó a trabajar en el hexágono en 1917 y encontró una solución en 1957 por ensayo y error. La perdió y la encontró de nuevo en 1962. Se la envió a Martin Gardner quien consideró el problema de interés y lo puso en conocimiento del matemático Charles W. Trigg de la universidad de Los Ángeles. Éste descubrió que el hexágono mágico es único y obviamente desconocido en la literatura matemática. Trigg publicó su prueba en "*Matemáticas recreativas*" en 1964 donde realizó más investigaciones y resumió los resultados conocidos y la historia del problema.

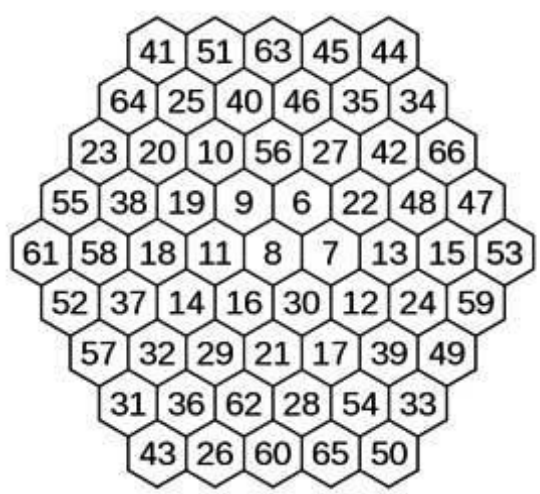
Trigg demostró, aplicando la fórmula de la suma de las progresiones aritméticas (de 1 a $3n^2 - 3n + 1$) y dividiendo por el número de filas paralelas ($2n - 1$), da para la constante mágica de un hexágono de orden $n$ un valor de::

$$\frac{9\left(n^4 - 2n^3 + 2n^2 - n\right) + 2}{2\,(2n - 1)},$$

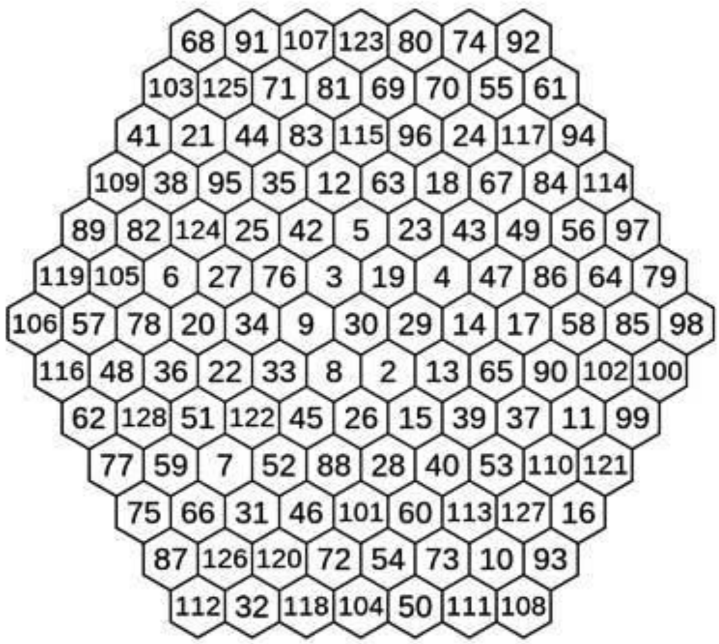
dando valores sucesivos a n obtenemos la la fórmula los valores: 1, 28/3, 38, 703/7, 1891/9, 4186/11,...), que requiere ser un número entero para que exista una solución. Pero esto es un entero sólo para (el caso trivial de un hexágono).

Existen otros hexágonos *cuasi*-*mágicos* que cumplen la propiedad mágica, pero sus elementos no son los números naturales desde el 1, aunque todos los números son consecutivos: Uno de orden 4 comienza en 3 y acaba en 38, siendo la constante mágica igual a 111, y otro de orden 5 comienza en 6 y acaba en 66 con constante mágica 244:



El más grande conocido hasta ahora, descubierto en 2006, es de orden 7. los números van del 2 al 128 y la constante mágica es 635.

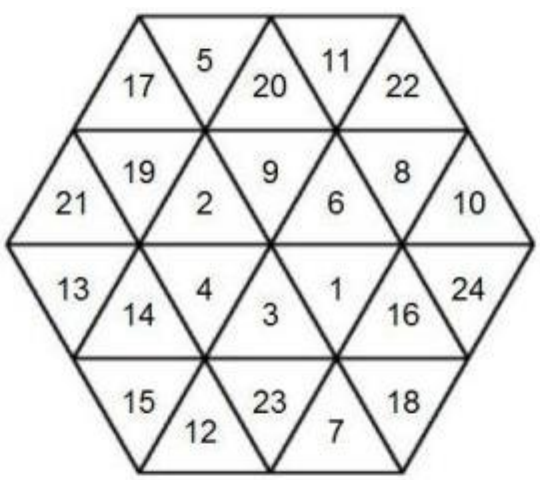



Incluso existen de órdenes superiores si se da más libertad a la elección de los números a colocar.

**●Los T-Hexágonos mágicos**

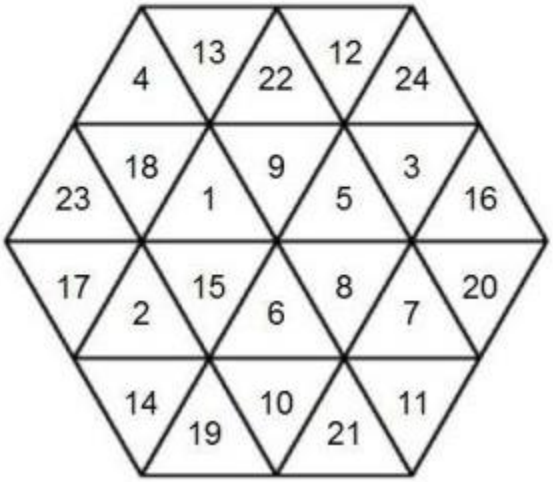
En esta ocasión no se trata de cuadrados formados por celdas cuadradas, sino de hexágonos formados por celdas Triangulares (de ahí viene la T de T-Hexágonos). Hasta donde se sabe hoy, el T-Hexágono T fue investigado por Hans F. Bauch, por primera vez. Publicó sus resultados en 1991.

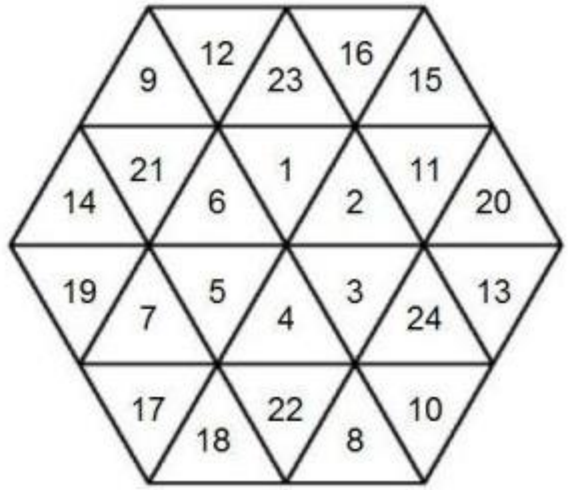
Un ejemplo de T-Hexágono mágico es el de la figura siguiente:




Este es de orden 2, y tiene 24 celdas triangulares. En general un T-Hexágono de orden $n$ tiene $2n$ triángulos en cada lado y tiene $6n^2$ triángulos en total y para que sea mágico, sus cuatro filas horizontales, sus cuatro diagonales que van de izquierda a derecha y sus otras cuatro diagonales que van de derecha a izquierda, deben sumar lo mismo, la constante mágica, que volviendo a aplicar la suma de los términos de la progresión aritmética (de 1 a $6n^2$) y dividiendo por el número celdas en cada lado ($2n$), se obtiene: $S = [3n(6n^2 + 1)]/2$ (esto obliga a que $n$ sea par, para que $S$ sea entero),(en nuestro figura $S = 75$)

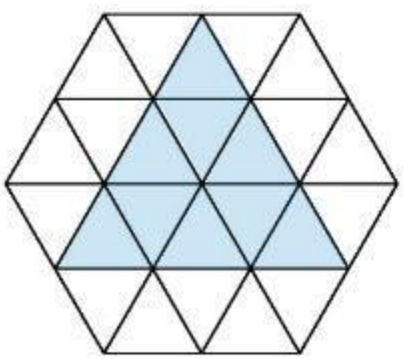
Otros ejemplos de T-Hexágonos mágicos de orden 2 podrían ser los siguientes:

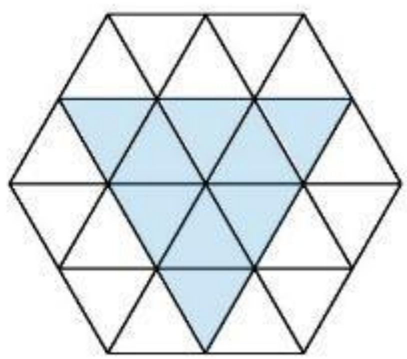


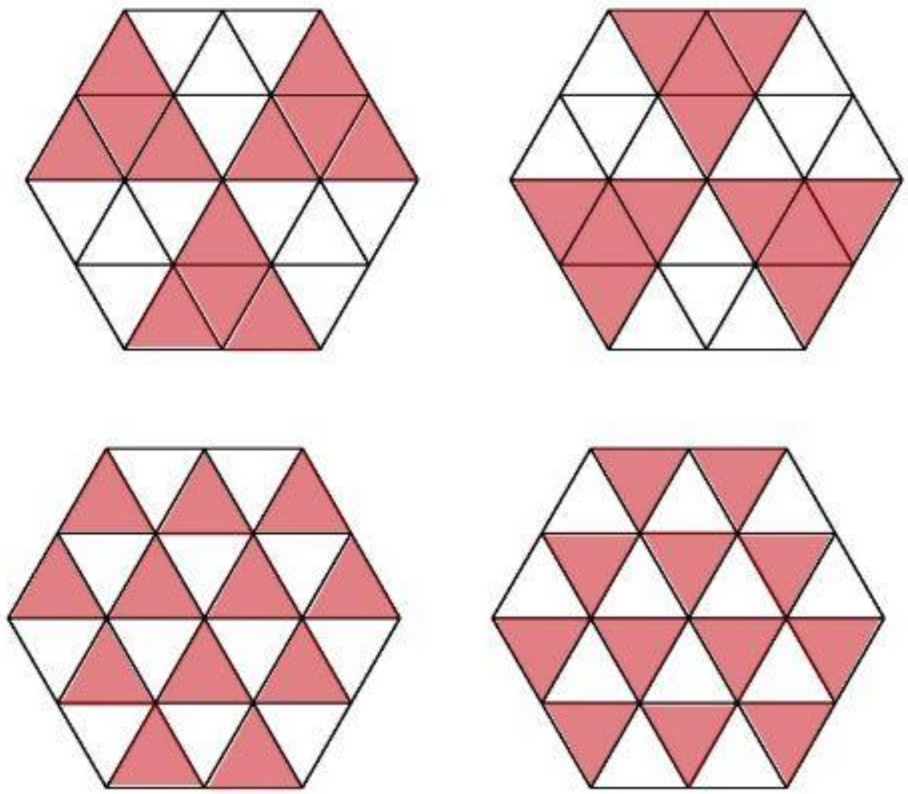

La pregunta que nos podemos hacer es: ¿podemos conseguir muchos más T-Hexágonos mágicos de orden 2 utilizando los números del 1 al 24? La respuesta es sí, exactamente hay **59.674.527** **(***John Baker* y *David King)* T-Hexágonos mágicos no congruentes de orden 2. Lo de *no congruentes* quiere decir que no se obtengan por una rotación, una simetría o una traslación.

