Preparación olímpica II
Congruencias Soluciones

Rubén Blasco García

9 Noviembre 2018

Problema 1. *El número* 2^{29} *tiene* 9 *dígitos distintos. Sin usar la calculadora, hallar el dígito que falta.*

Solución: Notemos primero que un número de $n+1$ cifras $a_n ... a_0$ se puede expresar como $a_n 10^n + ... a_1 10 + a_0$. Es fácil ver que si tomamos congruencias módulo 9, tenemos que nuestro número es congruente a $a_n + ... a_1 + a_0 \mod 9$, es decir, es congruente módulo 9 a la suma de sus cifras.

Por otro lado, la suma de las 10 posibles cifras $0 + 1 + ... + 9 = 45 \equiv 0 \mod 9$.

Analicemos como se comportan las potencias de 2 módulo 9:

$$2^0 \equiv 1 \mod 9, 2^1 \equiv 2 \mod 9, 2^2 \equiv 4 \mod 9$$

$$2^3 \equiv -1 \mod 9, 2^4 \equiv -2 \mod 9, 2^5 \equiv -4 \mod 9, 2^6 \equiv 1 \mod 9$$

De este modo, $2^{6c+r} = (2^6)^c 2^r \equiv 2^r \mod 9$ y por lo tanto:

$$2^{29} = 2^{6\times 4+5} \equiv 2^5 \equiv -4 \mod 9$$

Como si estuvieran todas las cifras debería dar 0 y nos falta una cifra esta claro que dicha cifra debe ser el 4.

Problema 2. *Probar que hay infinitos primos cuyo resto al dividirlos por* 3 *es* 2. *(OME Fase Local 2017)*

Solución:

Es claro que exista al menos un primo de este tipo porque 2 es un primo que lo satisface. Supongamos que solo hay un número finito de primos que satisfacen esta propiedad $\{p_1, ..., p_n\}$.

Notemos que si multiplicamos un número par de primos de este tipo dicho producto es congruente a 1 módulo 3 mientras que si multiplicamos un número impar de primos es congruente a 2 módulo 3.

Si n es un número impar consideramos el número $p_1 p_2 ... p_n + 1 \equiv 2 \mod 3$. Es claro que al ser congruente a 2 módulo 3 debe tener algún primo $p \equiv 3 \mod 2$ que lo divida (si tuviera algún divisor $\equiv 0$, el producto también lo sería y si todos sus divisores primos fueran $\equiv 1$ su producto también lo sería), pero ninguno de los primos de la lista divide a $p_1 p_2 ... p_n + 1$ luego llegamos a contradicción.

Si n fuese un número par podemos usar un argumento similar pero para el número $p_1 ... p_n + 3$.

Luego debe haber infinitos primos satisfaciendo la condición.

Problema 3. *Sea n un número natural. Probar que si la última cifra de 7^n es 3, la penúltima es 4. (OME Fase Local 2018)*

Solución:
Tomamos congruencias módulo 10 para ver cuándo termina en 3:

$$7^0 = 1, 7^1 = 7, 7^2 = 49 \equiv 9 \pmod{10}, 7^3 = 243 \equiv 3 \pmod{10}, 7^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

Luego las potencias de 7 que acaban en 3 son de la forma 7^{4n+3}, analicemos ahora módulo 100:

$$7^0 = 1, 7^1 = 7, 7^2 = 49, 7^3 = 243 \equiv 43 \pmod{100}, 7^4 \equiv 1 \pmod{100}$$

Luego 7^{4n+3} siempre acaba en 43.

Problema 4. *Probar que para cualquier primo p distinto de 2 y 5 existe un múltiplo de p cuyas cifras son todo nueves. (Por ejemplo, si $p = 13$, $999999 = 13 \times 76923$).*

Solución:
Por el pequeño teorema de Fermat tenemos que:

$$10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

para cualquier p distinto de 2 y 5.
Es decir que $10^{p-1} - 1$ es múltiplo de p, solo queda notar que $10^{p-1} - 1$ es el número con $p - 1$ cifras todas ellas 9.

Problema 5. *Probar que 1982 divide a 222..,22 (1980 doses).*

Solución:
Como ambos números son pares podemos dividir por 2 ambas cifras y lo que tenemos que probar es que 991 divide a 1..,1 (1980 unos). Ahora, 991 divide a 1..,1 si y solo si divide a 9..,9 (1980 nueves). Pero $9..,9 = 10^{1980} - 1 = (10^{990} - 1)(10^{990} + 1)$.
Como 991 es primo se tiene que $(10^{990} - 1) \equiv 0 \pmod{991}$ y se obtiene el resultado.

Problema 6. *Probar que $5555^{2222} + 2222^{5555}$ es múltiplo de 7.*

Solución:
Vemos que $5555 \equiv 4 \pmod 7$ y $2222 \equiv 3 \pmod 7$. Además, $4^3 \equiv 1 \pmod 7$ y $3^6 \equiv 1 \pmod 7$. Luego:

$$5555^{2222} + 2222^{5555} \equiv 4^{2222} + 3^{5555} \equiv 4^{3(740)+2} + 3^{6(925)+5} \equiv 4^2 + 3^5 \equiv 0 \pmod 7$$

Problema 7. *Sean a, b, c números naturales primos distintos dos a dos. Demostrar que el número*

$$(ab)^{c-1} + (bc)^{a-1} + (ca)^{b-1} - 1$$

es múltiplo de abc. (OME Fase Local 2018)

Solución:

Por el teorema de Fermat tenemos que $(ab)^{c-1}-1 \equiv 0 \mod c$, $(bc)^{a-1}-1 \equiv 0 \mod a$ y $(ca)^{b-1}-1 \equiv 0 \mod b$. Entonces es fácil ver que

$$((ab)^{c-1}-1)((bc)^{a-1}-1)((ca)^{b-1}-1) \equiv 0 \mod abc$$

Ahora bien, siempre que multiplicamos dos términos distintos de 1 se obtiene un sumando múltiplo de abc, luego se tiene que esa expresión es congruente a los sumando que se obtienen cuando al menos 2 de los 3 factores son -1, es decir:

$$((ab)^{c-1}-1)((bc)^{a-1}-1)((ca)^{b-1}-1) \equiv (ab)^{c-1}+(bc)^{a-1}+(ca)^{b-1}-1 \mod abc$$

.

Pero uniendo las dos expresiones tenemos:

$$(ab)^{c-1}+(bc)^{a-1}+(ca)^{b-1}-1 \equiv 0 \mod abc$$

como queríamos ver.