TTM: DEMOSTRACIONES, SIN (O CASI SIN) PALABRAS

El Diccionario de la lengua española de la Real Academia Española da las siguientes acepciones a la palabra Demostración:

1. f. Acción y efecto de demostrar.
2. f. Señalamiento, manifestación.
3. f. Ostentación o manifestación pública de fuerza, poder, riqueza, habilidad, etc.
4. f. Fil. Prueba de algo, partiendo de verdades universales y evidentes.
5. f. Fil. Comprobación, por hechos ciertos o experimentos repetidos, de un principio o de una teoría.
6. f. Fil. Fin y término del procedimiento deductivo.

No tengo que demostrar nada a nadie. No hay nada que demostrar
Cristiano Ronaldo

SIGNIFICADO DE DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS

En términos matemáticos, decimos que una demostración es, mostrar explícitamente los axiomas, teoremas y proposiciones previas en las que nos apoyamos, así como las reglas de inferencia lógica que utilizamos. Muchas partes de las matemáticas están axiomatizadas, lo que significa que existe un conjunto de axiomas de los cuales es posible deducir todas las verdades de esa parte de las matemáticas.

SISTEMAS AXIOMÁTICOS.docx

AXIOMAS DE LA COMUNICACIÓN.docx

En 1931, Kurt Gödel (1906–1978), lógico, matemático y filósofo austriaco-estadounidense demostró sus dos famosos teoremas de incompletitud. Estos teoremas mostraban que, ningún sistema formal que incluya la aritmética es a la vez consistente y completo. Es decir, si los axiomas de dicha teoría no se contradicen entre sí, entonces existen enunciados que no pueden probarse ni refutarse a partir de ellos. Un ejemplo es el postulado de las paralelas, el cual no es ni demostrable ni refutable desde los demás axiomas de la geometría euclidiana.

Pero en Matemáticas, hay que tener en cuenta que, lo que constituye una demostración varía de una cultura a otra, así como de una época a otra, aunque en todos ellas se pueda reconocer una idea común: la de justificar o validar una afirmación aportando razones o argumentos.

El objetivo de las matemáticas es descubrir y comunicar ciertas verdades. Las matemáticas son el lenguaje de los matemáticos y una demostración, es un método para comunicar una verdad matemática a otra persona que también "habla" el mismo idioma. Una propiedad del lenguaje de las matemáticas es su precisión. Una demostración propiamente presentada no deberá contener ambigüedades y no habrá duda de que es correcta. Para entender, hacer, una demostración o ambas cosas, debemos aprender un idioma nuevo, además de un método nuevo de razonamiento. En el ámbito matemático, las demostraciones se expresan mediante el lenguaje ordinario completado con el uso de expresiones simbólicas.

Se cuenta que cuando el prolífico (unos 1500 artículos y 511 colaboradores) y genial matemático húngaro Paul Erdös (1913-1996) (uno de los 10 mejores matemáticos de todos los tiempos según la revista The Guardian) encontraba una demostración bonita expresaba que ella debía figurar en *El Libro*, en el que Dios recopilaba las demostraciones perfectas de los teoremas matemáticos. Erdös también añadía que, si eres matemático, no es necesario que seas creyente, pero sí que creas en *El Libro*.

EL NÚMERO DE ERDÖS.docx

Las demostraciones bonitas, a las que se refería Erdös, eran aquellas pruebas que cumplían tres características: que fueran *elegantes, fáciles de entender* y *notoriamente difíciles de resolver*. A menudo decía que cuando se marchase (en su lenguaje: cuando muriese, ocurrió en 1996) únicamente le pediría a Dios que le permitiese mirar en las páginas de *El Libro*, eligió para su epitafio *Finalmente dejé de volverme tonto.*

La demostración del teorema de que hay infinitos números primos de Euclides es la primera que aparece en *Proofs from the book* libro que se publicó en 1998 recogiendo la idea y algunas demostraciones recogidas por Erdös (la traducción española es del año 2005), es la siguiente: Euclides asumió que la lista de los números primos es finita: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ y construyó otro número $q = p_1.p_2.p_3 \dots .p_n + 1$; que o es primo y entonces hay contradicción pues no estaba en la lista de todos los primos o no lo es y entonces sería divisible por algún primo de la lista, pero al hacer la división por todos los primos de la lista siempre da por resto 1, con lo que se llega también a una contradicción.

EL TEOREMA DE LA GALERÍA DE ARTE.docx

LA DEMOSTRACIÓN EN LA ENSEÑANZA

Las matemáticas escolares son la asignatura donde la separación motivacional entre profesores y alumnos es más evidente. Este hecho está relacionado con la dificultad de vincular las matemáticas con los problemas cotidianos de la vida real, o con la dificultad de conjugar los objetivos curriculares con los intereses personales de los estudiantes.

Es claro el papel que juegan las demostraciones en el ámbito de los matemáticos, pero al parecer aún no lo es tanto su rol en la enseñanza de las matemáticas. Hay investigadores que piensan que la demostración es un elemento de la didáctica de la matemática que está estrechamente ligada al desarrollo de habilidades mentales y de pensamiento, y por tanto son imprescindibles en la formación integral de los estudiantes, por lo que según estos investigadores hay que convencer a los estudiantes que la matemática es interesante y no sólo un juego para los más aventajados y que los problemas y la teoría (demostraciones) deben mostrarse a los estudiantes como relevantes y llenos de significado.

Pero por otra parte, hay otros investigadores en didáctica de la matemática que abiertamente desestiman el valor de la demostración en la construcción del conocimiento matemático, y afirman que su estudio en las clases puede generar problemas de aprendizaje en algunas personas, sobre todo para aquellos que no estudian para ser matemáticos y que no están obligados a apreciar “la belleza y la estética de los teoremas y demostraciones matemáticos" ni mucho menos compartir su misma motivación.

Un dato más, ha sido ampliamente documentado el éxito educativo japonés en lo que se refiere a las matemáticas. Las lecciones de matemáticas en las escuelas japonesas enfatizan la comprensión de ideas matemáticas. La memorización de fórmulas y la adquisición de destrezas no se consideran centrales en el aprendizaje, es posible que una de las causas de éste éxito sea debido a que en el currículo japonés un 53% de temas están demostrados, sin embargo en el currículo alemán solo un 10% de temas se someten a verificación y en nuestro país no aparece este tema en muchos currículos, ni en muchos libros y por supuestos en muchas clases de matemáticas.