Todos los T-Hexágonos mágicos de orden 2 su constante mágica es 75. Pero también, cada una de las regiones sombreadas de azul que se indican a continuación suman también 75 (la constante mágica):

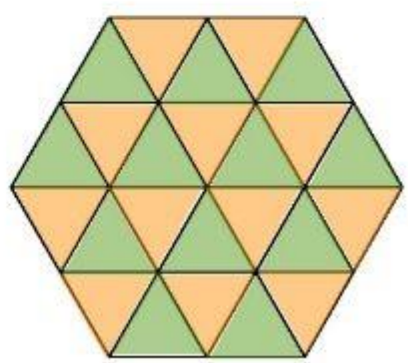




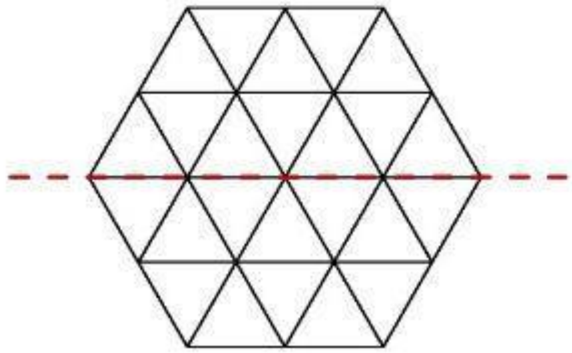
Y las siguientes (en cada T-Hexágono) suman el doble de la constante mágica, es decir, 150:



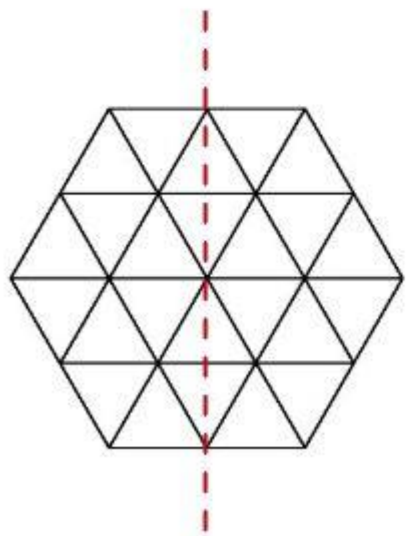
Hay una propiedad que sí cumplen todos los T-Hexágonos mágicos, sean del orden que sean, propiedad demostrada por *John Baker* y *David King* y que ellos han llamado «*the Odd-Even property*» (la propiedad Impar-Par), y es que *la suma de los números de los triángulos cuyo vértice apunta hacia arriba es igual a la suma de los números de los triángulos cuyo vértice apunta hacia abajo.* Representado con colores sería así:



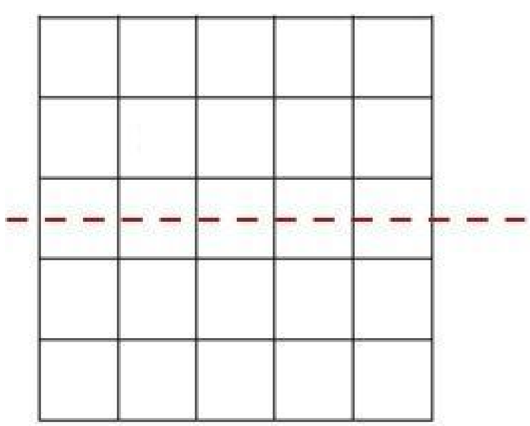
Hay otra propiedad también demostrada por Baker y King bastante curiosa, y que ellos han llamado *«magic moments»*, según la cuál los T-Hexágonos mágicos están físicamente equilibrados respecto a sus diagonales. Es decir, si cada triángulo pesa lo mismo que el número que contiene, hay equilibrio de pesos respecto a un recta que pase por cualquiera de sus diagonales.

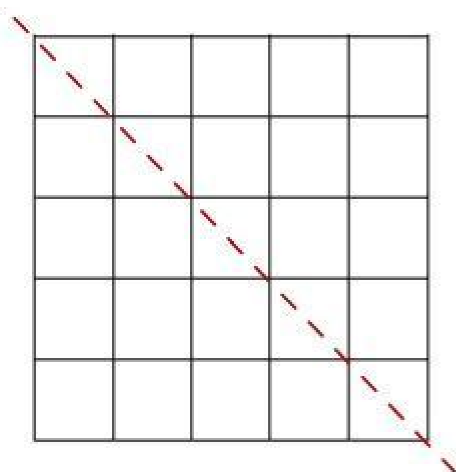


y también respecto a una recta que pasase por los puntos medios de lados opuestos.



Y además, eso es algo que no sólo ocurre en los T-Hexágonos mágicos, sino también en los cuadrados mágicos.





►**Dominó y cuadrados mágicos**

El dominó es uno de los juegos de mesa más conocido y popular en todos los países. La simplicidad de sus reglas hace que cualquier persona pueda jugar con unas mínimas instrucciones y, aunque actualmente no despierta la pasión de otras épocas, hay que reconocer que es un juego muy solicitado entre los jubilados y un entretenimiento clásico para pasar las tardes de canícula en el bar, especialmente en los pueblos.

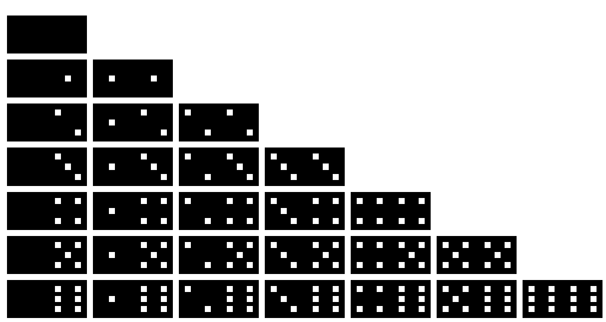
Está formado por fichas rectangulares, generalmente blancas por la parte superior y negras por la inferior, divididas en dos cuadrados separados por una ojiva, cada uno de los cuales lleva marcados puntos.

Como ocurre con muchos juegos tradicionales su origen es discutido; parece que es chino, aunque si fuese así, la versión occidental conocida actualmente difiere bastante de la oriental. El juego apareció en Italia en el siglo XVIII, posiblemente en las cortes de Venecia y Nápoles. De ahí pasó a España y Francia y a fines del siglo XVIII a Gran Bretaña, alcanzando gran popularidad en Europa y las colonias entonces existentes de los países europeos.

El nombre de dominó es de origen francés y se refiere a un tipo de capucha monástica, blanca en su interior y negra en su exterior, que usaban los monjes cristianos para resguardarse del frío en invierno.

El primer problema que se puede plantear, es ¿cuántas fichas tiene un juego de dominó? El juego tradicional en España consta de siete "palos": desde el cero (llamado blanca) hasta el seis, como el conjunto de fichas se forma con todas las combinaciones con repetición de siete elementos tomados de dos a dos (pues dos fichas son distintas si se diferencian en algún número y no por el orden de colocación de los números), tenemos, en nuestro caso : $CR_{7,2} = C_{7+2-1,2} = 8!/(6!.2!) = 28$.

Si se desconocen estos contenidos matemáticos, se puede obtener este número por su construcción sistemática o por la técnica de diagramas de árbol.



Hay otras variantes de juegos de dominó, en las que figuran valores de 0 a 9 en vez de 0 a 6, lo que da un total de 55 fichas, o de 0 a 12, populares en América, con 91 fichas.

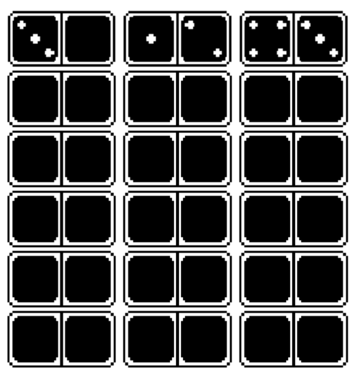
Una segunda cuestión, ¿Cuál es el número total de puntos de todas las fichas de un juego de dominó? La respuesta es 168. En un dominó de 0 a $n$, cada palo aparece $n$ + 2 veces y luego multiplicar por la suma de los valores de los palos.

Una vez que el juego adquirió fama aparecieron paralelamente puzzles-dominó. La formación de cuadrados mágicos con las fichas del dominó forma parte de estos rompecabezas tradicionales.

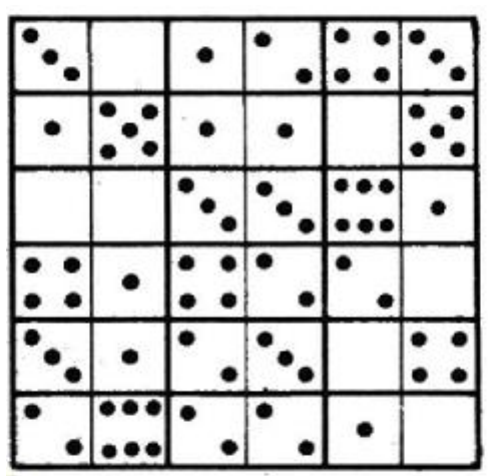
*Cuadrados mágicos con mitades de fichas de dominó*

Como un juego de dominó clásico español tiene 28 fichas y 56 mitades marcadas con números (contando al palo blanco como cero), en principio sólo podrían construirse cuadrados mágicos de órdenes 2, 4 y 6, pues los cuadrados de orden impar utilizan un número impar de números, y al construirlos con dominós habría que dejar al menos un hueco. Además el cuadrado mágico de orden 2 es imposible de construir, pues las dos fichas tendrían que ser idénticas. Por tanto los cuadrados mágicos que pueden construirse con las fichas del dominó son de orden 4 y 6 exclusivamente.

