Preparación de Geometría
TTM Zaragoza

Glenier Bello, 14 de diciembre de 2018
gl.bello.burguet@gmail.com

1 Introducción

En las siguientes notas veremos las soluciones de varios problemas de geometría que han aparecido en Olimpiadas de Matemáticas. Al principio nos centraremos en los problemas de las fases locales de la OME (Olimpiada Matemática Española) de los últimos dos cursos para tomar contacto directo con el tipo de problemas que seguramente aparezcan en la próxima OME. Para cada problema concreto estudiaremos previamente la teoría necesaria para poder resolverlo.

Al final mencionaremos algunos resultados teóricos extra que no hayan aparecido antes pero que son importantes y quizá los necesitéis en problemas futuros. Os dejaré algunos problemas (con soluciones) para que los intentéis en casa y también mencionaremos otras fuentes de problemas por si alguien quiere hacer más.

Para no repetirnos demasiado, vamos a adoptar la siguiente notación durante todo el texto. En todos los teoremas que siguen tenemos un triángulo $\triangle ABC$, los ángulos respectivos los denotamos por α, β, γ y los lados opuestos tienen longitudes a, b, c. R denota el radio de la circunferencia circunscrita, r el de la inscrita, $h_a, \ldots$ la longitud de la altura correspondiente al lado a, $m_a, \ldots$ la mediana relativa al lado a, (ABC) el área del triángulo, s el semiperímetro, I el incentro, O el circuncentro, H el ortocentro y G el baricentro.

2 Problemas de la Fase Local 2017-2018

2.1 Desigualdad triangular. *Los números $a, b, c > 0$ son los lados de un triángulo si y sólo si cualquiera de ellos es menor que la suma de los otros dos. Es decir,*

$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b.$$

Por ejemplo, $2, 3, 4$ son los lados de un triángulo pero $2, 3, 5$ no. Notar que en realidad nos basta comprobar que el lado mayor es menor que la suma de los otros dos.

2.2 Problema. Determinar los números reales $x > 1$ para los cuales existe un triángulo cuyos lados tienen longitudes

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad 2x^3 + x^2 + 2x + 1, \quad x^4 - 1.$$

Solución. Denotemos por a, b, c las cantidades de arriba; es decir,

$$a := x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad b := 2x^3 + x^2 + 2x + 1, \quad c := x^4 - 1.$$

Como $x > 1$, notar que $a, b, c > 0$. Es inmediato que $a > c$, luego tenemos que $a + b > c$. También es muy directo probar que $b + c > a$ y $a + c > b$ (basta simplificar y usar que $x > 1$). Por tanto, usando la desigualdad triangular 2.1 deducimos que para todo $x > 1$ las cantidades del enunciado forman los lados de un triángulo. $\square$

2.3 Definiciones.

- La **mediatriz** de un segmento es la recta que perpendicular al segmento por su punto medio. Observar que los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento. Usando este hecho es fácil ver que las mediatrices de los lados de un triángulo se intersecan en un punto, al que llamaremos **circuncentro** del triángulo. Este punto es el centro de la **circunferencia circunscrita** al triángulo.

- Una **altura** de un triángulo es una recta perpendicular a uno de los lados que pasa por el vértice opuesto. Es fácil ver que las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto, al que denominaremos **ortocentro** del triángulo.

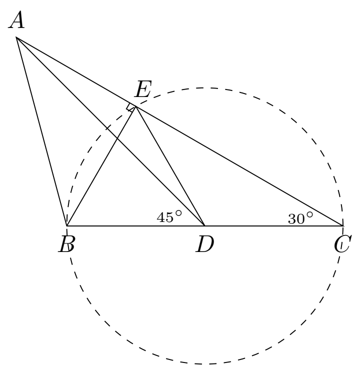
- La **bisectriz** de un ángulo es la recta que lo divide en dos ángulos iguales. Los puntos de esta recta equidistan de las rectas que forman el ángulo. El **incentro** es el punto donde se cortan las **bisectrices** y es el centro de la **circunferencia inscrita** al triángulo.