Uno de los primeros impactos que recibe un alumno de Primero de Matemáticas nada más pisar la universidad es que, de repente, pasa de tratar con unas matemáticas que en la mayoría de los casos se limitan a relatar métodos de resolución que uno simplemente se cree y a aplica, a otras muy diferentes en las que se exige que cada afirmación que se haga vaya acompañada de su correspondiente demostración. Y no sólo esto, sino que se exige que el alumno realice demostraciones por sí mismo, cosa que tenga uno el nivel previo que tenga, siempre es difícil de aprender. Sin embargo, cuando uno avanza en la carrera, termina convirtiéndose en una especie de profesional del escepticismo y ya no es capaz de dormir tranquilo cuando alguien tiene la osadía de explicarle algo argumentando simplemente que *eso es así*.

MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

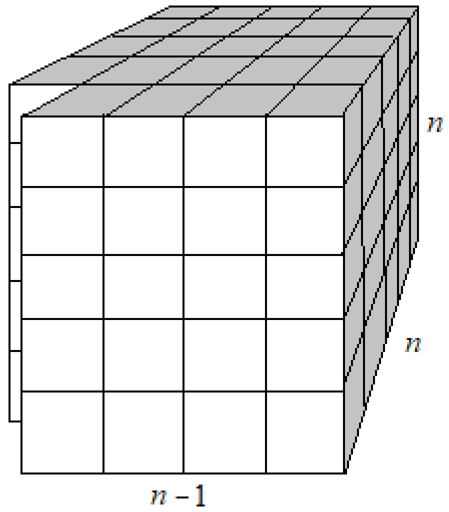
- Método directo.
- Reducción al absurdo.
- Contrarrecíproco.
- Método de inducción.
- Contraejemplos.
- Otros

Nota 1: Como el propósito de esta sesión son las demostraciones sin (o casi sin) palabras no desarrollaremos exhaustivamente cada uno de los apartados anteriores
Nota 2: En todas las demostraciones que realicemos a continuación el símbolo lógico $\Rightarrow$ debe traducirse, en lenguaje natural como: *y de aquí se deduce que*, *por lo tanto; C.Q.D.* se pone al final de la demostración y significa *Como Queríamos Demostrar* y el símbolo # por *contradicción*

MÉTODO DIRECTO:

Se trata de demostrar que, si se cumple la propiedad *A*, entonces se verifica *B*

EJEMPLO: Dado un entero positivo *n*, probar que $n^3 - n$ es siempre múltiplo de 3.
Demostración: $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n + 1)(n - 1) = (n - 1)n(n + 1)$ C.Q.D.



REDUCCIÓN AL ABSURDO:

Para probar que una propiedad A es verdadera, se supone que A es falsa y se llega a una contradicción. Evidentemente, empleamos el hecho de que una proposición en Matemáticas o es verdadera o es falsa, pero no ambas cosas a la vez.

EJEMPLO: Probar que $\sqrt{2}$ es un número real irracional

Demostración: Supongamos que $\sqrt{2}$ no es irracional, $\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (m.c.d.(p, q) = 1)) $\Rightarrow$ $\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$ (1) $\Rightarrow p = 2m \Rightarrow p^2 = 4m^2$ que llevado a (1) $\Rightarrow 4m^2 = 2q^2 \Rightarrow$ $2m^2 = q^2 \Rightarrow q = 2n \Rightarrow \#$

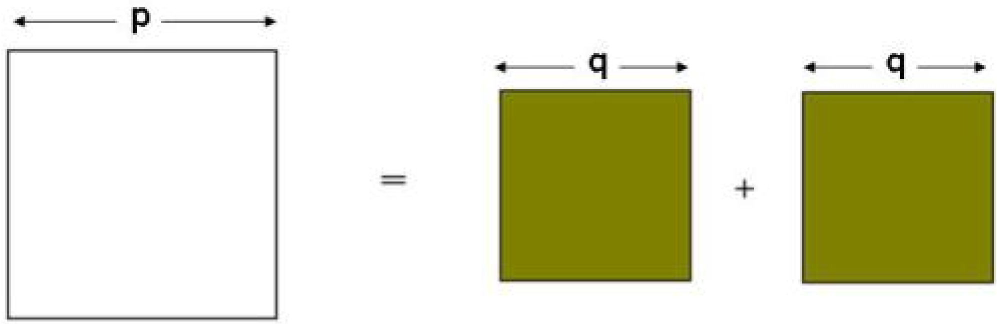
Otra demostración menos conocida, empleando el

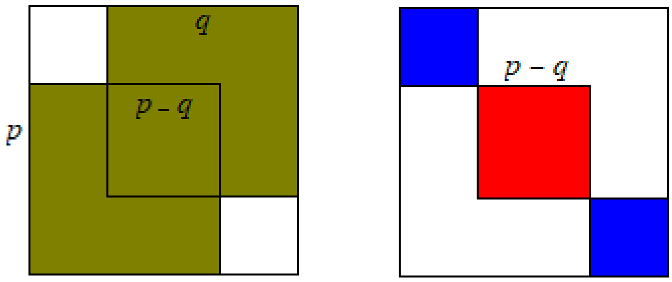
MÉTODO DEL DESCENSO INFINITO

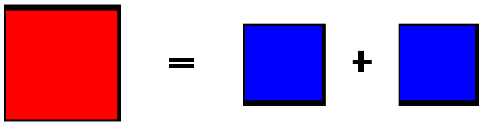
Éste método de demostración en matemáticas (Fermat (1607–1665) se atribuye el descubrimiento del método en 1659 en una carta a Carcavi) se, basa en el principio de que los números naturales es un conjunto bien ordenado (todo conjunto no vacío de números naturales posee un número mínimo), esto quiere decir que si existe un número natural n tal que una propiedad $P(n)$ es cierta, entonces, existe un número natural mínimo x para el que $P(x)$ es cierta. Es de hecho una utilización de la reducción al absurdo, pero su procedimiento de lograr el absurdo es siempre el mismo: mediante un algoritmo bien definido e ideado específicamente para el problema, se "salta" de un número a otro con la misma propiedad que el anterior pero más pequeño (pero esto es imposible, de acuerdo al principio del buen orden)

Supongamos que $\sqrt{2}$ no es irracional, $\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (ahora no hace falta imponer que la fracción sea irreducible). $\Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 - pq = 2q^2 - pq \Rightarrow p(p-q) = q(2q-p) \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{2q-p}{p-q} \Rightarrow \frac{2q-p}{p-q} = \sqrt{2}$.

Como $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow 1 < \left(\frac{p}{q}\right)^2 < 4 \Rightarrow 1 < \frac{p}{q} < 2 \Rightarrow q < p < 2q \Rightarrow 0 < p - q < q$, también como $q < p \Rightarrow 2q < 2p \Rightarrow 2q - p < p$ por lo tanto hemos encontrado dos números naturales: $2q - p$ y $p - q$ menores que p y q que también cumplen la propiedad, pero dado un número natural sabemos que no existen más que un número finito de números naturales más pequeños que él.