Henry Dudeney (1857-1930), matemático inglés uno de los mejores creadores de juegos matemáticos, presentó los siguientes rompecabezas en su Amusements in Mathematics. La figura inferior se puede considerar un cuadrado de 6 filas y 6 columnas, considerando cada ficha del domino con dos mitades independientes cada una de la otra. En él hay tres fichas ya fijadas, que suman 13 puntos, y se trata de completar las otras quince fichas de forma que la suma de todas las filas, las columnas y las dos diagonales sea también 13.



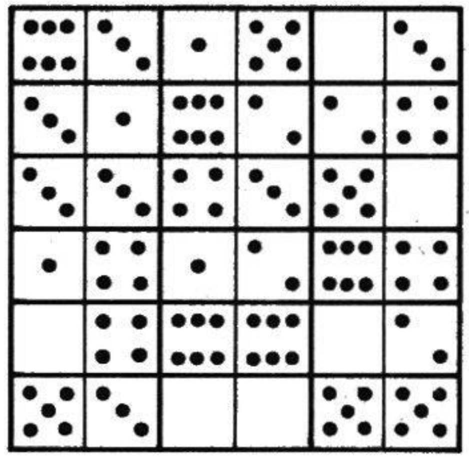
Dudeney da la solución en su libro como un ejemplo. Además indica cómo a partir de él puede construirse un cuadrado mágico de constante mágica 23.

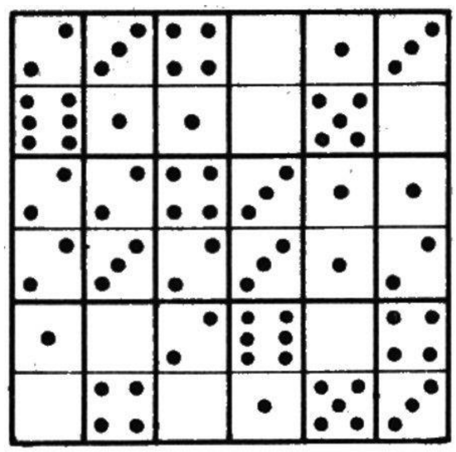


El problema que plantea, es hacer un cuadrado de 6x6, como el anterior, en el que la suma de todas las filas, las columnas y las dos diagonales principales sea 18.

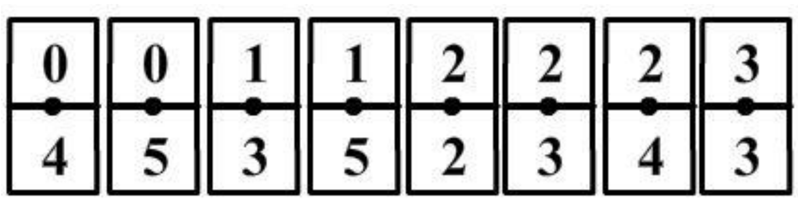
En un cuadrado mágico de orden 6 con fichas de dominó su constante mínima es 13 y su constante máxima 23, y además se pueden formar cuadrados mágicos de dominós, para todo valor de la constante comprendido entre ambos.

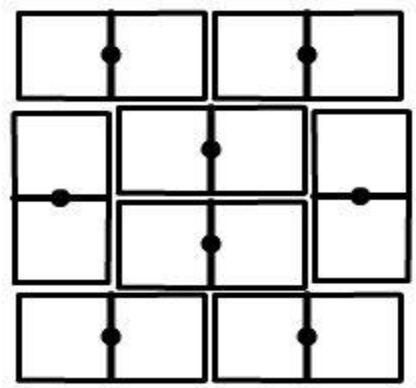
En los siguiente ejemplos, los cuadrados suman 18 y 13:





Los cuadrados mágicos de orden 4 están formados por ocho fichas de dominó y sus constantes mínima y máxima son 5 y 19. Así mismo es posible construir cuadrados mágicos de orden 4 para todo valor de la constante mágica comprendido entre 5 y 19. El siguiente es un ejemplo de constante 10 extraído de los pasatiempos de la Revista Aula del periódico El Mundo. En él se utiliza una idea interesante que disminuye la dificultad y permite un mejor acercamiento al problema: facilitar las fichas con las que se ha de construir el cuadrado mágico. Otra opción que ayuda o dificulta la solución es dar o no la forma de colocación, horizontal o vertical, de las fichas.





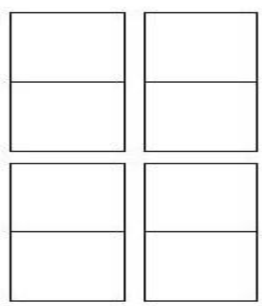
Tenemos pues una buena serie de retos hasta conseguir los distintos tipos de cuadrados mágicos.

*Cuadrados mágicos con fichas de dominós*

Igual que en el caso anterior hay que coger las piezas necesarias del dominó y colocarlas en la disposición que indican los dibujos de manera que la suma de los puntos de las piezas de cada fila, de cada columna y de cada diagonal principal sea la misma (constante mágica). Pero ahora cada ficha del dominó se cuenta como un todo (y no dos mitades) a la hora de considerar su valor, que sale de sumar los puntos de sus dos partes.

<u>Cuadrado mágico de orden 2</u>

No es muy difícil demostrar que la única constante mágica posible es 12. Y a partir de ahí la solución es evidente.

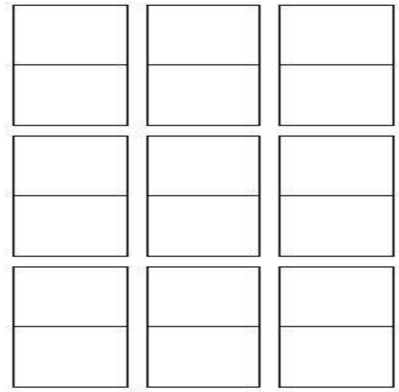


<u>Cuadrado mágico de orden 3</u>

Hay que buscar las nueve piezas que dispuestas según el dibujo hacen que la constante mágica sea 12. También existen disposiciones para las constantes 15, 18, 21 y 24.

Como en un juego de dominó aparecen todas las sumas de 0 a 12, el único cuadrado mágico de orden 3 que contiene los nueve dígitos positivos 1, 2,..., 9, se puede construir con nueve fichas de dominó.

Evidentemente la dificultad del rompecabezas es mayor si no se indica cuál ha de ser la constante mágica.



<u>Cuadrado mágico de orden 4</u>

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | B | A |
| D | C | C | D |
| D | C | C | D |
| A | B | B | A |

El reto consiste en coger ocho fichas del dominó y colocarlas en la cuadricula del dibujo de manera que la constante mágica sea 30. Según vemos la distribución de letras en el cuadrado adjunto, es posible encontrar una solución en la que también suman 30 las fichas cuyas posiciones tienen la misma letra

También se pueden conseguir cuadrados mágicos de orden 5 con constantes mágicas 27 y 33.

Es posible formar cuadrados mágicos con fichas de dominó en los que la suma de todas las filas y columnas resulte un mismo valor. Una posible disposición del juego es tomar 4 fichas que se colocarán formando un cuadrado con el centro vacío. Otra posibilidad es formar un cuadrado completo con 18 fichas de dominó.

**►Ajedrez y cuadrados mágicos**

**Euler o el Caballo de ajedrez**: El caballo de ajedrez es una pieza interesante, porque a diferencia de las otras piezas del ajedrez, no se mueve en forma vertical, horizontal o diagonalmente a lo largo de una línea recta. El caballo se mueve en forma de L. Pero, ¿es posible para un caballo que se mueve de esta manera visitar todas las casillas del tablero exactamente una vez? La respuesta es si como demostró Leonardo Euler (1707 – 1783). En este caso se inicia en una celda con el número 1 (en la celda superior izquierda), llegando a la siguiente celda que entonces le corresponde el número 2, y así sucesivamente según la figura de abajo.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 22 | 11 | 42 | 53 | 40 | 27 | 30 |
| 10 | 43 | 2 | 21 | 28 | 31 | 54 | 39 |
| 3 | 12 | 23 | 52 | 41 | 56 | 29 | 26 |
| 44 | 9 | 20 | 57 | 32 | 25 | 38 | 55 |
| 13 | 4 | 45 | 24 | 51 | 58 | 33 | 64 |
| 8 | 19 | 6 | 61 | 16 | 35 | 48 | 37 |
| 5 | 14 | 17 | 46 | 59 | 50 | 63 | 34 |
| 18 | 7 | 60 | 15 | 62 | 47 | 36 | 49 |

Utilizando el concepto del movimiento del cuadrado del ajedrez William Beverley logró encontrar el siguiente cuadrado semimágico de orden 8.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 48 | 31 | 50 | 33 | 16 | 63 | 18 |
| 30 | 51 | 46 | 3 | 62 | 19 | 14 | 35 |
| 47 | 2 | 49 | 32 | 15 | 34 | 17 | 64 |
| 52 | 29 | 4 | 45 | 20 | 61 | 36 | 13 |
| 5 | 44 | 25 | 56 | 9 | 40 | 21 | 60 |
| 28 | 53 | 8 | 41 | 24 | 57 | 12 | 37 |
| 43 | 6 | 55 | 26 | 39 | 10 | 59 | 22 |
| 54 | 27 | 42 | 7 | 58 | 23 | 38 | 11 |

Se puede notar que en este cuadrado mágico la suma $S$ = 260 es igual para todas las filas y columnas; pero tiene el defecto que las diagonales no suman los 260 (282, 202); en forma similar se nota que los cuatro cuadrados de 4x4 que lo conforman tienen una $S$ = 130, con excepción de las diagonales.