- Una **mediana** de un triángulo es una recta que une uno de los vértices con el punto medio del lado opuesto. Las tres medianas de un triángulo se intersecan en un punto, al que denominaremos **baricentro** (o centro de gravedad) del triángulo. La distancia del baricentro a cada vértice es $2/3$ de la longitud de la mediana asociada (por ejemplo, $AG = 2/3m_a$). Este hecho se usa para demostrar la concurrencia de las medianas.

Nota. Por abuso de notación, entenderemos que las palabras altura, bisectriz y mediana son a veces rectas y otras veces segmentos que unen vértices de un triángulos con puntos en su lado opuesto (en el caso de la mediana sería el punto medio y en el caso de la altura sería lo que denominamos el **pie de la altura**). Con h_a, b_a y m_a siempre entenderemos que son segmentos.

2.4 Problema. Sea AD la mediana de un triángulo ABC tal que $\angle ADB = 45°$ y $\angle ACB = 30°$. Determinar el valor de $\angle BAD$.

Solución.



Sea E el pie de la altura del vértice B (es decir, $BE \perp AC$ en E). Como $\angle BEC = 90°$, deducimos que la circunferencia circunscrita al triángulo BEC tiene diámetro BC, y por tanto su centro es el punto D. Luego $DE = DB = DC$. Entonces $\angle DEC = \angle ECD = 30°$ y $\angle BED = 90° - \angle DEC = 60°$. Como $ED = BD$ tenemos que $\angle DBE = \angle BED = 60°$, luego el triángulo $\triangle BED$ es equilátero. Por tanto, $\angle EDA = 15°$. Como $\angle AED = 90° + \angle BED = 150°$, deducimos que $\angle DAE = 15° = \angle EDA$. Así que $AE = ED = EB$. Luego $\angle EBA = \angle BAE = 45°$ y entonces $\angle BAD = 30°$. $\square$

2.5 Expresiones en términos de los lados de un triángulo.

- **Área**: $(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, *donde* $s = (a+b+c)/2$ *es el* **semiperímetro**.
- **Mediana**: $m_a = \dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$.
- **Altura**: $h_a = \dfrac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.
- **Bisectriz**: $b_a = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}$.
- **Radio de la circunferencia circunscrita**: $R = \dfrac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$.
- **Radio de la circunferencia inscrita**: $r = \dfrac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$.

2.6 Teorema del coseno.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a\,b\,\cos\gamma.$$

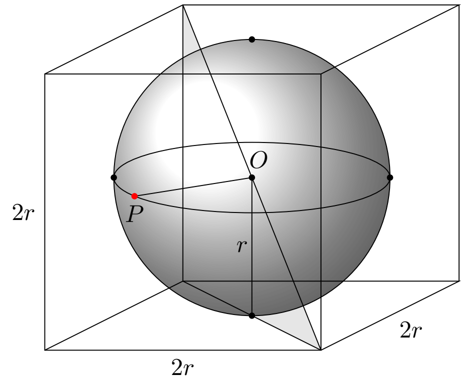
Luego el ángulo γ es agudo si y sólo si $c^2 < a^2 + b^2$ y es obtuso si y sólo si $c^2 > a^2 + b^2$. Cuando $\gamma = 90$, obtenemos el **Teorema de Pitágoras**.

2.7 Problema. Probar que:

1. La suma de las distancias desde un punto de la superficie de la esfera inscrita en un cubo de $\mathbb{R}^3$ a todas las caras del mismo no depende del punto elegido.
2. Misma cuestión anterior para la suma de los cuadrados de las distancias.
3. Misma cuestión que las anteriores para la suma de los cubos de las distancias.

Solución. Sea r el radio de la esfera y ℓ el lado del cubo. Notar que $\ell = 2r$. Sea P un punto de esfera.