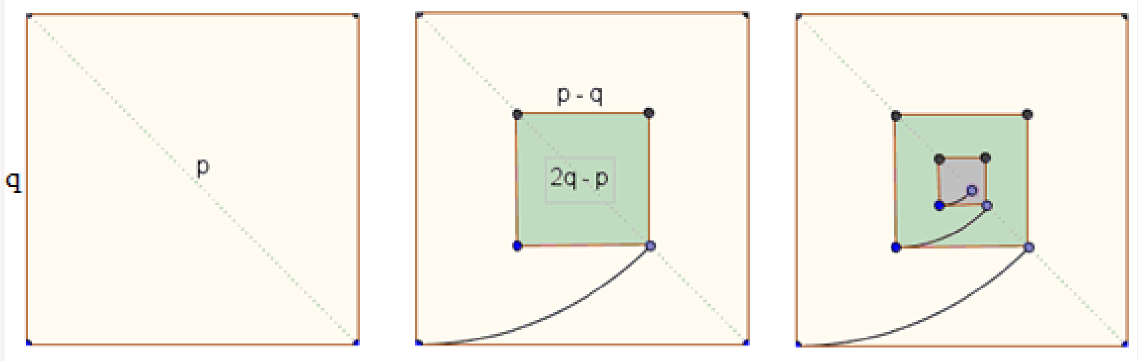






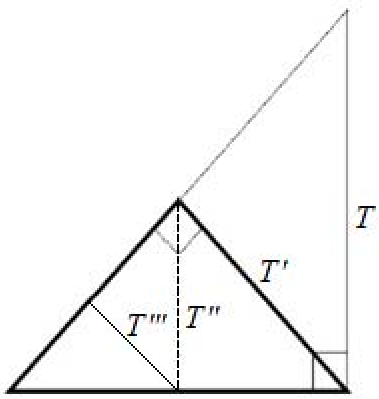
Por lo tanto hemos encontrado otro entero positivo $p - q$ menor que q que es el denominador de una fracción que es igual a $\sqrt{2}$. Con esta nueva fracción podríamos hacer lo mismo y encontraríamos otro entero positivo menor que $p - q$ que cumpliría lo mismo. Es decir, podemos encontrar una sucesión infinita y decreciente de enteros positivos cumpliendo lo anteriormente citado #

También partiendo de $\frac{p}{q} = \frac{2q-p}{p-q}$ podemos obtener una sucesión infinita y decreciente de cuadrados de proporción entre la diagonal y el lado $\sqrt{2}$

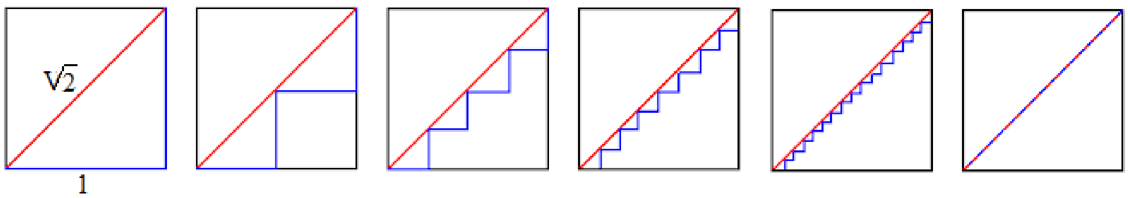


Y otra más, por el teorema de Pitágoras (c.569 aC–c.475 aC) (otro de los 10 matemáticos más grandes de todos los tiempos)$\sqrt{2}$ es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1. Si fuese racional,$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, el triángulo rectángulo isósceles de catetos n y hipotenusa $n\sqrt{2}$ $= m$ tendría los tres lados enteros.

De todos los triángulos rectángulos con lados enteros debe haber uno *T* que es más pequeño posible. Pero fijado *T*, se podría construir otro *T*' de lados enteros semejante a *T* y más pequeño que *T*, contradiciendo la definición de *T*:



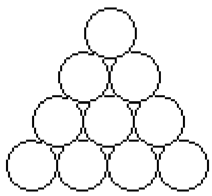
Y sin embargo parece en la figura siguiente que $\sqrt{2} = 2$ (paradojas del infinito)



EJEMPLO 2: Un cuadrado mágico 3x3 con los números naturales del 1 al 9 es fácil de conseguir, sin contar las diferentes rotaciones y reflexiones, el único que se puede formar es el siguiente, con constante *k* (suma de los 3 números de una línea) de valor 15:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

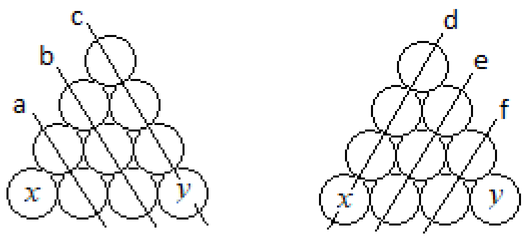
La pregunta que se plantea es si existen triángulos mágicos, que serían aquellos que están formados por números naturales consecutivos en los que todas las hileras rectas formadas por dos o más círculos dan la misma suma (*k*)



Supongamos como en el caso anterior que los números a colocar empiezan por el 1, es decir hay que colocar del 1 al 10 ambos incluidos.

La respuesta es negativa

Demostración: supongamos que hay una solución ⇒

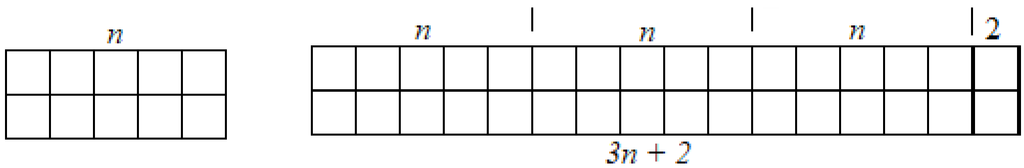


$1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55 \Rightarrow a + b + c + x = d + e + f + y = 55 \Rightarrow$ como $a = b = c = d = e = f = g = k \Rightarrow x = 55 - 3k = y \Rightarrow \#$

CONTRARRECÍPROCO:

Este mecanismo de demostración se basa en el hecho de que la implicación $A \Rightarrow B$ es equivalentemente lógica a $No\ B \Rightarrow No\ A$. Este mecanismo es aconsejable cuando no sabemos cómo trabajar a partir de A y, en cambio, la negación de B proporciona un buen punto de partida.

EJEMPLO: Si $3n + 2$ es un número natural impar, entonces n es impar.
Demostración: Si lo intentamos por el método directo tenemos:
$3n + 2 = 2m - 1 \Rightarrow n = \frac{2m-3}{3}$ que no nos dice nada sobre la paridad de n. Sin embargo si partimos de que n es par $\Rightarrow n = 2m \Rightarrow 3n + 2 = 3(2m) + 2 = 2(3m + 1)$, par.