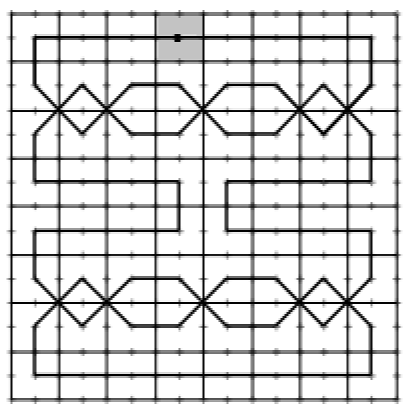
A primera vista parece que el siguiente cuadrado mágico, llamado de Feisthamel, parce construido siguiendo el recorrido de un caballo en el tablero de ajedrez, pero desafortunadamente hay un “salto” del movimiento 32 al 33 que no lo puede hacer un caballo.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 14 | 53 | 62 | 3 | 12 | 51 | 60 |
| 54 | 63 | 4 | 13 | 52 | 61 | 2 | 11 |
| 15 | 6 | 55 | 24 | 41 | 10 | 59 | 50 |
| 64 | 25 | 16 | 7 | 58 | 49 | 40 | 1 |
| 17 | 56 | 33 | 42 | 23 | 32 | 9 | 48 |
| 34 | 43 | 26 | 57 | 8 | 39 | 22 | 31 |
| 27 | 18 | 45 | 36 | 29 | 20 | 47 | 38 |
| 44 | 35 | 28 | 19 | 46 | 37 | 30 | 21 |

Por eso, la pregunta: ¿cuando es posible convertir el recorrido de un caballo en un tablero de ajedrez en un cuadrado mágico? La pregunta fue respondida en el año 2003, por Stertenbrink y Meyrignac que resolvieron este problema mediante el cálculo de todas las combinaciones posibles. Encontraron 140 recorridos que daban lugar a cuadrados semimágicos, pero ningún recorrido que diese lugar a uno mágico.

**El movimiento del rey**

Esta poligrafía obtenida por el recorrido del rey negro, (d8) ¿nos puede indicar sobre el tablero el cuadrado originado? ¿Se trata de un cuadrado mágico?

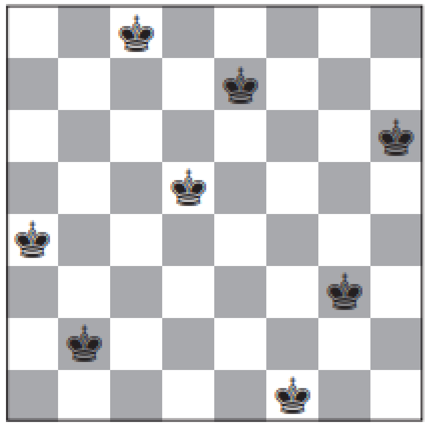


Es un cuadrado mágico de constante 260.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 | 64 | 63 | 62 | 61 |
| 5 | 54 | 7 | 8 | 57 | 58 | 11 | 60 |
| 53 | 6 | 55 | 56 | 9 | 10 | 59 | 12 |
| 52 | 51 | 50 | 49 | 16 | 15 | 14 | 13 |
| 45 | 46 | 47 | 48 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 44 | 27 | 42 | 41 | 24 | 23 | 38 | 21 |
| 28 | 43 | 26 | 25 | 40 | 39 | 22 | 37 |
| 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |

**El problema de las 8 reinas**

El problema de las 8 reinas es colocar ocho reinas de ajedrez en un tablero de ajedrez de 8×8 para que no se amenacen dos reinas; por lo tanto, una solución requiere que no haya dos reinas que compartan la misma fila, columna o diagonal. El problema de las ocho reinas tiene 92 soluciones, de las que 12 son esencialmente distintas y el resto se obtienen mediante simetrías y rotaciones.



El problema de las ocho reinas es un ejemplo del problema más general de ***n*** reinas de colocar $n$ reinas que no se ataquen en un tablero de ajedrez $n \times n$ , para el cual existen soluciones para todos los números naturales $n$ con la excepción de $n = 2$

Se puede construir un cuadrado mágico de orden $n = 8$ (usando los números 1 a 64) y colocar las 8 reinas solo en estas celdas que contengan números primos, de modo que ninguna reina pueda tomar ninguna otra reina (las reinas estarían colocadas en las casillas con números en negrita).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 61 | 26 | **23** | 22 | 15 | 64 | 29 | 20 |
| 27 | 59 | 3 | 35 | **19** | 28 | 45 | 44 |
| 51 | **17** | 11 | 36 | 62 | 10 | 25 | 48 |
| 8 | 18 | 46 | 13 | 12 | 52 | 58 | **53** |
| 6 | 24 | 54 | 42 | 41 | **5** | 33 | 55 |
| 14 | 56 | 49 | **47** | 16 | 37 | 9 | 32 |
| 50 | 39 | 34 | 63 | 38 | 4 | **31** | 1 |
| **43** | 21 | 40 | 2 | 57 | 60 | 30 | 7 |

Además en las esquinas de una de las diagonales también hay números primos (en rojo).

**►Aplicaciones físicas**

Hay algunas propiedades físicas relacionadas con los cuadrados mágicos. Se descubrieron por primera vez en 2001. Las matrices de rotación de coordenadas en mecánica clásica y relativista, combinadas con condiciones de contorno periódicas para cristales finitos, pronto conducen a la vinculación con cuadrados mágicos. Por ejemplo, interpretarlos como matrices de masas puntuales, o como cargas eléctricas hacen que las cargas eléctricas se conecten con el centro de masa, momento de inercia, multipolo eléctrico, potencial electrostático y etc.

La retención de agua en superficies matemáticas se refiere al agua atrapada en estanques en una superficie de varias alturas en un cuadrado mágico topográfico, donde el agua se vertía sobre cada célula del cuadrado. La premisa básica es que la “altura” de cada celda se basa en el valor del número entero en esa celda. Entonces, las células que son más bajas que las células circundantes pueden contener agua (la definición establece que no puede fluir agua diagonalmente entre las celdas). Una celda que es más baja que sus 4 vecinos más cercanos retiene el agua hasta la altura de su vecino más corto. Una celda que se encuentra en el borde exterior del cuadrado mágico no retiene agua. Los bordes de las celdas están abiertos y permiten que fluya el agua. El agua quedará atrapada en estanques (1 celda) y lagos (más de una), y eventualmente todos los estanques se llenarán a su altura máxima.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 12 | 1 | 14 |
| 2 | 13 | 8 | 11 |
| 16 | 3 | 10 | 5 |
| 9 | 6 | 15 | 4 |

+

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | 3 | | |
| | | | |

=

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 12 | 1 | 14 |
| 2 | 13 | 8 | 11 |
| 16 | 6 | 10 | 5 |
| 9 | 6 | 15 | 4 |

Cuadrado mágico 4x4 que retiene 3 unidades de agua

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

+

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | 3 | 2 | |
| | | | |

=

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 9 | 9 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

Cuadrado mágico 4x4 que retiene 5 unidades de agua

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 13 | 15 | 14 | 12 | 11 |
| 10 | 24 | 1 | 22 | 8 |
| 17 | 5 | 20 | 4 | 19 |
| 16 | 3 | 23 | 2 | 21 |
| 9 | 18 | 7 | 25 | 6 |

Cuadrado mágico normal

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 1 | 17 | 14 | 25 |
| 12 | 24 | 10 | 3 | 16 |
| 5 | 18 | 11 | 22 | 9 |
| 21 | 7 | 4 | 20 | 13 |
| 19 | 15 | 23 | 6 | 2 |

Cuadrado mágico pandiagonal

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 19 | 6 | 9 | 16 | 15 |
| 5 | 22 | 23 | 1 | 14 |
| 18 | 2 | 13 | 24 | 8 |
| 12 | 25 | 3 | 4 | 21 |
| 11 | 10 | 17 | 20 | 7 |

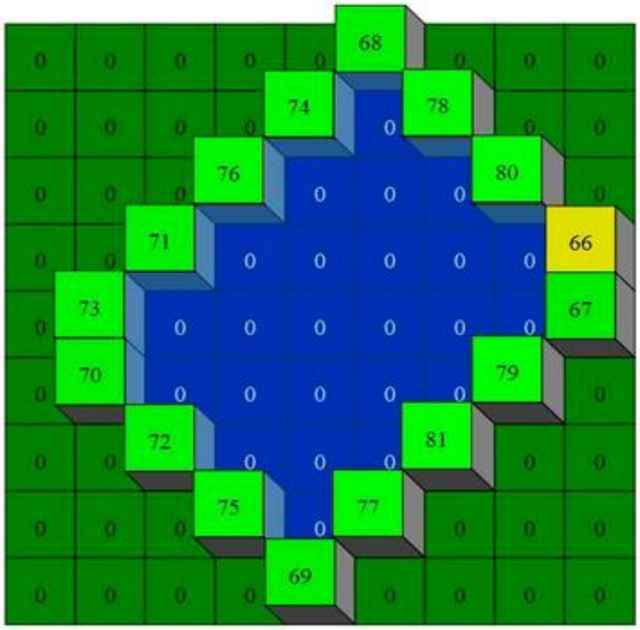
Cuadrado mágico asociativo

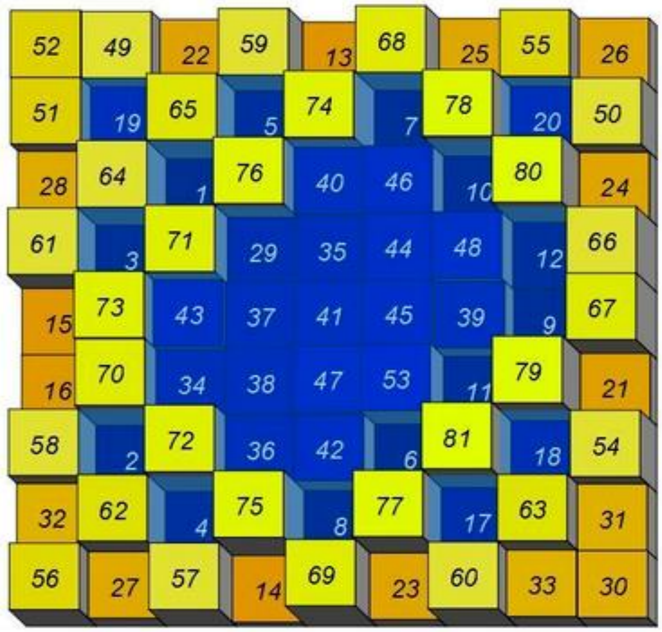
Los cuadrados mágicos normales contienen un máximo de 69 unidades de agua. Los pandiagonales un máximo de 35 unidades y los asociativos 59.

