NUEVAS GEOMETRÍAS

Belén Martínez Pérez. Profesora de Enseñanza Secundaria. I.E.S. Pilar Lorengar,Zaragoza.

1.- Buscando la geometría.

Entonces el principito señaló con gravedad:
-¡No importa, es tan pequeña mi casa!
Y agregó, quizás, con un poco de melancolía:
-Derecho, camino adelante… no se puede ir muy lejos
De esta manera supe una segunda cosa muy importante: su planeta de origen era apenas más grande que una casa

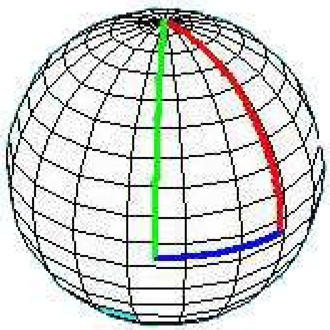
Esto no podía asombrarme mucho. Sabía muy bien que aparte de los grandes planetas como la Tierra, Júpiter, Marte, Venus, a los cuales se les ha dado nombre, existen otros centenares de ellos tan pequeños a veces, que es difícil distinguirlos aun con la ayuda del telescopio. (el principito, Antoine De Saint Exupéry)

Viendo la serie Futurama, encontramos esta singular imagen. ¿A qué se refiere? Si se trata de la misma gasolinera, ¿es posible?

La instantánea está tomada en Mercurio, planeta con un radio de2440km, es decir, unas 1512 millas. Haciendo un pequeño cálculo, $2\pi \cdot 1512 \approx 9500$ millas de ecuador. Es decir, la gasolinera más cercana está situada exactamente en el punto diametralmente opuesto a la señal.

Supongamos ahora que nuestro planeta fuera mucho más pequeño, casi tanto como el planeta del Principito, unos 3 o 4 metros de radio. ¿Seríamos capaces de construir un rectángulo del tamaño de una cancha de baloncesto? Podemos empezar situándonos en el ecuador y allí trazar una línea todo lo "recta" que podamos, (muy recta no saldrá porque observamos que enseguida empezaría a curvarse). Ahora, para la construcción de las bandas, necesitamos dos líneas perpendiculares al ecuador…

Ya nos lo estábamos imaginando… ¡las rectas se cortan!. Ambas son perpendiculares al ecuador y sin embargo no paralelas. ¿Será que no estamos trazando bien las rectas? ¿Será que no hemos medido los ángulos de forma adecuada? Necesitamos una geometría específica para este pequeño mundo.



1.1.- Mensaje a Tierra.

Sabemos que en la Tierra han existido grandes geómetras de la talla de Euclides quien dedicó gran parte de su vida a la elaboración de una geometría consistente. ¿Podrá Euclides resolver nuestro problema? Nuestras cuestiones son enviadas y rápidamente recibimos vía satélite las respuestas:

"No negamos la consistencia de la geometría de Euclides pero es necesario tener en cuenta que los resultados de esta se basan en 5 axiomas que durante muchos años se supusieron ciertos. Los avances en diversas ramas de las Matemáticas y de la Astrofísica han creado la necesidad de nuevas geometrías elaboradas por grandes mentes como la de Riemann, Lobachevsky y Bolyai. Proponemos que sean ustedes mismos los que analicen que geometría deben aplicar en su pequeño planeta. Para ello enviamos una serie de directrices:
La geometrías que proponemos son:

- *Geometría euclídea: los ángulos interiores de un triángulo suman exactamente 180º*
- *Geometría hiperbólica: los ángulos interiores de un triángulo suman menos de 180º*
- *Geometría elíptica: los ángulos interiores de un triángulo suman más de 180º*

Para llegar a concluir cual de ellas se ajusta a sus necesidades deberán demostrar utilizando las herramientas y saberes matemáticos que poseen una de estas tres condiciones. Hace falta que sea cierta para todos los triángulos.