1. Geométricamente, es inmediato ver que la suma es 3ℓ.
2. Usando el Teorema de Pitágoras 2.6 es inmediato ver que podemos reducir la suma de los 6 cuadrados del enunciado a $PA^2 + PB^2$, donde A y B son vértices opuestos del cubo.



Y ahora basta usar la fórmula de la mediana en términos de los lados 2.5.

3. Basta usar la fórmula

$$u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v) = (u+v)^3 - \frac{3}{2}(u+v)[(u+v)^2 - (u^2+v^2)].$$

tomando u, v las distancias de P a una cara y a la cara opuesta, sumando y usando los apartados anteriores.

□

3 Problemas de la Fase Local 2016-2017

3.1 Problema. Sea E una elipse y consideremos tres rectas paralelas r_1, r_2 y r_3, cada una de las cuales corta a E en dos puntos distintos. Sean estos puntos A_1, B_1, A_2, B_2 y A_3, B_3, respectivamente. Probar que los puntos medios de los segmentos A_1B_1, A_2B_2 y A_3B_3 están alineados.

Solución. El resultado es inmediato en el caso de que la elipse sea una circunferencia. Estas tres rectas determinan tres cuerdas y sus puntos medios son los puntos de corte de las rectas con un diámetro perpendicular a todas ellas. En otro caso, pensando en la elipse como la intersección de un cono con un plano (el cono de Apolonio), la proyección sobre un plano perpendicular al eje del cono nos da una circunferencia y las rectas paralelas se proyectan en rectas paralelas. □

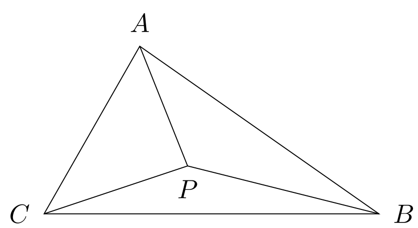
3.2 Semejanza. Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, los triángulos son semejantes. Cuando dos triángulos son semejantes, sus lados, alturas, medianas, bisectrices, el radio de la circunferencia inscrita y el de la circunscrita son proporcionales. Si esa constante de proporcionalidad es k, entonces la relación entre las áreas de los triángulos es k^2. Otros criterios de semejanza son:

- Un ángulo igual y los lados adyacentes proporcionales.
- Los tres lados proporcionales.

Diremos que dos triángulos son **congruentes** cuando son semejantes y la razón de proporcionalidad es 1. Es decir, podemos obtener un triángulo a partir de una rotación y una traslación del otro triángulo.

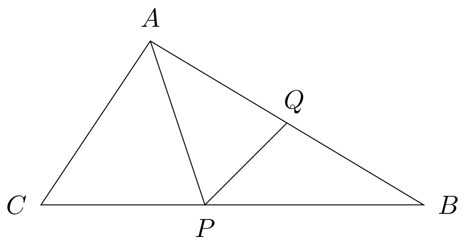
3.3 Problema. Sea T un triángulo de ángulos α, β y γ. ¿Para qué valores de α, β y γ el triángulo T se puede dividir en tres triángulos congruentes entre sí?

Solución. Supongamos primero que tenemos una distribución de los tres triángulos como en la siguiente figura:



es decir, con un punto interior P. Denotemos por r, s y t los ángulos de los triángulos congruentes. Sea $r = \angle BPA$ (sin pérdida de generalidad). Notar que $r + \angle APC > 180°$ y $r + \angle CPB > 180°$. Como $r + s + t = 180°$, tiene que ser $\angle APC = \angle CPB = r$. De aquí se deduce inmediatamente que T es equilátero. Y esta es, en efecto, una solución posible; es decir, $\alpha = \beta = \gamma = 60°$.