En la figura de arriba el cuadrado mágico normal contiene 2 “lagos” de 2 celdas cada uno, y 1 “estanque” y el asociativo contiene 1 “lago” y 1 “estanque”. 488 unidades de agua es el máximo posible para un cuadrado mágico normal de número de orden 7

El problema es encontrar la cantidad de agua atrapada o retenida para una superficie determinada. Esto ha sido estudiado extensamente para dos superficies matemáticas: cuadrados mágicos y superficies aleatorias. Físicamente, este problema está relacionado con los recubrimientos en una superficie aleatoria y las propiedades de los paisajes y cuencas hidrográficas. Teóricamente, está relacionado con la topología de superficies aleatorias y con la filtración de invasión, pero con algunas características nuevas interesantes. El problema de retención de agua se estudió previamente en el contexto de las superficies creadas por cuadrados mágicos. La aplicación a superficies aleatorias es un ejemplo de las conexiones más profundas de este problema.

La imagen a continuación muestra áreas completamente rodeadas de números más grandes con un fondo azul. Un modelo topográfico de retención de agua es un ejemplo de las propiedades físicas de los cuadrados mágicos. El modelo de retención de agua progresó del caso específico del cuadrado mágico a un sistema más generalizado de niveles aleatorios. Se descubrió un hallazgo contraintuitivo bastante interesante de que un sistema aleatorio de dos niveles retendrá más agua que un sistema aleatorio de tres niveles cuando el tamaño del cuadrado es mayor que 51x51. La teoría de la filtración explica la retención contraintuitiva. Esto se informó en *Physical Review Letters* en 2012 y se hizo referencia en el artículo de *Nature* en 2018.

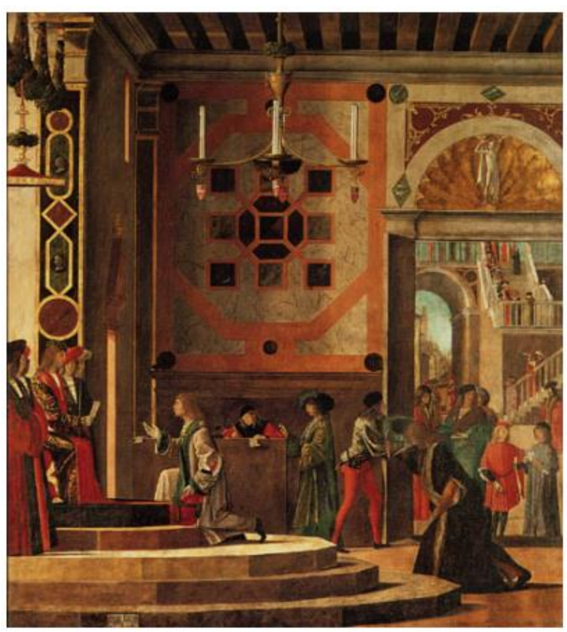


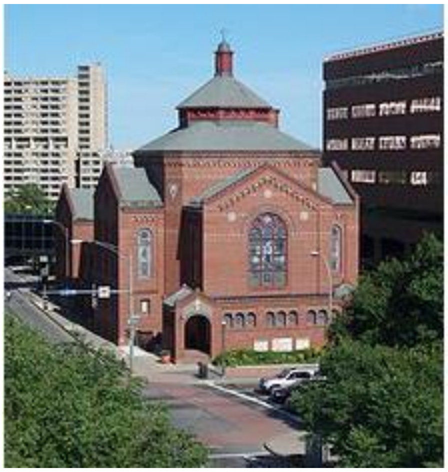

**►Cuadrados mágicos en el arte y cultura popular**

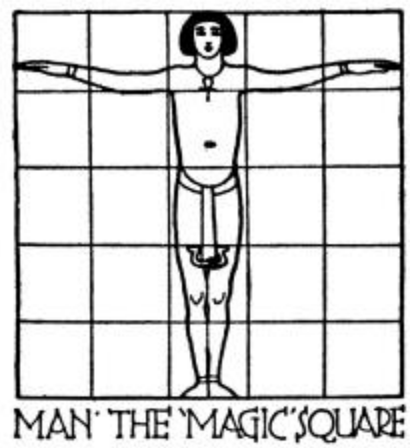
• En Fausto de Goethe, el hechizo de la bruja que se usaba para hacer un elixir juvenil para Fausto, ha sido interpretado como una construcción de un cuadrado mágico.

• Otra obra del Renacimiento donde aparece un cuadrado mágico, en esta ocasión sin completar, es la que su autor, el veneciano Vitore Carpaccio, denominó *El rechazamiento de los ingleses*. Esta pintura está llena de simbolismo, tan sólo al alcance de unos pocos iniciados de aquella época.

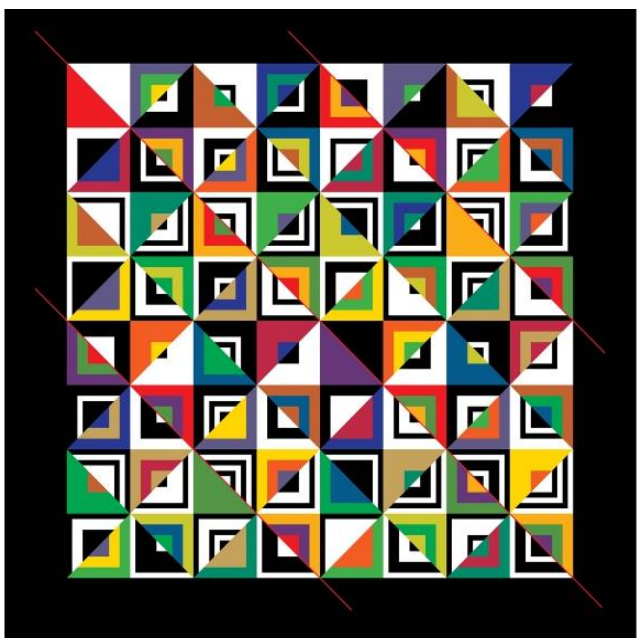


• **Claude Bragdon** (1866 - 1946), arquitecto, artista y escritor también es un apasionado de la relación cosmológica de las matemáticas con el hombre y el universo. Así se puede apreciar en su *First Universalist Church*, en Rochester, New York, que nos recuerdan a esas iglesias bizantinas, o en su *Man the Magic Square*, donde quiere simbolizar la relación existente entre las proporciones armónicas del cuerpo humano, la geometría y los números, que considera el origen del Universo.






• **Margaret Kepner** basa sus trabajos con un fondo siempre matemático. Así se plasma en su obra *Magic Square 8 Study: A Breeze over Gwalior,* que está basada en el cuadrado mágico de Gwalior, que está formado por números del 0 al 63, y donde suman 252 en todas las direcciones, incluidas algunas diagonales quebradas. Los números están representados en base 2 en una mitad, y en base 4 en la otra mitad



•El compositor inglés sir **Peter Maxwell Davies** (1934 – 2016), ha utilizado cuadrados mágicos para estructurar muchas de sus composiciones. Por ejemplo, su *Ave Maris Stella de* 1975 usa el cuadrado mágico 9×9 de la Luna, mientras que su *A Mirror of Whitening Light de* 1977 usa el cuadrado mágico 8×8 de Mercurio para crear el conjunto completo de notas y duraciones para la pieza. Sus otras obras que emplean cuadrados mágicos incluyen *The Lighthouse* (1979), *Resurrection* (1987), *Strathclyde Concerto No. 3 para Horn and Trumpet* (1989), así como muchas de sus sinfonías.

• Cuadrados mágicos, incluido el de Benjamin Franklin, aparecen como pistas del misterio en las novelas de **Katherine Neville** (1945 - ), *The Eight* and *The Fire*.

•El cuadrado mágico de Durero y su *Melencolia I* también jugaron un papel importante en la novela de 2009 de **Dan Brown** (1964 - ), *El símbolo perdido* .

•En el drama televisivo coreano de 2011 *Deep Rooted Tree*, se muestra al Rey Sejong intentando construir un cuadrado mágico de 33×33 usando loncheras. Finalmente descubre el "método piramidal" y completa el cuadrado mágico con la ayuda de un ejército de asistentes de la corte. Esto lo inspira a crear una forma de gobierno más justa gobernada por la razón y las palabras en lugar del poder militar.

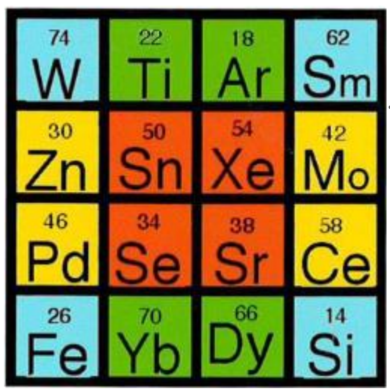
•El 9 de octubre de 2014, la oficina de correos de Macao en la República Popular de China emitió una serie de sellos basados en cuadrados mágicos. La siguiente figura muestra los sellos con los nueve cuadrados mágicos elegidos para estar en esta colección.


• Chuck Burks alega que el artefacto metálico en el centro del episodio " *Biogénesis* " de *Expediente X* es un cuadrado mágico.

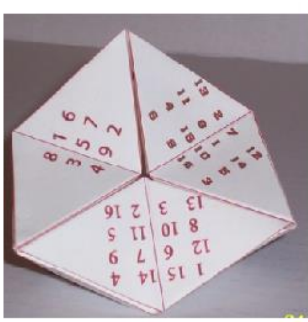
•La primera temporada de *Stargate Atlantis* el episodio "*Brotherhood*" consiste en completar un cuadrado mágico como parte de un rompecabezas que protege un poderoso artefacto antiguo.