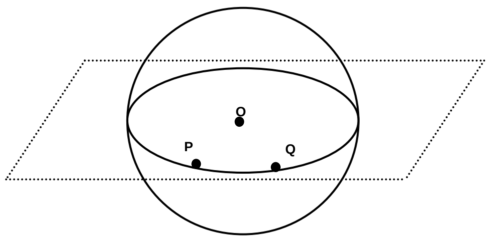
Será necesario que tengan claro el concepto "recta", en cualquier geometría la recta es el camino más corto que une dos puntos. Con estos datos, confiamos obtengan una demostración fiable."

2.- Nos ponemos en marcha.

2.1.- Geodésicas.

Lo primero que tenemos que analizar es si lo que hemos considerado una recta realmente lo es, es decir si los ecuadores son los caminos más cortos entre dos puntos.
Necesariamente este ecuador es el camino más corto entre P y Q puesto que es la línea menos curvada que se puede trazar en la esfera.

Una circunferencia máxima queda determinada por dos puntos que no sean diametralmente opuestos P, Q junto con el punto O, centro de la esfera, sin más que hacer la intersección entre el plano que determinan los tres puntos y la esfera.



Ya tememos las "rectas" en nuestra nueva geometría, a las circunferencias máximas les llamaremos **geodésicas**.

Ejercicio 1.- Dada una recta en el plano eucídeo, si situamos dos puntos sobre ella, ¿cómo queda dividida ésta? ¿Qué pasa si hacemos lo mismo sobre una geodésica?

Ejercicio 2.- En la geometría de Euclides existe un único camino mínimo entre dos puntos. ¿Es esto siempre cierto en la geometría de la esfera?

Ejercicio 3.- ¿Sabrías demostrar el teorema que sigue?

> ***Teorema***:
>
> *Dos circunferencias máximas se cortan en dos puntos diametralmente opuestos (antipodales).*

Pista: Tomar los planos que contienen a las circunferencias máximas y pensar en su intersección.

Con la demostración de este teorema podemos concluir el primer gran resultado de nuestra geometría:

DOS GEODÉSICAS CUALESQUIERA TIENEN DOS PUNTOS EN COMÚN.
Es decir, **NO EXISTE PARALELISMO.**

Ejercicio 4.- Indica las posiciones relativas que pueden tener dos rectas en el plano y en la esfera.

Ejercicio 5.- Dadas tres geodésicas. ¿de cuantas maneras puede quedar dividida la esfera? Compáralo con el caso de tres rectas en el plano. ¿Cuántos vértices se determinan en ambos casos?

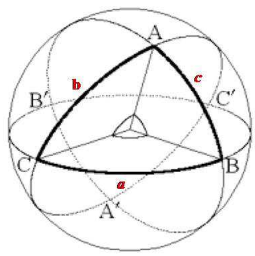
2.2.- Plano tangente: ángulos en la superficie esférica.

Dado un punto cualquiera de una superficie esférica existe un único plano tangente a la esfera en ese punto. Este plano será perpendicular al radio de la esfera en dicho punto.

Si tenemos dos geodésicas, el ángulo que forman ambas será igual al ángulo formado por las rectas tangentes a las líneas en el punto de incidencia. Dichas rectas nacen de la intersección del plano tangente en el punto con el plano que determina cada una de las geodésicas.

2.3.- Triángulos esféricos.

Un triángulo esférico es una porción de superficie esférica limitada por tres circunferencias máximas. Ahora bien, tres rectas sobre una superficie esférica determinan 8 triángulos esféricos. Será preciso determinar de qué triángulo estamos hablando.