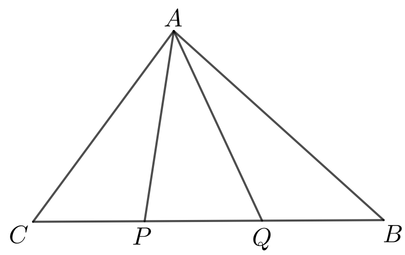
Supongamos ahora que tenemos una distribución de los tres triángulos como en la siguiente figura:



□

Denotemos por $r = \angle BPQ$, $s = \angle PQB$ y $t = \angle QPB$. Notar que entonces $\angle AQP = r + t$, luego sólo puede ser $\angle AQP = s$, y por tanto $s = 90°$. Entonces $AP = PB$ (lados opuestos a los ángulos s). Luego $\angle PAQ = \angle QBP = t$ y por tanto $\angle QPA = r$. Notar que $\angle PCA = s = 90°$ (ángulo opuesto al lado AP en el triángulo ACP). Entonces sólo puede ser $\angle APC = r$, ya que $t+2r < t+r+s = 180°$. Luego $r = 30°$ y por tanto $t = 60°$. Notar que esta solución es posible (i.e., que los ángulos α, β y γ sean $30°, 60°$ y $90°$ en cualquier orden).

La situación en la que los tres triángulos comparten un vértice (por ejemplo el vértice A como en la siguiente figura) es fácilmente descartable ya que razonando como antes obtenemos que debería ser $\angle APC = \angle BQA = 90°$, lo cual es imposible.



Luego las únicas soluciones son los ángulos $(60°, 60°, 60°)$ y $(90°, 60°, 30°)$.

3.4 Teorema del seno.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R.$$

De aquí obtenemos que a un ángulo mayor le corresponde un lado mayor.

3.5 Caracterización de cuadriláteros cíclicos. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

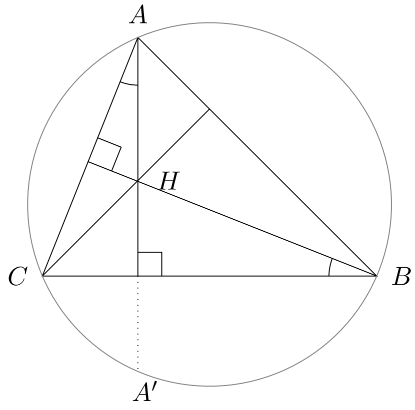
(i) *el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico (es decir, existe una circunferencia circunscrita al cuadrilátero);*

(ii) *$\angle ACB = \angle ADB$;*

(iii) $\angle ADC + \angle ABC = 180°$.

3.6 Problema. En un triángulo acutángulo ABC consideramos su ortocentro, H. Sean A', B' y C' los simétricos de H con respecto a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Probar que si los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen un ángulo igual, entonces también tienen un lado igual. ¿Es cierto el recíproco?

Solución.



□

Notar que $\angle CAH = 90° - \gamma = \angle HBC = \angle CBA'$, donde en la última igualdad hemos usado que A' y K son simétricos respecto de BC. Luego A' está en la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABC$ (ver 3.5). Análogamente, B' y C' también están en esa circunferencia. Por el Teorema del seno 3.4 sabemos que $a = 2R \operatorname{sen} \alpha$. Luego si $\alpha = \alpha'$ entonces $a = a'$ (ya que R es común). Análogamente obtenemos fórmulas análogas para b y c.

El recíproco no es cierto, y el mismo Teorema del seno 3.4 nos sirve para demostrarlo. Basta tener en cuenta que $\triangle A'B'C'$ no es necesariamente acutángulo, de hecho sus ángulos miden, respectivamente $180 - 2\alpha, 180 - 2\beta$ y $180 - 2\alpha$, y tomar ángulos cuya media sea 90. Por ejemplo, si $\triangle ABC$ tiene un ángulo de 80 y $\triangle A'B'C'$ tiene uno de 100, ya tendremos garantizado que ambos triángulos tienen sendos lados que mide lo mismo. Como $100 = 180 - 2\alpha$, se tendrá que los ángulos de $\triangle ABC$ son $40, 60$ y 80, mientras que los de $\triangle A'B'C'$ serán $100, 60$ y 20. No hay dos con el mismo valor.