MÉTODO DE INDUCCIÓN:

La inducción es un proceso por el cual de varios casos particulares obtenemos una ley general, es el tipo de razonamiento opuesto a la deducción.

Sea $P(n)$ una propiedad relacionada con el número natural .

Paso I: Se demuestra que $P(1)$ es cierta.

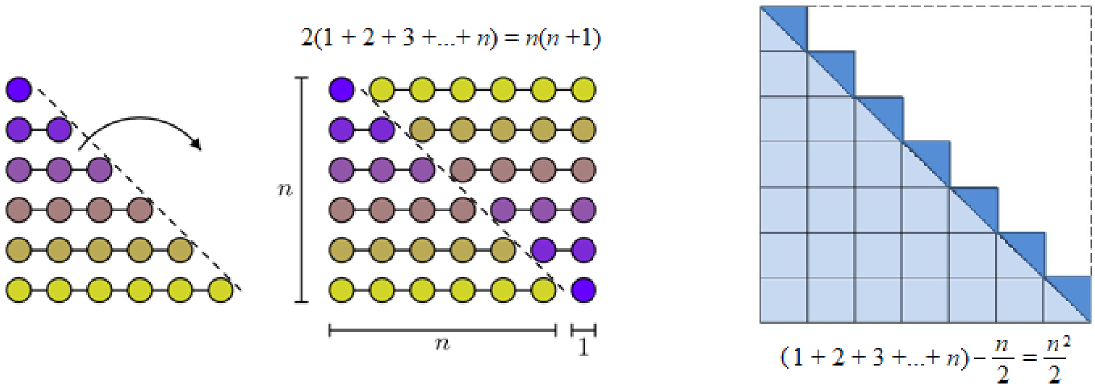
Paso II: Se prueba que si $P(k)$ es cierta, entonces $P(k + 1)$ también lo es.

En ese caso, la propiedad $P(n)$ es válida para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

EJEMPLO: Probar por inducción que la suma de los n primeros enteros positivos
$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$

Demostración: En este caso, $P(n)$ = la suma de los n primeros enteros positivos es $\dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$ La propiedad es cierta para $n = 1$: $P(1) = 1 = \dfrac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$ (es conveniente ver que también es cierta para algunos valores más) $P(2) = 1 + 2 = 3 = \dfrac{2 \cdot (2+1)}{2}$; $P(3) = 1 + 2 + 3 = 6 = \dfrac{3 \cdot (3+1)}{2}$. La dificultad del método de inducción está en probar el paso general, esto es, demostrar que si suponemos que la propiedad es cierta para k, también lo es para $k + 1$. Se supone que $P(k) = \dfrac{k \cdot (k+1)}{2}$ es cierta y queremos probar que la fórmula sigue siendo válida también para k + 1, es decir, que $P(k + 1) = \frac{(k+1)\cdot(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$. Vamos allá. $P(k + 1) = 1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) = P(k) + (k + 1) =$ aplicamos la hipótesis de inducción $= \frac{k\cdot(k+1)}{2} + (k + 1) = (k+1)\cdot\left[\frac{k}{2}+1\right] = \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$, como queríamos probar.

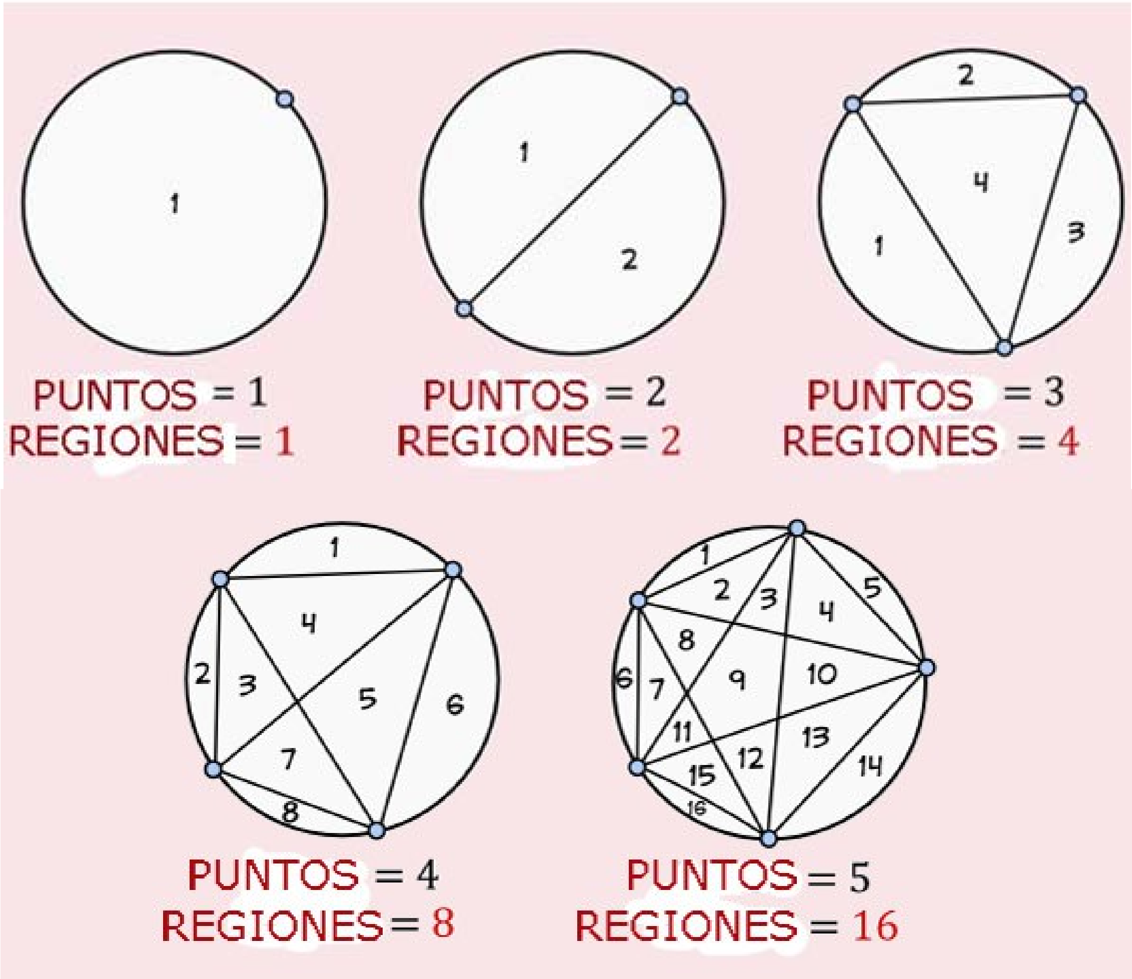
Este mismo resultado se puede demostrar gráficamente



Una descripción informal de la inducción matemática puede ser ilustrada por el efecto dominó, donde ocurre una reacción en cadena con una secuencia de piezas de dominó cayendo una detrás de la otra.