Si unimos el centro de la esfera con los vértices del triángulo, obtenemos un triedro que se corresponde unívocamente con el triángulo esférico. Además esta correspondencia conserva los ángulos de la manera que se detalla en la figura adjunta. Por lo tanto, **estudiar ángulos de triángulos esféricos, equivale a estudiar los ángulos del triedro correspondiente.**

Ejercicio 6.- Calcular ángulos de triángulos esféricos

a) $A = PN \quad B = (0^{\circ}, 45^{\circ} E) \quad C = (0^{\circ}, 45^{\circ} W)$

b) $A = PN \quad B = (0^{\circ}, 60^{\circ} E) \quad C = (0^{\circ}, 60^{\circ} W)$

c) $A = PS \quad B = (0^{\circ}, 30^{\circ} E) \quad C = (0^{\circ}, 30^{\circ} W)$

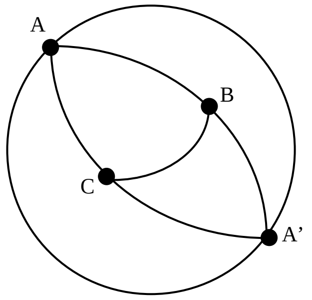
d) $A = (45^{\circ} N, 0^{\circ}) \quad B = (0^{\circ}, 90^{\circ} E) \quad C = (0^{\circ}, 90^{\circ} W)$

e) $A = (60^{\circ} N, 0^{\circ}) \quad B = (0^{\circ}, 90^{\circ} W) \quad C = (60^{\circ} S, 0^{\circ})$

2.4.- Ángulos del triángulo esférico.

> ***Teorema previo:***
>
> *En un triángulo esférico, la suma de la medida de los lados es siempre menor que* $2\pi r$

<u>*Demostración*</u>:



Prolongamos los lados *AB* y *AC* hasta la antípoda de *A*; como *CB* es geodésica, se verifica:

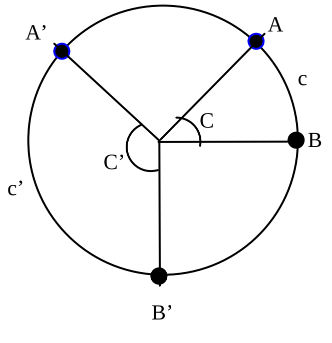
$$BC < A'B + A'C \;\; \Rightarrow$$
$$AB + AC + BC < A'B + A'C + AB + AC = ABA' + ACA' = 2\pi r$$
$$\Rightarrow AB + AC + BC < 2\pi R\,.$$

c.q.d.

> ***Teorema***:
>
> *En un triángulo esférico, los ángulos interiores suman más de 180º.*

<u>*Demostración:*</u>

Lo primero que haremos será construir el ***triedro suplementario***: Para ello necesitamos los tres radios de la esfera perpendiculares a los tres planos del triedro de nuestro triángulo esférico.



Nota:Para tener una idea intuitiva del triedro suplementario, podemos pensar en el diedro suplementario. Observar que es evidente que los ángulos c y c' suman 180º.

Volviendo al triedro suplementario:

Los arcos de circunferencia a, b y c tendrán unas longitudes de: $a=\frac{A2\pi r}{360}$; $b=\frac{B2\pi r}{360}$; $c=\frac{C2\pi r}{360}$. y los segmentos que determinan A', B' y C': $a'=\frac{(180-A)2\pi r}{360}$; $b'=\frac{(180-B)2\pi r}{360}$; $c'=\frac{(180-C)2\pi r}{360}$. Por lo tanto:

$$a+a'=\frac{A2\pi r}{360}+\frac{(180-A)2\pi r}{360}=\frac{A2\pi r+180\cdot 2\pi r-A2\pi r}{360}=\pi r$$

Del mismo modo: $b+b'=\pi r$; $c+c'=\pi r$

Tomando las tres identidades obtenidas y sumándolas, obtenemos:

$$\begin{aligned} a' &= \pi r - a \\ b' &= \pi r - b \\ c' &= \pi r - c \\ \hline (a'+b'+c') &= 3\pi r - (a+b+c) \end{aligned}$$

Como $0<a'+b'+c'<2\pi r \Rightarrow \quad 0<3\pi r-(a+b+c)<2\pi r \quad \Rightarrow \quad \pi r<a+b+c<3\pi r$

Sustituyendo:

$$\pi r<\frac{A2\pi r}{360}+\frac{B2\pi r}{360}+\frac{C2\pi r}{360}<3\pi r$$

$$\pi r<\frac{2\pi r(A+B+C)}{360}<3\pi r$$

$$180<A+B+C<540$$

c.q.d.

