Preparación olímpica III
Problemas

Rubén Blasco García

23 Noviembre 2018

Problema 1. *Se considera la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida como sigue:*

$$f(n) = \begin{cases} -f(\frac{n}{2}) & si \quad n \text{ es par}, \\ \\ f(n-1)+1 & si \quad n \text{ es impar} \end{cases}$$

Demostrar que (n) es múltiplo de 3 si, y solo si, n es múltiplo de 3, y hallar el menor número n que cumple $f(n) = 2017$.

Problema 2. *Encontrar las funciones reales f, de variable real, que satisfacen la siguiente ecuación funcional:*

$$f(x + f(x + y)) = f(2x) + y,$$

cualesquiera sean x, y reales.

Problema 3. *Encuentra todas las aplicaciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que verifican $f(n) + f(n+1) = 2n+1$ para cualquier entero n y además*

$$\sum_{i=1}^{63} f(i) = 2015$$

Problema 4. *Un poliedro convexo tiene por caras 12 cuadrados, 8 hexágonos regulares y 6 octógonos regulares. En cada vértice del poliedro concurren exactamente un cuadrado, un hexágono y un octógono. ¿Cuántos segmentos que unen pares de vértices del poliedro son interiores al mismo, es decir, no son aristas ni están contenidos en una cara? (Fase Local 2007)*

Problema 5. *Se consideran 17 enteros positivos tales que ninguno de ellos tiene un factor primo mayor que 7. Demuestra que, al menos el producto de dos de estos números es un cuadrado perfecto. (Fase Local 2008)*

Problema 6. *En un polígono regular de 67 lados trazamos todos los segmentos que unen dos vértices, incluidos los lados del polígono. Elegimos n de estos segmentos y asignamos a cada uno de ellos un color entre 10 posibles. Halla el valor mínimo de n que garantiza que independientemente de cuales sean los n segmentos elegidos y de como de haga la asignación de colores, siempre habrá un vértice del polígono que pertenece a 7 segmentos del mismo color. (OME 2011)*