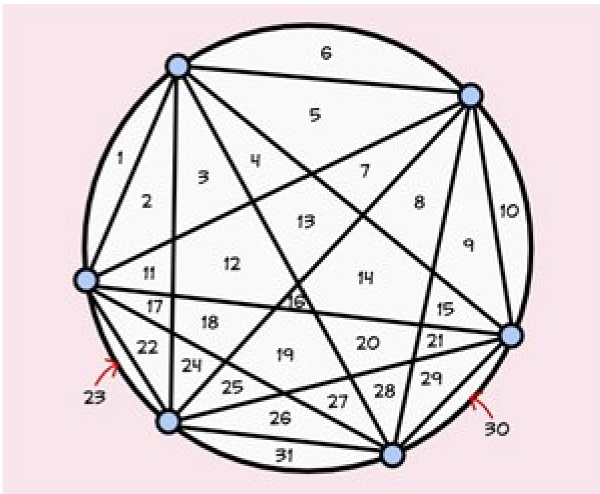
Utilizamos el reconocimiento de patrones algebraicos y numéricos como una forma de descubrir una conjetura y después será demostrada formalmente por inducción matemática o por otro método de demostración. Hay que observar que si bien una propiedad se cumple para unos cuántos ejemplos, no por eso se cumple siempre y que las intuiciones no demostradas no sirven para nada.

EJEMPLO: Escoge x puntos sobre una circunferencia de manera que al dibujar todas las cuerdas que unan estos x puntos no haya 3 cuerdas concurrentes en un punto distinto de los elegidos en la circunferencia. Ahora contamos el número de regiones que quedan dentro de una circunferencia:



¿Cuántas regiones crees que aparecerán si situamos 6 puntos sobre una circunferencia? Parece ser que el número de regiones es 2 elevado al número de puntos dibujados en la circunferencia, menos 1, así pues seria $2^{6-1} = 2^5 = 32$

Pero



CONTRAEJEMPLOS:

A veces, la validez de una propiedad se refuta dando un ejemplo en el que no se cumple dicha propiedad: habremos probado entonces que, en general, la propiedad en cuestión es falsa. A dichos ejemplos que echan abajo la validez de la propiedad se les conoce con el nombre de contraejemplos.

EJEMPLO: ¿Es cierto que para cada entero positivo n se cumple que $f(n) = n^2 - n + 17$ es un número primo?

Demostración: A pesar de que la fórmula da números primos para los 16 números naturales: $f(1) = 17$; $f(2) = 19$; $f(3) = 23$; $f(4) = 29$; $f(5) = 37$; $f(6) = 47$; $f(7) = 59$; $f(8) = 73$; $f(9) = 89$; $f(10) =107$; $f(11) = 127$; $f(12) = = 149$; $f(13) = 173$; $f(14) = 199$; $f(15) = 227$; $f(16) = 257$, pero $f(17) = 17^2 - 17 + 17 = 17^2 = 289$

OTROS MÉTODOS:

DEMOSTRACIÓN CONSTRUCTIVA

EJEMPLO: Demostrar que la expresión $\sqrt{6+4\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}$ da como resultado un número entero.

Llamamos x a la expresión dada,

$$x = \sqrt{6+4\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}} \Rightarrow x^2 = (\sqrt{6+4\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}})^2 \Rightarrow$$

$$x^2 = 6 + 4\sqrt{2} + 6 - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{6+4\sqrt{2}}\sqrt{6-4\sqrt{2}} = 12 + 2\sqrt{6^2 - 4^2\left(\sqrt{2}\right)^2} = 16 \Rightarrow x = 4$$

DEMOSTRACIÓN NO CONSTRUCTIVA

EJEMPLO: Demostrar que existen dos números irracionales a y b tal que a^b es un número racional:

Demostración: O bien $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es un número racional y se ha acabado la demostración (tómese $a = b = \sqrt{2}$), o es irracional en cuyo caso podemos tomar $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ y $b = \sqrt{2}$. Esto produce $a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$

DEMOSTRACIÓN POR CASOS

La demostración por casos, también conocida como demostración por exhaución o método de fuerza bruta, es un método de demostración matemática en el cual la proposición a ser probada se divide en un número finito de casos, y cada caso es demostrado por separado.

Una demostración por casos consta de dos etapas:

- Una prueba de que los casos son exhaustivos; es decir, son todos los que son.
- Una demostración de cada uno de los casos.

EJEMPLO: Probar que para dos números naturales cualesquiera x, y es imposible que se verifique $\boldsymbol{3x^2 = y^2 + 1}$

Demostración: Puesto que el primer término es múltiplo de 3, entonces y no lo puede ser, por lo que y es de una de las dos formas posibles

Caso 1: $y = 3h + 1$

Caso 2: $y = 3h - 1$

Demostraremos la proposición para cada uno de los casos

En el caso 1: $(3h + 1)^2 = 9h^2 + 6h + 1 = 3(3h^2 + 2h) + 1 = 3k + 1$

En el caso 2: $(3h - 1)^2 = 9h^2 - 6h + 1 = 3(3h^2 - 2h) + 1 = 3k + 1$

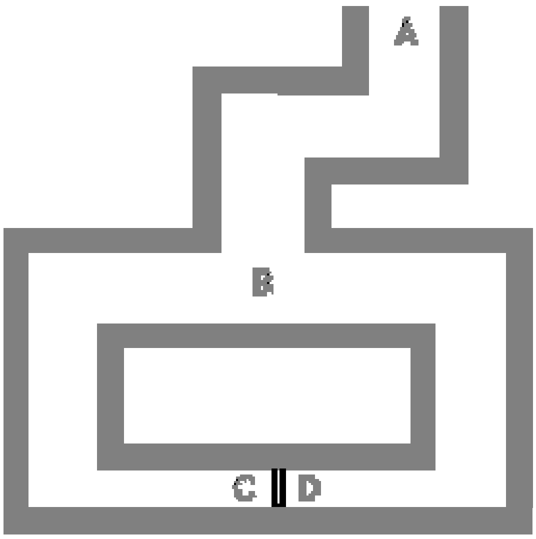
En cualquier caso y^2 es un múltiplo de 3 más 1, por lo que $y^2 + 1$ será un múltiplo de 3 más 2 y nunca podrá ser un múltiplo de 3 como es $3x^2$

La matemática no es una ciencia estacionaria, sino que, se renueva permanentemente. Desde la propia matemática están surgiendo, recientemente, nuevas estrategias de validación de las proposiciones matemáticas que desafían la concepción clásica de la demostración deductiva línea a línea, tales como demostraciones holográficas (informalmente, una demostración es trasparente o holográfica si puede ser verificado con una amplia confianza por un pequeño número de comprobaciones al azar. Un reciente trabajo de un grupo grande de investigadores ha demostrado que este concepto aparentemente paradójico puede ser factible), demostraciones de conocimiento cero, las pruebas basadas en comprobaciones experimentales, a menudo con el uso de ordenadores y las demostraciones visuales.