Ejercicio 7.- ¿Será cierto el *Teorema de Pitágoras* en Geometría esférica?

2.5.- Huso esférico.

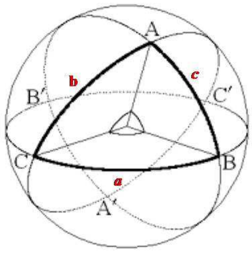
Denominamos **Huso esférico** a cualquier porción de la superficie esférica delimitada por dos geodésicas.

Ejercicio 8.- Sabiendo que el área de la superficie esférica es $4\pi r^2$. ¿Cuál será el área de un huso esférico de ángulo α?

2.6.- Área del triángulo esférico.

Cómo calcular el área de un triángulo esférico.

$$\Delta(ABC)+\Delta(A'BC)=\frac{A}{360}4\pi r^2$$
$$\Delta(ABC)+\Delta(AB'C)=\frac{B}{360}4\pi r^2$$
$$\Delta(ABC)+\Delta(ABC')=\frac{C}{360}4\pi r^2$$



$$\Delta(ABC)+\Delta(ABC')+\Delta(AB'C)+\Delta(AB'C')=\frac{1}{2}4\pi r^2$$

Como $\Delta(AB'C')=\Delta(A'BC)$, (por ser opuestos por el vértice) tenemos:

$$\Delta(ABC)+\frac{C}{360}4\pi r^2-\Delta(ABC)+\frac{B}{360}4\pi r^2-\Delta(ABC)+\frac{A}{360}4\pi r^2-\Delta(ABC)=2\pi r^2 \Rightarrow$$

$$2\Delta(ABC)=\left(\frac{A+B+C}{360}\right)4\pi r^2-2\pi r^2$$ Por tanto:

$$\Delta(ABC)=\left(\frac{A+B+C}{360}\right)2\pi r^2-\pi r^2$$

$$\Delta(ABC)=\left(\frac{A+B+C}{180}-1\right)\pi r^2$$

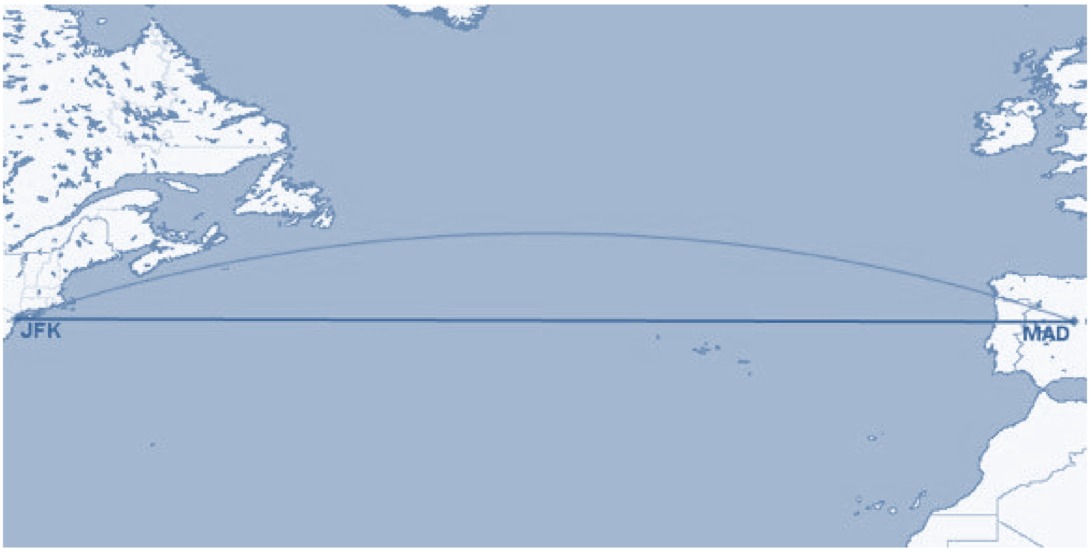
$$\boxed{\Delta(ABC)=\left(\frac{A+B+C-180}{180}\right)\pi r^2}$$

Ejercicio 9.- Suponer que tenemos un triángulo en la esfera con ángulos *A, B* y *C,* ¿podemos encontrar un triángulo más grande con los mismos ángulos?