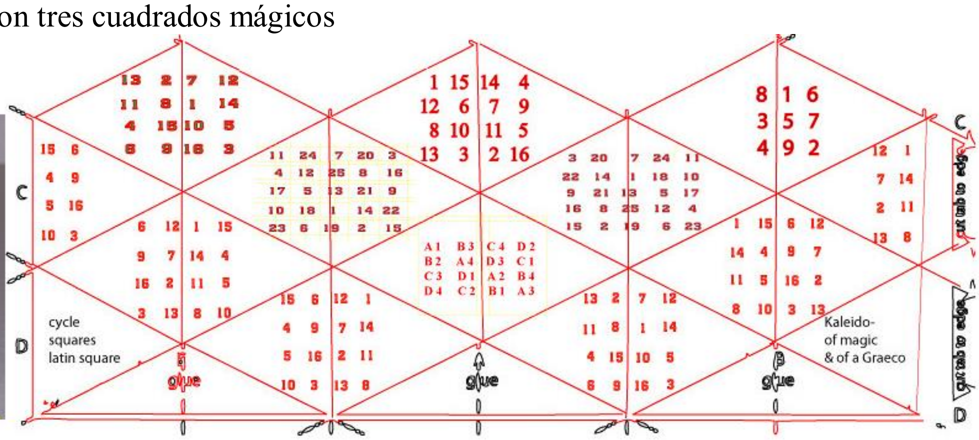
•Los cuadrados mágicos han aparecido también en el arte figurativo. La escultura que mostramos en la figura adjunta es obra del artista **Patrick Ireland** y se encuentra en el jardín de la galería de arte de Eaton en West Palm Beach, Florida. Representa un cuadrado mágico de orden 3 en el que los números se han sustituido por bloques de diferentes tamaños.

•Para el 175 aniversario de la Royal Society of Chemistry el artista **Geoffrey Boocock** construyó el siguiente cuadrado mágico, con números de componentes que podrían representar elementos químicos a través de sus números atómicos. En este cuadrado de 4x4, todas las filas y columnas, así como las dos diagonales principales, sumarían 176.

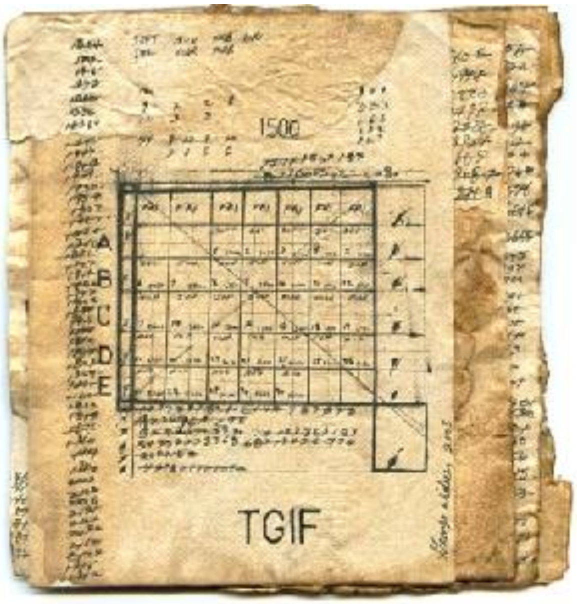



- Un kaleidociclo con tres cuadrados mágicos

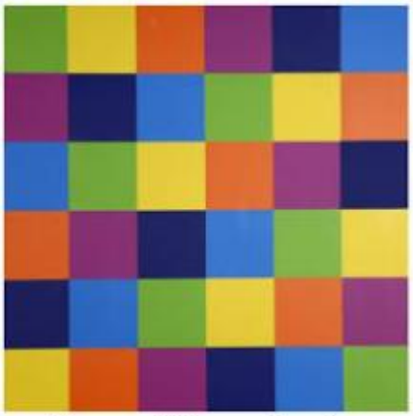





• Durante buena parte de su vida **George Widener** vivió con un diagnóstico de tener una personalidad esquizoide, y no fue hasta cumplir los 39 años cuando fue diagnosticado con el síndrome de Asperger, aunque esta condición no ha sido óbice para que lleve años creando ilustraciones en las que refleja su pasión por los números. En la figura se recogen viernes, cuyas fechas forman un cuadrado mágico.

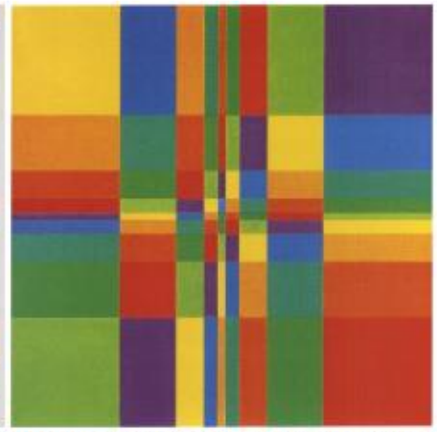



•El pintor y artista gráfico suizo **Richard Paul Lohse** (1902-1988), pinta series de estructuras reticulares de cuadrados y rectángulos en las cuales el estudio del color es una parte fundamental. En algunas de sus obras utiliza el concepto de cuadrado latino, como en las siguientes obras



Composición para Bossin

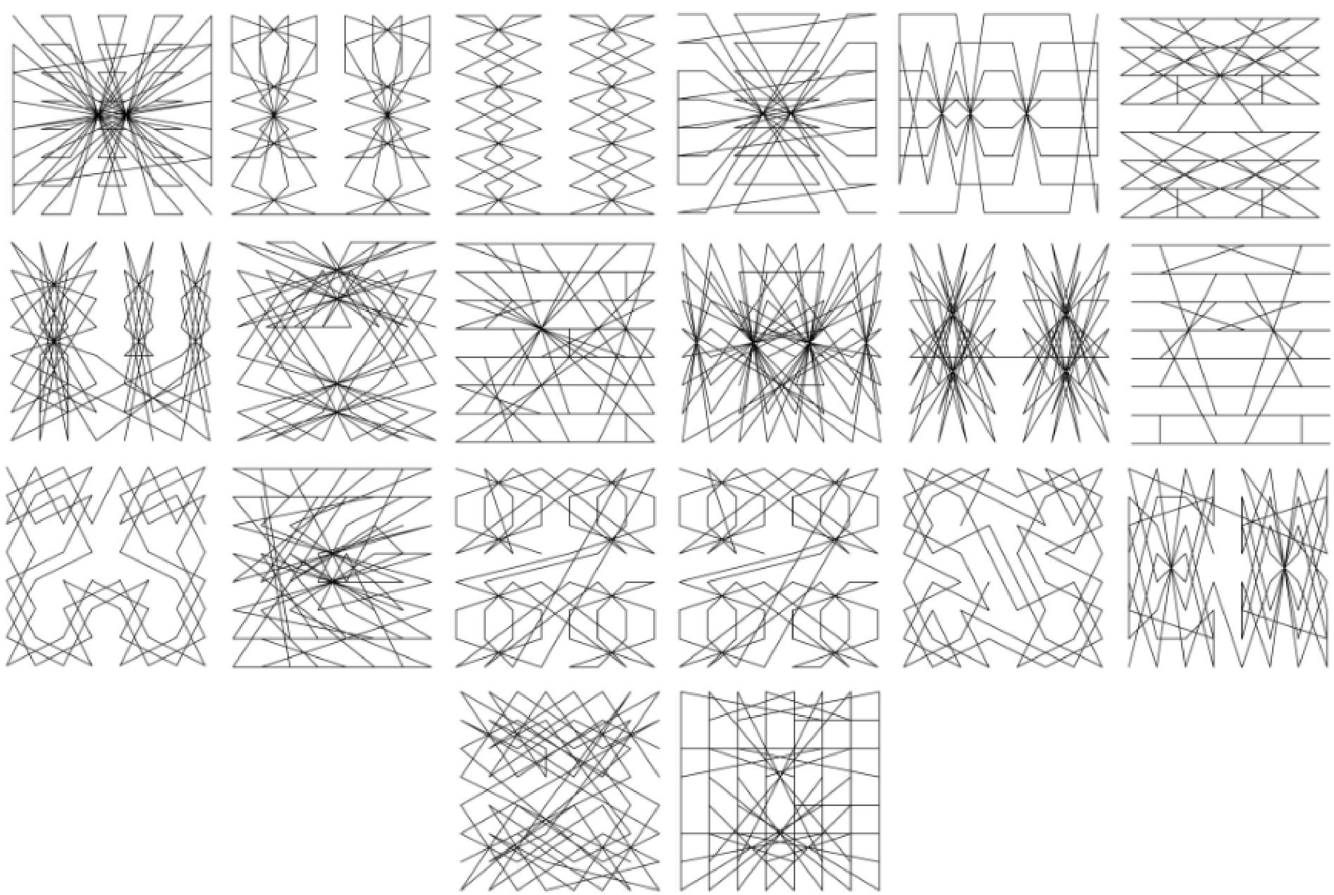
Seis líneas de color verticales sistemáticas con cuadrado amarillo



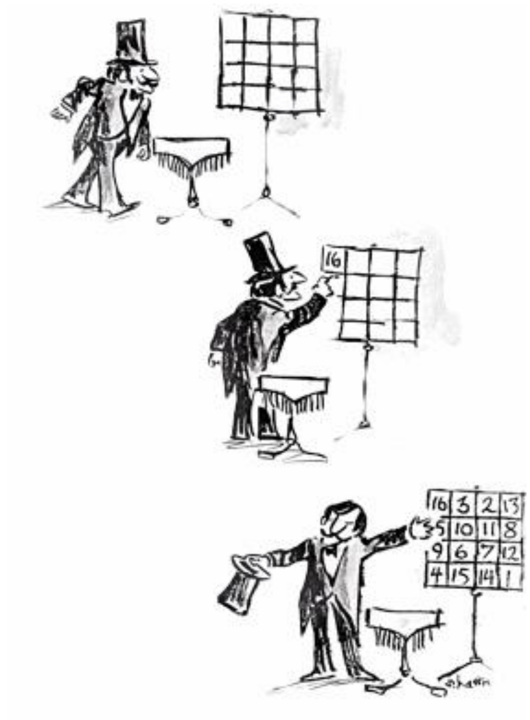
Nueve secuencias de color sistemáticas verticales incrementando la densidad

Pero además, a partir de los cuadrados latinos de este artista se ha introducido en matemáticas un nuevo concepto de estructura algebraica, los grupos con la propiedad de Lohse**,** que satisfacen la propiedad de que cada entrada es diferente de las entradas diagonalmente adyacentes.