LA DEMOSTRACIÓN MÁS LARGA EN LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS.docx

DEMOSTRACIÓN DE CONOCIMIENTO CERO

EJEMPLO: Una persona trata de demostrar a otra que sabe algo, sin enseñarle o transmitirle ese «algo». En el siguiente ejemplo Alicia quiere demostrar a Bruno que sabe las **palabras secretas** (clave) para abrir una puerta mágica (problema, criptosistema), sin decir esas palabras delante de Bruno (sin enseñarle la clave). La demostración es la siguiente:



La puerta mágica está en la cueva de Alí-Babá. La cueva tiene una entrada [A] y una bifurcación [B] que llega a ambos lados de la puerta [C y D].

Alicia entra en la cueva, y asegura como demostración que, dado que sabe las palabras mágicas, cuando Bruno entre y llegue a la puerta, ella estará en el mismo lugar por el que él entre, dado que puede abrir la puerta y pasar de un lado a otro [C] a [D] antes de que él llegue.

Alicia entra desde por cualquier camino. Cuando Bruno comienza a entrar y llega al punto [B], decide si continuar por la izquierda o por la derecha. Puede gritarle a Alicia por donde va a ir, o sencillamente Alicia oye los pasos de Bruno: si escucha que entra por el mismo lado en el que ella está, le espera allí. Pero si entra por el lado contrario, usa las palabras mágicas para abrir la puerta y volverla a cerrar, apareciendo en el lado correcto. Bruno llega a la puerta [C] o [D] y encuentra a Alicia, y también comprueba que la puerta está cerrada.

Si este protocolo («demostración») se realizara sólo una vez, Bruno podría pensar que Alicia ha tenido suerte al entrar en la cueva, esperándole en el lado correcto (la probabilidad es del 50 por ciento). De modo que se repite la operación. Alicia vuelve a acertar. Una vez más... y Alicia vuelve a estar allí. Bruno puede repetir el protocolo cuantas veces quiera, y tras un número de veces razonable (diez o veinte) le empieza a parecer imposible que Alicia haya tenido tanta suerte como para acertar siempre. Si Bruno repitiera el protocolo mil veces, la probabilidad de que Alicia acertara por puro azar sería infinitesimal. De modo que **es cierto que Alicia sabe algo, aunque no le haya transmitido ese conocimiento a Bruno**.

DEMOSTRACIÓN ASISTIDA POR ORDENADOR

Los matemáticos, fueron lentos a la hora de entusiasmarse con los ordenadores, tradicionalmente, han confiado en el pensamiento puro y duro para obtener el conocimiento de nuevas verdades. Solía decirse que un departamento de matemáticas era el segundo más barato en términos de inversión para una universidad, porque sus miembros necesitaban únicamente lápices, papel y papeleras (el más barato sería el de los filósofos, porque no necesitan las papeleras). En una fecha tan tardía como 1986, un matemático de Stanford presumía que su departamento tenía menos ordenadores que ningún otro, incluido el de literatura francesa.

En junio de 1976, tras cuatro años de arduo trabajo, mil horas de ordenador Haken (Wolfgang Haken, un matemático de la Universidad de Illinois) junto con Kenneth Appel, un programador de talento consiguieron un resultado: cuatro colores bastaban realmente para colorear un mapa. La historia la hizo pública *The Times* de Londres ese mismo mes. La conjetura de los cuatro colores se había convertido en el teorema de los cuatro colores.

EL PROBLEMA DE LOS CUATRO COLORES.docx

Muchos matemáticos reaccionaron con exceptitud cuando supieron de los detalles que se escondían tras ella. «Admitir los chanchullos informáticos de Appel y Haken en el rango de las matemáticas sólo nos dejaría intelectualmente frustrados», fue un típico comentario. Había tres causas diferentes para esa infelicidad. La primera era estética. La demostración no era bonita; su enumeración de casos, como si fuera un *bulldozer*, no conseguía seducir ni encantar al intelecto. La segunda razón tenía que ver con la utilidad. Una buena demostración debería contener argumentos novedosos y revelar estructuras ocultas que puedan aplicarse en otros casos en matemáticas. La demostración de Haken-Appel parecía estéril a este respecto. Tampoco daba pistas para comprender por qué el teorema de los cuatro colores era cierto. La tercera y más importante razón era epistemológica. ¿Se trataba realmente de una demostración? Idealmente, una demostración es un argumento que puede traducirse a un lenguaje formal y verificarse por medio de las pruebas de la lógica. En la práctica, los matemáticos nunca se preocupan de este tipo de demostraciones formales, que serían extremadamente voluminosas. Lo que hacen, en cambio, es que sus argumentos sean razonablemente rigurosos explicando en detalle el número suficiente de pasos para convencer a los expertos en su campo. Para que un argumento sea convincente debe ser «examinable», esto es, debe poder ser aprehendido por la mente humana y escrutado en busca de errores.

La parte humana del argumento, que abarca unas novecientas páginas, era suficientemente imponente. Pero la parte *informática,* que ocupaba un número de páginas impresas por ordenador de 1,2 metros de altura, no podría verificarse nunca humanamente, incluso aunque todos los matemáticos del mundo se dedicaran a esta tarea.

Hasta el siglo XX se asumía que cualquier demostración debía, en principio, ser revisada por un matemático competente para confirmar su validez. Algunos matemáticos están preocupados por la posibilidad de que un error en un programa de ordenador o un error de ejecución en sus cálculos, pueda afectar a la validez de tales demostraciones. En la práctica las posibilidades de un error que invalide una demostración asistida por ordenador pueden reducirse al incorporar redundancia y auto revisiones en los cálculos, y al desarrollar enfoques y programas múltiples e independientes. Los errores tampoco podrán ser totalmente superados en caso de la verificación humana de una demostración, especialmente si la demostración contiene lenguaje natural y requiere un trasfondo matemático profundo.

La demostración de la conjetura de Kepler.