3.7 Problema. Probar que dados $4n$ puntos en el espacio tridimensional, tales que no hay cuatro de ellos coplanarios, siempre se pueden formar n pirámides de base triangular de modo que no hay intersecciones entre ellas.

Solución. Evidentemente por hipótesis no hay 3 puntos alineados, pues en ese caso añadiendo un cuarto punto cualquiera a la terna violaríamos la hipótesis sobre el carácter no coplanario.

Consideremos todas las posibles ternas de puntos y el plano que determina (unívocamente, al no haber 3 puntos alineados) cada terna. Hay una cantidad finita de estos planos y, por ello, es posible elegir una familia de planos paralelos que recubran el espacio que no sean paralelos a ninguno de este conjunto finito. Todo plano de dicha familia con- tiene, a lo sumo, dos puntos del conjunto de partida, por construcción. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que dicha familia de planos es, por ejemplo, la de planos horizontales.

A continuación vamos a elegir planos horizontales de dicha familia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tales que no contengan ningún punto del conjunto inicial y verifiquen la siguiente propiedad.

Elegimos A_1 para que divida al espacio en dos zonas, superior e inferior, y que la superior tenga 4 puntos (o 5 en el peor caso, si resulta que el cuarto y el quinto están a la misma altura). Realizamos una pirámide con los cuatro puntos (si hubiese cinco, evitamos utilizar uno de los dos inferiores). Construimos un plano A_2 paralelo a A_1 de modo que por encima de A_2 haya sólo 4 o 5 puntos (excluyendo los que ya se han utilizado para construir la pirámide). Realizamos una pirámide con los cuatro puntos (si hubiese cinco, evitamos utilizar uno de los dos inferiores)... Construimos un plano A_{k+1} paralelo a A_k de modo que por encima de A_k haya sólo 4 o 5 puntos (excluyendo los que ya se han utilizado para construir pirámides). Realizamos una pirámide con los cuatro puntos (si hubiese cinco, evitamos utilizar uno de los dos inferiores). Tras construir el plano A_{n-1} sólo quedarán 4 puntos libres (de los $4n$ iniciales) que unimos para formar la última pirámide. Por el método de construcción es claro que las pirámides no se cortan, pues los planos las separan en regiones disjuntas. El único problema podría ser que dos pirámides de regiones contiguas se cortasen en uno de esos planos que la separan, pero eso es imposible pues cada pirámide comparte a lo sumo uno de sus vértices con el plano (y evidentemente, por construcción, no hay dos pirámides que compartan vértice). □

4 Más Teoremas

4.1 Fórmulas para el área.

$$(ABC) = \frac{1}{2} a\, h_a = \frac{1}{2} a\, b \operatorname{sen} \gamma = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = s\, r = \frac{abc}{4R}.$$

4.2 Teorema de la Potencia. *Si dos rectas desde un punto P cortan a la circunferencia en los puntos A, A' (que pueden coincidir) y B, B' (que pueden coincidir), respectivamente, entonces*

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB'.$$

4.3 Teorema de Ptolomeo. *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si*

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

4.4 Caracterización de cuadrilátero con circunferencia inscrita. *Un cuadrilátero tiene una circunferencia inscrita si y sólo si las bisectrices de los ángulos interiores se cortan en un punto (incentro). Otra condición equivalente es que la suma de los lados opuestos coincida. A estos cuadriláteros se les llama tangenciales.*

4.5 Teorema de la bisectriz. *Si la bisectriz del ángulo $\angle ACB$ interseca al lado AB en el punto D, entonces*

$$\frac{AD}{DB} = \frac{b}{a}.$$

4.6 Teorema de Ceva. AD, BE, CF *son isogonales concurrentes en $\triangle ABC$ si y sólo si*

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

(Una **isogonal** es una recta que une un vértice de un triángulo con un punto del lado opuesto.)