- Por último dejo un conjunto de representaciones gráficas de cuadrados mágicos conectando, por líneas, números consecutivos del cuadrado mágico:



Como resumen de la sesión una viñeta de **Sidney Harris**




**Páginas web consultadas:**
http://www.divulgamat.net/index.php?option=com_content&view=article&id=15892&directory=67
https://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square
https://www.abc.es/ciencia/abci-cuadrados-magicos-nadie-podido-resolver-y-premian-6500-euros-201707251015_noticia.html
http://mathworld.wolfram.com/topics/MagicFigures.html
http://www.geomagicsquares.com/index.php
https://docplayer.es/118032-La-magia-de-los-cuadrados-magicos.html
https://www.yumpu.com/es/document/read/14264127/cuadrados-magicos-vicente-trigo
https://culturacientifica.com/2015/01/14/cuadrados-latinos-matematicas-y-arte-abstracto/
http://www.sinewton.org/numeros/numeros/89/Articulos_01.pdf
https://matematicascercanas.com/2015/11/18/los-t-hexagonos-magicos-magic-t-hexagons/
https://matemelga.wordpress.com/2015/10/01/el-hexagono-magico/
https://images.math.cnrs.fr/Regalando-cuadrados-magicos.html?lang=es
http://recmath.org/Magic%20Squares/unususqr.htm
http://recmath.org/Magic%20Squares/magicsquare.htm
https://culturacientifica.com/2013/02/13/habibi-y-los-cuadrados-magicos-i/
https://culturacientifica.com/2013/02/20/habibi-y-los-cuadrados-magicos-ii-2/
https://culturacientifica.com/2013/02/27/habibi-y-los-cuadrados-magicos-iii/
http://www.multimagie.com/

**HOJAS DE EJERCICIOS**

EJERCICIO 1:
Construir un cuadrado mágico de orden 2
EJERCICIO 2:
Formando un cuadrado mágico de orden $n$ con los números desde 1 hasta $n^2$ ¿Demostrar la fórmula de la suma de cada fila, cada columna y cada diagonal?
EJERCICIO 3:
Para un cuadrado mágico de orden $n$ formado por una progresión aritmética creciente: $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ($m = n^2$). Calcular el valor de la Suma Mágica o Constante Mágica ($S$)
EJERCICIO 4:
Encontrar un Sudoku 4x4 que sea mágico
EJERCICIO 5:
Si a un cuadrado mágico de orden $n$ y constante mágica $S$ se le suma a todos sus elementos el mismo valor $x$. ¿Cuál será la constante mágica del nuevo cuadrado mágico?
EJERCICIO 6:
Si a un cuadrado mágico de orden $n$ y constante mágica $S$ se multiplica a todos sus elementos por el mismo valor $x$. ¿Cuál será la constante mágica del nuevo cuadrado mágico?
EJERCICIO 7:
Sean dos cuadrados mágicos de constantes mágicas $S_1$ y $S_2$ si se suman ambos cuadrados mágicos elemento a elemento. ¿Cuál será el valor de la constante mágica del nuevo cuadrado?
EJERCICIO 8:
La cuestión es si es posible construir un cuadrado mágico con los nueve primeros números primos (1; 2; 3; 5; 7: 11; 13; 17; 19). (Nota: El 1 no se considera actualmente número primo)
EJERCICIO 9:
Halla el número K, sabiendo que el cuadrado en el cual está inscrito es mágico y se compone de los números de 10 a 18.

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | K | |
| | | |

EJERCICIO 10:
Completa las casillas que faltan para que resulte mágico el siguiente cuadrado:

| | | |
|---|---|---|
| 7 | | 5 |
| | 8 | |
| 11 | | 9 |

EJERCICIO 11:
Completa el siguiente cuadrado para que sea mágico.

| | | |
|---|---|---|
| 67 | | 43 |
| | | |
| | 73 | |

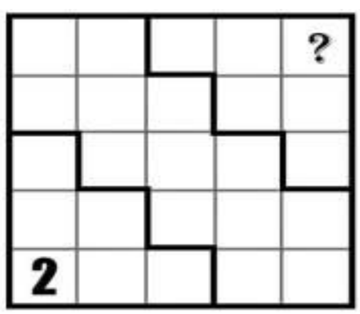
EJERCICIO 12:
Hallar A, B, C, D, E en el siguiente cuadrado mágico:

| | | |
|---|---|---|
| 15 | A | 35 |
| 50 | B | C |
| 25 | D | E |

EJERCICIO 13:
Estamos haciendo un cuadrado mágico multiplicativo utilizando los números 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 y 100. Los productos de los números situados en cada fila, en cada columna y en las dos diagonales deben ser todos iguales. ¿Qué número se debe poner en la casilla marcada con los signo de interrogación?

| | | |
|---|---|---|
| 20 | 1 | |
| | | ¿? |
| | | |

EJERCICIO 14:
El cuadrado latino de la figura se rellena con los números 1, 2, 3, 4 y 5 de tal manera que cada fila y cada columna contienen cada uno de ellos exactamente una vez.
Además, la suma de los números en cada una de las tres regiones con bordes en negrita es igual.
¿Qué número está en la esquina superior derecha?




EJERCICIO 15:
El juego de los 15 consiste en un cuadriculado de 16 casillas (cuatro por cada ladp), que van ocupadas por sendas fichas numeradas del 1 al 15, con lo que queda una casilla vacía. Las fichas pueden moverse haciendo que el lugar vacío sea ocupado por cualquiera de las fichas que le son adyacentes. En el juego se trata de partir de una situación inicial de las fichas para llegar a otra situación pedida.
Tomemos como situación inicial de partida el orden natural creciente, como indica la figura.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 | 14 | 13 | 12 |
| 11 | 10 | 9 | 8 |
| 7 | 6 | 5 | 4 |
| 3 | 2 | 1 | |

El inventor de este juego fue SAM Lloyd, a finales del siglo XIX. Entre los problemas que este autor propuso esta el siguiente: Disponer las fichas de tal modo que la suma de los números de cada fila horizontal, en cada vertical y en cada diagonal sea la misma.

EJERCICIO 16:

Hallar el valor de $x$, $y$ en el siguiente cuadrado mágico incompleto

| | | |
|---|---|---|
| | $x$ | 45 |
| 25 | 30 | |
| $y$ | | 10 |

EJERCICIO 17:

Sean dos cuadrados mágicos multiplicativos (los productos de los elementos de las filas, de las columnas y de las diagonales dan lo mismo) de constantes mágicas $P_1$ y $P_2$ si se multiplican ambos cuadrados mágicos elemento a elemento. ¿Cuál será el valor de la constante mágica del nuevo cuadrado?

EJERCICIO 18:

En un cuadrado mágico de orden 3, demostrar que la suma o constante mágica es el triple del elemento de la casilla central

EJERCICIO 19: Demostrar la siguiente propiedad en un cuadrado mágico aditivo de orden 3

| | | |
|---|---|---|
| | $b$ | |
| | | $c$ |
| $a$ | | |

Propiedad: $a = \dfrac{b+c}{2}$

EJERCICIO 20:

Demostrar la siguiente propiedad en un cuadrado mágico multiplicativo de orden 3

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | | $c$ |
| | $x$ | |
| $d$ | | $b$ |

Propiedad: $x^2 = ab = cd$

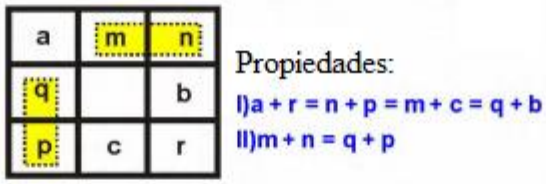
EJERCICIO 21:

Demostrar la siguiente propiedad en un cuadrado mágico aditivo de orden 3

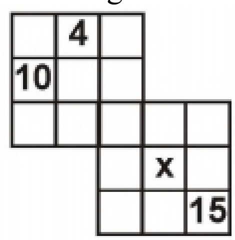
| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | |
| | $x$ | |
| | $c$ | $d$ |

Propiedad: $x = \dfrac{b+c}{2} = \dfrac{a+d}{2}$

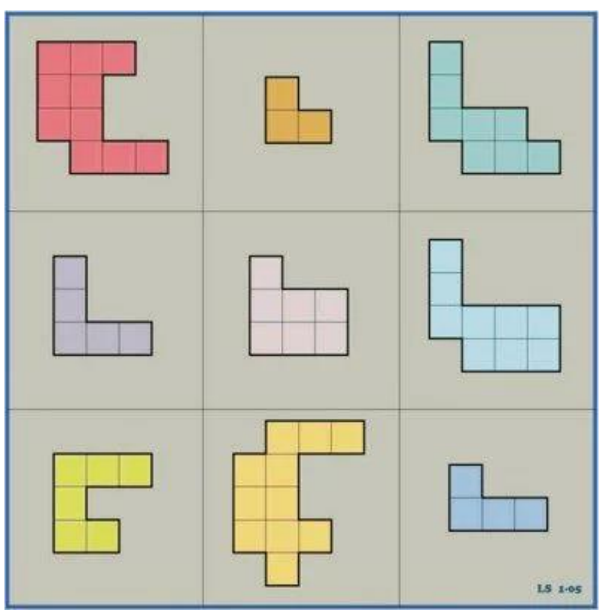
EJERCICIO 22:
Demostrar las siguientes propiedades en un cuadrado mágico aditivo de orden 3




EJERCICIO 23:
En la figura, cada recuadro 3x3 es un cuadrado mágico. Hallar el valor de *x*




EJERCICIO 24:
Demostrar que en los cuadrados mágicos de orden 4, también suman la constante mágica los números de casillas situadas en las casillas grises de cada figura.
EJERCICIO 25:
La imagen muestra un cuadrado geomágico. Descubre la figura que debería aparecer al margen en cada caso.



SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS:

1. De orden 2 no existe ninguno, se puede demostrar considerando el cuadrado mágico *a*, *b*, *c*, *d* de la figura; para que tal disposición fuera un cuadrado mágico deberían cumplirse las siguientes ecuaciones

| | |
|---|---|
| $a$ | $b$ |
| $c$ | $d$ |

$a + b = S$ (I); $a + c = S$ (II); $a + d = S$ (III); $c + d = S$ (IV); $b + d = S$ (V); $b + c = S$ (VI) (siendo $S$ la constante mágica ) y restando cualesquiera dos se obtiene que $a = b = c = d$

2.

$$S = \frac{(1+n^2).n}{2}$$

3.

$$S = \frac{(a_1+a_m).n}{2}$$

4.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |

5. $S + nx$

6. $Xs$

7. $S_1 + S_2$

8. Es imposible. La suma de esos 6 números primos es 78, por lo que cada fila, columna y diagonal debe sumar 26, pero solo hay un número par (el 2), y por tanto en la fila, columna y diagonal que no esté el 2 habría que sumar tres números impares, que nunca pueden dar como resultado un número par como es 26.