Kepler (astrónomo y matemático alemán (1571–1630)), en 1611 conjeturó ante el problema del empaquetamiento de esferas más denso, que la solución era el que se puede ver en las naranjas en cualquier frutería, denominado red cúbica centrada en las caras. La conjetura fue resuelta por Thomas Hales en 1998, demostró que es posible dar demostraciones rigurosas de resultados en los que hay un número muy grande de casos por analizar, este por ejemplo tenía 5000 casos por analizar y cada caso es tan complejo que necesitaba hacerse con ayuda de un ordenador, con un total de 3 gigabytes de código.

En el caso de la conjetura de Kepler, la demostración apareció en 2005 en la revista *Annals of Mathematics*, una de las mejores revistas de matemáticas, (reducida a la parte teórica que se ajustaba al arquetipo tradicional, mientras que el programa informático apareció en otra revista, especializada en computación *Discrete and Computacional Geometry*). Los doce científicos seleccionados por Annals para realizar la revisión por pares, comentaron, tras cinco años de revisión, que estaban al 99% seguros de la exactitud de la prueba de Hales., pero que era imposible revisar los 3 gigabytes de códigos. Por supuesto, el código es público, pero les llevó a los autores del mismo varios años escribirlo. Pero la comunidad matemática siguió buscando una demostración formal, hasta que en junio de 2017 la demostración formal de la conjetura de Kepler fue aceptada en la revista *Forum of Mathematics*.

LA CONJETURA DE KEPLER.docx

PRINCIPIO DEL PALOMAR

Vamos a ver ahora el que posiblemente sea el *teorema* más evidente en matemáticas y a la vez increíblemente útil: el principio del palomar. El enunciado es muy sencillo, si tenemos una cantidad de *n* palomas guardadas en *m* palomares (nidos, agujeros para entrar al palomar) con $m < n$, por fuerza debe de haber al menos un palomar que contenga varias palomas. Es el mismo principio del *juego de la silla,* si en cada ronda de este juego infantil dejamos una silla menos que jugadores en liza, será inevitable que alguno de los jugadores no encuentre silla y quede eliminado cuando la canción acabe.

El principio de palomar fue formulado por primera vez en 1834 por el matemático alemán Gustav Dirichlet (1805–1859), que planteo el siguiente problema: Con las cifras significativas 1, 2, 3,..., 8 y 9, si se seleccionan seis al azar, demostrar que en cada selección tiene que haber necesariamente dos elementos cuya suma es 10.

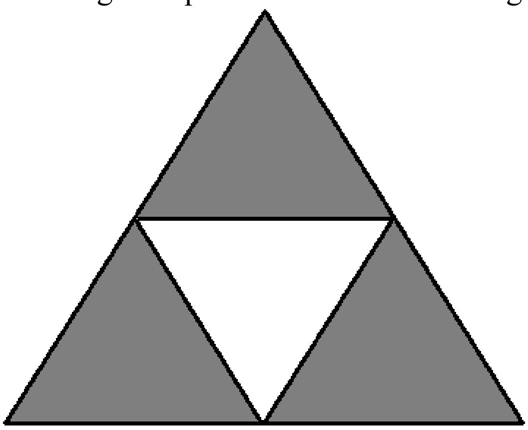
DEMOSTRACIÓN: Los pares cuya suma es 10 son: {1, 9}; {2, 8}; {3, 7} y {4, 6}, basta tomar en el principio como número de palomas $n = 6$, las seis cifras elegidas y como número de nidos $m = 4$, los cuatro pares que dan suma 10.

Notar que el número 5 no afecta, porque, aunque se elija la cifra 5 en cualquiera de las elecciones, hay 5 palomas para 4 nidos.

PROBLEMA DEL PALOMAR.docx

EJEMPLO: Demostrar que en un triángulo equilátero de 2 centímetros de lado, para cualesquiera 5 puntos del mismo siempre hay dos a distancia menor o igual que 1

Podemos dividir el triángulo equilátero inicial en 4 triángulos menores de lado 1



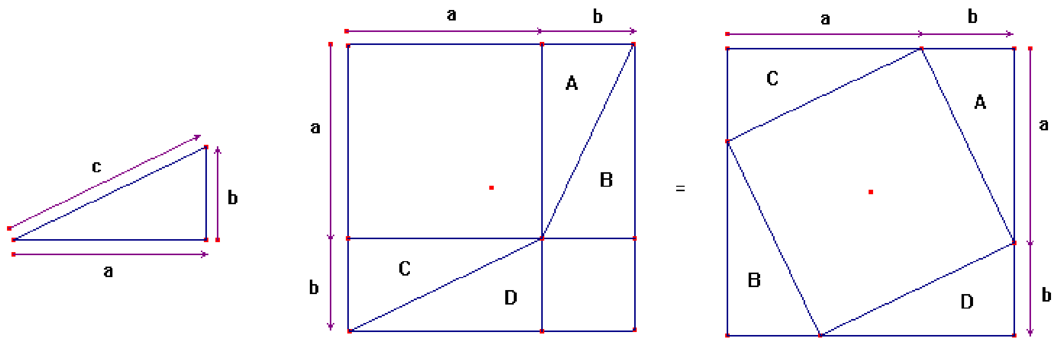
Ya tenemos nuestros 4 palomares (los 3 triángulos grises y el triángulo blanco central) y nuestras 5 palomas (los 5 puntos), así que por fuerza al menos 2 puntos caerían sobre el mismo triángulo. Y esos dos puntos contenidos en el mismo triángulo, obligatoriamente estarán a una distancia menor que uno.

DEMOSTRACIONES VISUALES

No hay nada como una explicación visual para que un resultado matemático quede suficientemente claro. Las demostraciones analíticas son interesantes, tienes sus ventajas, hasta pueden tener cierta belleza, pero si mediante un dibujo podemos *ver* el resultado, podemos admirar mucho más su belleza y dicho resultado se nos acaba quedando mucho mejor. Por desgracia no podemos presentar de manera visual todo resultado matemático.

Se nos plantea la siguiente pregunta: ¿vale la pena hacer una demostración cuando la proposición que se quiere demostrar es por si suficientemente clara y evidente? Este era aproximadamente el punto de vista de los matemáticos hindúes en la edad media. Muchas de las proposiciones geométricas no las demostraban, sino que las acompañaban de un dibujo suficientemente expresivo y escribían sobre él una sola palabra "¡mira!"(En el DRAE **Ver**: poseer el sentido de la vista' y 'percibir algo por el sentido de la vista'. **Mirar**, por el contrario, aparece explicado con las siguientes palabras: 'fijar la vista en un objeto, aplicando juntamente la atención').