4.7 Teorema de Menelao. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo y X, Y, Z puntos de las rectas BC, CA, AB. Entonces X, Y, Z están alineados si y sólo si*

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1.$$

4.8 Teorema de Pappus. *Si A, C, E son tres puntos de una recta, B, D, F de otra y si las tres rectas AB, CD, EF cortan a DE, FA, BC, respectivamente, entonces los tres puntos de intersección están alineados.*

4.9 Teorema de Desargues. *Si dos triángulos están en perspectiva desde un punto, y sus pares de lados correspondientes se cortan, entonces los tres puntos de intersección están alineados.*

4.10 Teorema de Pascal. *Si los seis vértices de un hexágono están situados en una circunferencia y los tres pares de lados opuestos se cortan, entonces los tres puntos de intersección están alineados.*

4.11 Teorema de Brianchon. *Si los seis lados de un hexágono son tangentes a una circunferencia, las tres diagonales se cortan en un punto (o son paralelas).*

4.12 Teorema de la recta de Simson. *Los pies de las perpendiculares desde un punto a los lados de un triángulo están alineados si y sólo si el punto está situado en la circunferencia circunscrita.*

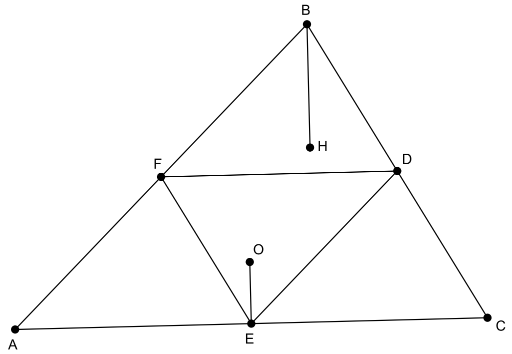
4.13 Teorema de la circunferencia de los nueve puntos. *Los pies de las tres alturas de un triángulo, los puntos medios de los tres lados y los puntos medios de los segmentos que unen los tres vértices con el ortocentro, están todos en una misma circunferencia. El radio es $\frac{1}{2}R$ y el centro está situado en la recta de Euler, equidistante del ortocentro y del circuncentro.*

4.14 Teorema de Feuerbach. *La circunferencia de los nueve puntos de un triángulo es tangente a la circunferencia inscrita y a las tres circunferencias tangentes exteriores.*

5 Más Problemas

5.1 Problema. Demostrar que en un triángulo la distancia de un vértice cualquiera al ortocentro es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto a ese vértice. (Fase Local 2007)

Solución.

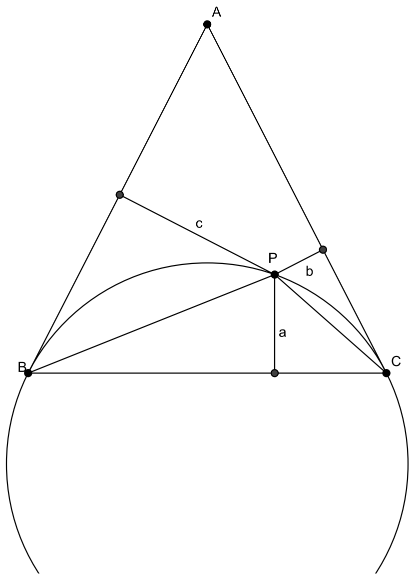


Sea ABC el triángulo, H el ortocentro, O el circuncentro y D, E, F los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente. Queremos probar que $BH = 2OE$.

Como el triángulo ABC es semejante al triángulo DEF con razón 2 y O es el ortocentro del triángulo DEF, obtenemos que $BH = 2OE$. □

5.2 Problema. ABC es un triángulo isósceles con AB=AC. Sea P un punto cualquiera de la circunferencia tangente a los lados AB en B y AC en C. Denotemos por a, b y c a las distancias de P a los lados BC, AC y AB respectivamente. Probar que $a^2 = bc$. (OME 2006)

Solución.