9. Sea N la constante mágica del cuadrado.

| | | |
|---|---|---|
| a | b | c |
| | K | |
| d | e | f |

a + b + c = N

a + K + f = N

b + K + e = N

c + K + d = N

d + e + f = N

Sumando miembro a miembro las tres igualdades centrales: (a + b + c) + 3K + (d + e + f) =3N===> N + 3K + N = 3N ===> 3K = N ===> K=N/3 En este cuadrado mágico, N es la tercera parte de la suma de sus elementos 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 = 126 ===> N = 42. Luego K = 14.

10.

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 12 | 5 |
| 6 | 8 | 10 |
| 11 | 4 | 9 |

11.

| | | |
|---|---|---|
| 67 | a | 43 |
| | K | |
| b | 73 | c |

67 + a + 43 = S (I); a + K + 73 = S (II). Por lo tanto al igualar (I) a (II), obtenemos: K = 37

Por otra parte: b + K(37) + 43 = S (III); 67 + K(37) + c = S (IV); b + 73 + c = S (V).

Sumando (III) y (IV) miembro a miembro tenemos 184 + b + c = 2S, que restada de (V) nos da S = 111, que llevada a (I), (III) y (IV) nos da unos valores de a = 1; b = 31; c = 7

y el resto es trivial

| | | |
|---|---|---|
| 67 | 1 | 43 |
| 13 | 37 | 61 |
| 31 | 73 | 7 |

Tiene la particularidad este cuadrado mágico de estar compuesto solo por números primos.

12. A= 40; B = 30; C = 10;D = 20; E = 45

13. El 4. El producto de todos los números da 1000.000.000 por lo tanto su raíz cubica es 1000 que es lo que va en cada fila columna y diagonal, por lo tanto la casilla superior derecha tiene el 50, los dos que faltan en la columna izquierda solo pueden ser el 25 y el 2 siendo este ultimo el del vértice inferior izquierdo. El central queda el 10, el 100 para el inferior de la columna central y quedan el 4 en la casilla marcada y el 5 en el extremo inferior derecho

14. El 3. Como cada región debe sumar 25, pues (1 + 2 + 3 + 4 + 5) x 5 = 75. En la región inferior izquierda con un 2 ya colocado sólo pueden sumar 25 con tres 5 y dos 4; con lo cual para la superior derecha nos quedan dos 5 y tres 4, con lo cual la casilla superior derecha es un 3.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 5 | 3 |
| 3 | 1 | 2 | 4 | 5 |
| 5 | 3 | 1 | 2 | 4 |
| 4 | 5 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 4 | 5 | 3 | 1 |

15. Es como si tuviésemos un cuadrado mágico formado por los números consecutivos del 0 al 15

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 | 1 | 2 | 12 |
| 4 | 10 | 9 | 7 |
| 8 | 6 | 5 | 11 |
| 3 | 13 | 14 | |

16. $x = -5$; $y = 15$. Llamando $a$, por ejemplo, al elemento situado en la casilla superior derecha tenemos que: $a + x + 45 = \mathbf{S}$; $a + 25 + y = S$; $a + 30 + 10 = S$ (hemos llamado $S$ es la constante o suma mágica), de donde $x + 45 = 30 + 10 = 25 + y$ $(= S - a)$
Esta posición es factible (SE PUEDE CONSEGUIR MOVIENDO LAS FICHAS), pues el número de inversiones es par (se produce una inversión cuando un número esta colocado antes que otro menor). SÓLO LAS MITAD DE LAS DISPOSICIONES SON FACTIBLES

17. $P_1.P_2$

18.

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $d$ | $x$ | $e$ |
| $f$ | $g$ | $h$ |

Si sumamos la fila, la columa y las diagonales (donde aparece $x$) tenemos: d $+ x + e = S$; $b + x + g = S$; $a + x + h = S$; $c + x + f = S$; y al sumar las 4 relaciones anteriores tenemos: $a + b + c + d + x + e + f + g + h + 3x= 4S$, pero la suma de los elementos del cuadrado mágico es 3S, por lo tanto $3S + 3x = 4S$

19. Llamando $x$ al número de la casilla superior derecha, se tiene:

| | | |
|---|---|---|
| $S$-$(b+x)$ | $b$ | $x$ |
| | $3S$ | $c$ |
| $a$ | | $S$-$(c+x)$ |

De la suma de los elementos de las diagonales, se tiene: $x + 3S + a = S$ (I); $S - (b + x) + 3S + S - (c + x) = S$ (II); de (I) se obtiene: $x = 2S - a$ (III) y de (2) $4S = (b + c) + 2x$ (IV) que dividiendo por 2 en (IV) y sustituyendo la relación obtenida en (III) se tiene lo demostración de la propiedad.

20. Llamando $P$ a la constante mágica tenemos: $axc = P$; $cxd = P$; despejando $x$ e igualando tenemos $x = P/(ab)$ (I)$= P/(cd)$; de donde $ab = cd$. Por otra parte

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $\frac{P}{ac}$ | $c$ |
| | $x$ | |
| $d$ | $\frac{P}{db}$ | $b$ |

multiplicando los elementos de la 2ª columna: $P/(ac).x.P/(\mathrm{db}) = P$ y de aquí: $x = abcd/P = (ab)^2/P$(II), pero de (I) $P = xab$ sustituyendo en (II); $x = (ab)/x$

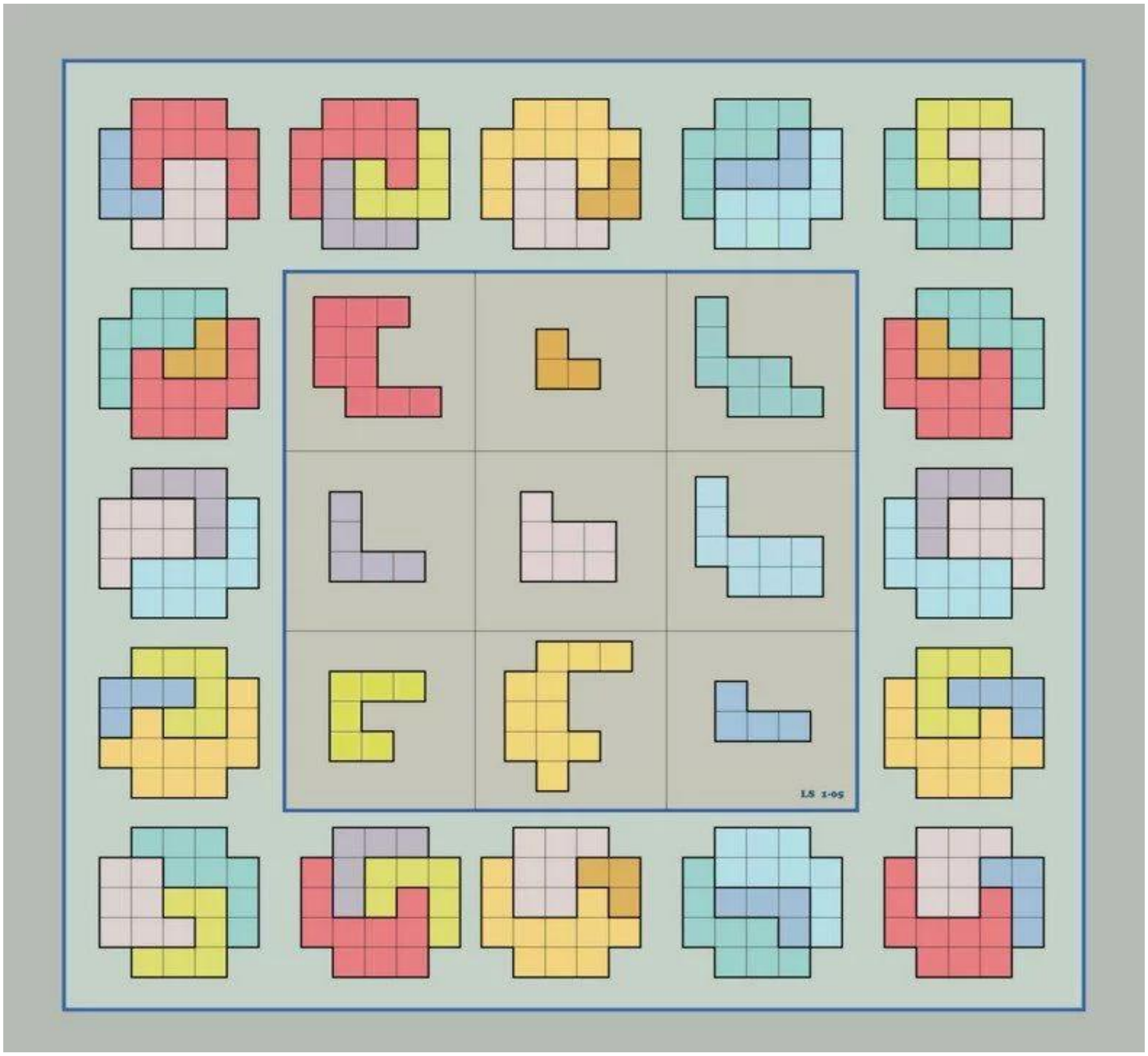
21. Como $S = 3x = a + x + d = b + x + c$; basta pasar $x$ al primer miembro en cada una de las dos igualdades y dividir por 2.

22. En I basta sumar la casilla central a cada uno de los términos en las igualdades y tenemos la propiedad que caracteriza a los cuadrados mágicos. En II basta sumar $a$ a cada una de las igualdades y volvemos a tener la propiedad que caracteriza a los cuadrados mágicos.

23. 11. Llamando $z$ al número de la casilla común a los dos cuadrado mágicos, por la propiedad del problema 19, aplicada al cuadrado mágico superior, obtenemos que $z = (10 + 4)/2 = 7$; en el otro cuadrado mágico, aplicando la propiedad de que la casilla central es la tercera parte de su constante mágica, tenemos: $7 + x + 15 = 3x$, de donde $x = 11$

24. Sumando los números de las casillas de la figura 2 y 3 salen dos veces la suma mágica (2 filas = $2S$); lo miso con los números de las figuras 2 y 4 (2 columnas = $2S$) y lo mismo que los números de las figuras 1 y 2 (2 diagonales = $2S$), por lo que los números de las figuras 1, 3 y 4 suman lo mismo. Ademas si sumamos los números de las figuras 1, 2, 3 y 4 salen 4 veces la suma mágica, luego $2S$ + números figura 3 + números figura 4 = $4S$, luego la suma de los números de las figuras 1, 2 , 3 y 4 = $S$

*25.*


LS 1-05