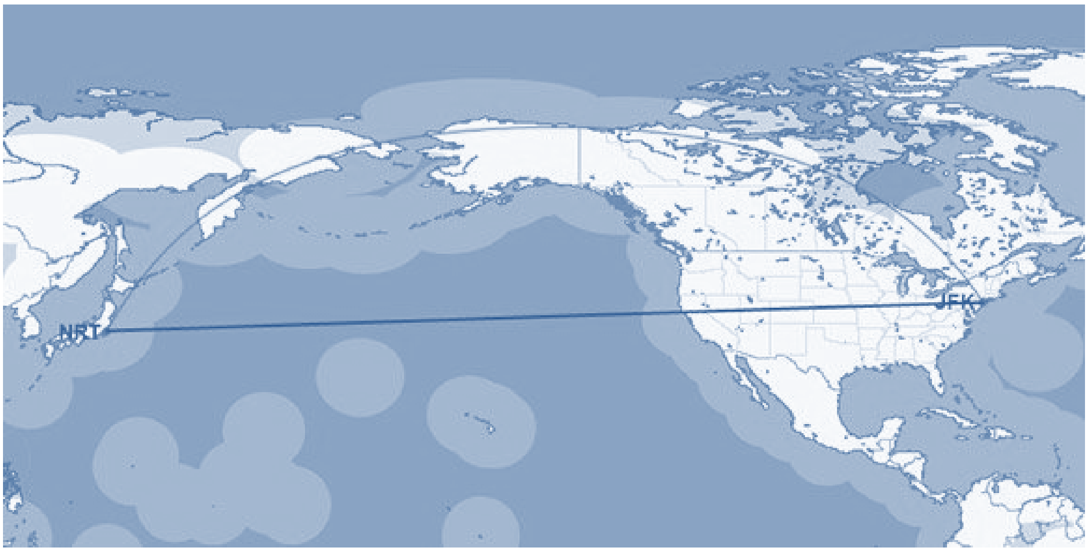
CUADRO COMPARATIVO

Geometía Euclídea	*Geometría esférica*
Una línea recta es el camino más corto entre dos puntos	La geodésica es el camino más corto entre dos puntos
Las rectas son infinitas. La distancia entre dos puntos no tiene cota superior	Una geodésica tiene longitud finita $2\pi r$. La distancia máxima que pueden tener dos puntos es πr
Existe una única recta que une dos puntos	La geodésica será única siempre y cuando los dos puntos no sean antipodales, en cuyo caso habrá infinitas
Existen líneas que no tienen puntos en común (paralelas)	No existe paralelismo
Dos rectas no paralelas poseen un único punto en común	Dos geodésicas siempre tienen dos puntos antipodales en común
Dos rectas perpendiculares generan 4 ángulos rectos	Dos geodésicas perpendiculares generan 8 ángulos rectos
Dos rectas que se cortan no tienen perpendicular común	Dos geodésicas tienen perpendicular común
El polígono más sencillo que se puede generar con rectas se llama triángulo	El polígono más sencillo que puede generarse con geodésicas es el huso esférico
Tres rectas con una intersección común generan seis regiones infinitas	Tres geodésicas con un punto en común determinan seis husos esféricos (finitos)
Si tres rectas son secantes dos a dos sin intersección común determinan 7 regioines, seis infinitas y una finita, triángulo	Tres circunferencias máximas sin intersección común determinan 8 triángulos esféricos.
Si dos rectas son paralelas y una es secante quedan determinadas seis regiones infinitas	¡IMPOSIBLE!
Un triángulo tiene, como mucho un ángulo recto	Un triángulo esférico puede tener 0, 1, 2 y hasta 3 ángulos rectos

Ruta aérea Madrid-Nueva York



Ruta aérea Nueva York-Tokio



Ruta aérea Pekín-Buenos Aires