Como AB es tangente a la circunferencia en B, tenemos que $\angle ABP = \angle PCB$. Análogamente, $\angle ACP = \angle PBC$.

Aplicando la definición de seno tenemos que

$$\frac{a}{PC} = \operatorname{sen} \angle PCB = \operatorname{sen} \angle ABP = \frac{c}{PB}$$

$$\frac{a}{PB} = \operatorname{sen} \angle PBC = \operatorname{sen} \angle ACP = \frac{b}{PC}.$$

Entonces

$$c = \frac{a \cdot PB}{PC}$$

$$b = \frac{a \cdot PC}{PB}.$$

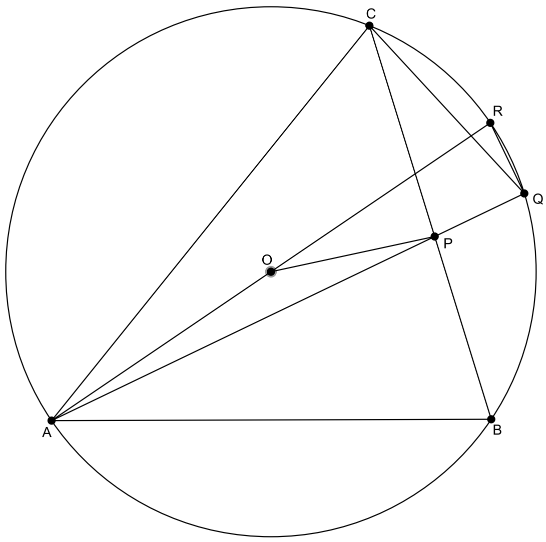
Multiplicando ambas igualdades obtenemos $a^2 = bc$. □

5.3 Problema. Sea O el circuncentro del triángulo ABC. La bisectriz que parte de A corta al lado opuesto en P. Probar que se cumple

$$AP^2 + OA^2 - OP^2 = bc.$$

(OME 2007)

Solución.



Prolongamos AP y AO hasta cortar a la circunferencia circunscrita la triángulo ABC en Q y R, respectivamente.

Como los triángulos APB y ACQ son semejantes (ya que $\angle BAP = \angle QAC$ y $\angle ABP = \angle AQC$), obtenemos que

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AC}{AQ}.$$

Por otra parte, usando el Teorema del coseno 2.6, tenemos que $OP^2 = AO^2 + AP^2 - 2AO \cdot AP \cdot \cos \angle OAP$.

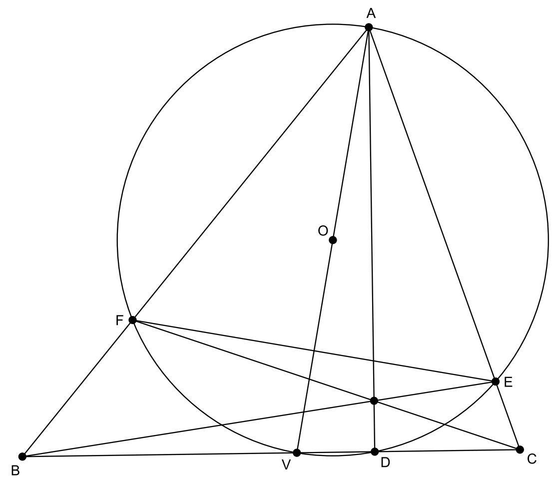
Como AR es un diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, deducimos que $\cos \angle OAP = \frac{AQ}{AR}$. Despejando y denotando por R el radio de la circunferencia circunscrita, tenemos que

$$AO^2 + AP^2 - OP^2 = 2AO \cdot AP \cdot \frac{AQ}{AR} = 2R \cdot AP \cdot \frac{AQ}{2R} = AP \cdot AQ.$$

Pero, como vimos antes, $AP \cdot AQ = AB \cdot AC = bc$. Queda así probado el enunciado. $\square$

5.4 Problema. En un triángulo acutángulo ABC, con $AB \neq AC$, sea V la intersección de la bisectriz de A con BC y sea D el pie de la altura desde A a BC. Si E y F son las intersecciones de la circunferencia circunscrita a AVD con CA y AB, respectivamente, mostrar que las rectas AD, BE y CF son concurrentes.

Solución.



Sea O el centro de la circunferencia. Entonces O es el punto medio de AV ya que $\angle ADV = 90$.

Como $\angle OAF = \angle OAE = 90 - \angle AFE$, deducimos que $AO \perp EF$ (son perpendiculares) y entonces $AF = AE$.

Usando el Teorema de Ceva 4.6, para demostrar el enunciado bastará probar que

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{AE} = 1.$$

O bien, como $AF = AE$, probar que $\frac{BF}{BD} = \frac{CE}{DC}$.

Por otra parte, usando el Teorema de la Potencias 4.2 tenemos que $BF \cdot BA = BV \cdot BD$, es decir, $\frac{BF}{BD} = \frac{BV}{BA}$. De igual forma $CE \cdot CA = CD \cdot CV$, o bien $\frac{CE}{CD} = \frac{CV}{CA}$.

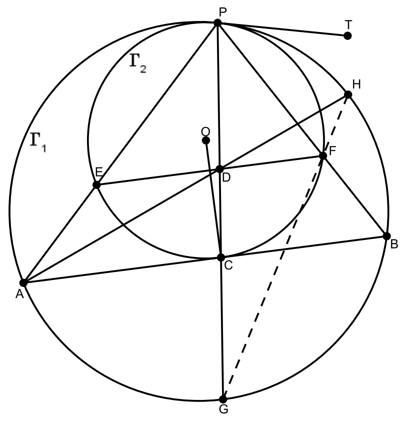
Luego

$$\frac{BF}{BD} = \frac{CE}{DC} \Leftrightarrow \frac{BV}{BA} = \frac{CV}{CA},$$

y esto último es el Teorema de la bisectriz 4.5. □

5.5 Problema. Una circunferencia Γ_2 es tangente interiormente a la circunferencia Γ_1 circunscrita al triángulo PAB en P y al lado AB en C. Sean E y F la intersección de Γ_2 con los lados PA y PB, respectivamente. Sea D el punto de intersección de EF con PC. Las rectas PD y AD intersecan de nuevo a Γ_1 en G y H, respectivamente. Probar que F, G, H están alineados.

Solución.



Sea PT la tangente exterior a las circunferencias en P. Entonces

$$\angle PAB = \angle BPT = \angle PEF,$$

luego $EF \parallel AB$. Sea O el centro de Γ_2. Como $OC \perp AB$ (porque AB es tangente a Γ_2 en C), deducimos que $OC \perp EF$ y por tanto OC es la mediatriz del segmentoEF, es decir, C es el punto medio del arco EF. Entonces PC es la bisectriz de $\angle EPF$. Por otra parte

$$\angle HDF = \angle HAB = \angle BPH,$$

luego el cuadrilátero $PDFH$ es cíclico y por tanto

$$\angle DHF = \angle DPF = \angle EPD = \angle APG = \angle AHG = \angle DHG.$$

Esto prueba que G, H, F están en la misma recta. □

Algunas referencias

- OME: en la pagina web de la OME podéis encontrar los problemas que se han propuesto en las olimpiadas españolas (tanto de la fase local como de la nacional) ¡con soluciones!
- AoPS: en la plataforma de problemas Art of Problem Solving se pueden encontrar muchísimos problemas (con soluciones) de olimpiadas de todo el mundo.
- Geometry Revisited, de Coxeter, es un libro muy recomendable para quien quiera profundizar en los resultados teóricos.