Así por ejemplo, en el libro "Lilavati" del matemático indio Bhaskara Acharia (c.600–c.660) el teorema de Pitágoras se representa así:

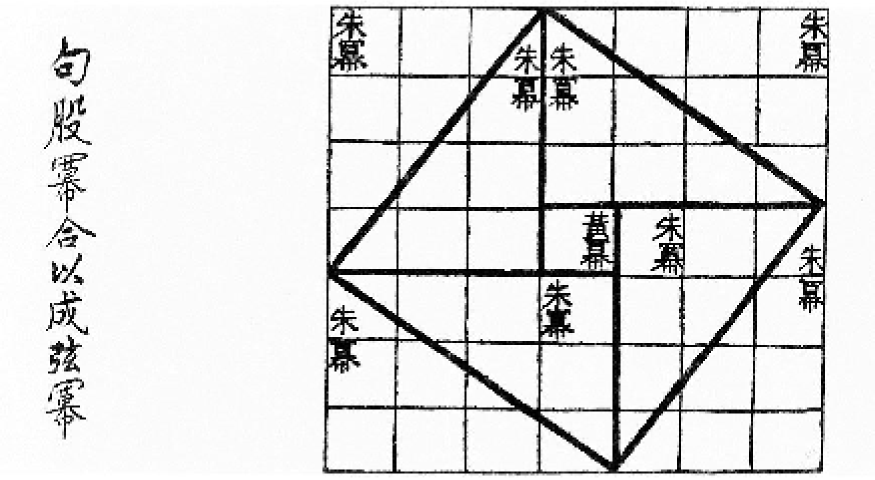


De estos dos dibujos el lector debe "percibir" que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo rectángulo, es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

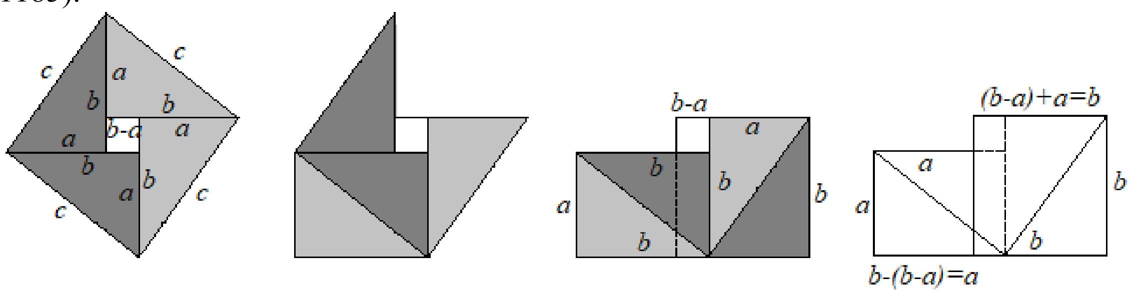
¿Puede decirse que en este caso no hay demostración? Si el que ve simplemente el dibujo, no razona, es poco probable que pueda llegar a una conclusión determinada. En realidad, el autor supone que el lector no solo ve, sino que también mira y piensa. El que mira debe comprender que tiene dibujados dos cuadrados iguales y por tanto de igual área. El primero contiene cuatro triángulos rectángulos iguales y un cuadrado construido sobre la hipotenusa, y el segundo consta de cuatro triángulos rectángulos iguales a los anteriores y dos cuadrados construidos sobre los catetos. Solo cabe imaginarse que si de dos magnitudes iguales (las áreas de los dos cuadrados grandes iguales) se quita una misma magnitud (el área de los cuatro triángulos rectángulos) nos quedarán dos superficies iguales: en el primer caso el cuadrado construido sobre la hipotenusa, y en el segundo, los dos cuadrados construidos sobre los catetos. Como puede verse, aquí es totalmente insuficiente el apoyarse sólo en la evidencia, hay que pensar y razonar.

Este teorema ha sido atribuido según diferentes fuentes de la propia Grecia a Pitágoras, como ha trascendido hasta nuestros días. Sin embargo, existen evidencias de que era conocido por antiguas civilizaciones como en Babilonia, Egipto, India o China. Por lo que se sabe, estas civilizaciones conocían y manejaban triángulos concretos que verificaban el teorema, pero le debemos a Pitágoras el teorema en toda su generalidad, para todos los triángulos rectángulos y para todas las ternas de números verificando la propiedad y también su "**demostración**", Diógenes Laercio recoge en su "Vida de filósofos" un comentario asegurando que Pitágoras sacrificó una **hecatombe** (cien bueyes, del griego *hekaton*, cien y *bus,* buey) cuando descubrió su famoso teorema. Aunque sea una anécdota ficticia, su inclusión en el libro de Laercio nos ofrece una idea de la importancia que le concedían entonces. Además, por este motivo en la Edad Media el Teorema de Pitágoras era conocido como ***Inventum hecatombe dignum***.

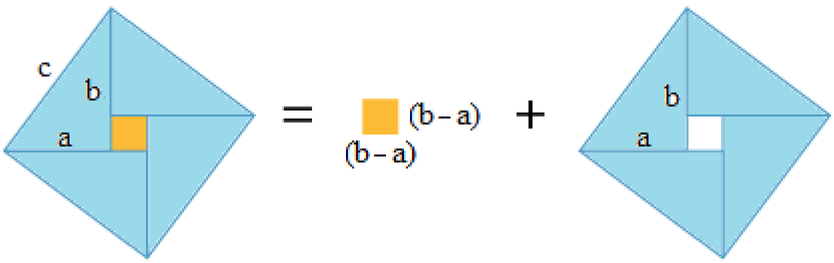
Una de la más antiguas apariciones del teorema de Pitágoras es la siguiente del Chou Pei Suan Ching, este libro data del periodo de la dinastía Zhou (1046 aC – 256 aC), sin embargo su compilación y adición de materiales continuó en la dinastía Han (202 aC – 220 dC), es la prueba visual para un triángulo de a = 3, b = 4 y c = 5.



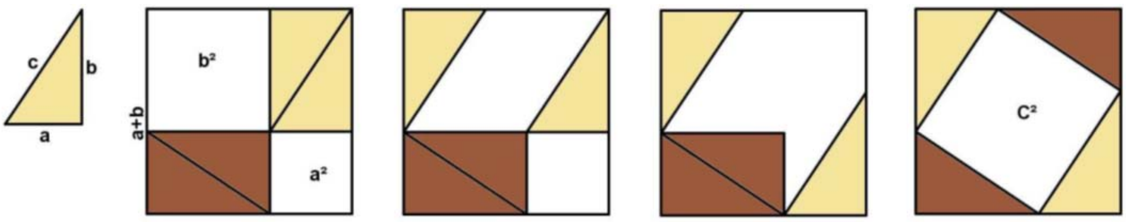
La siguiente es del monje, matemático y astrónomo hindú Bhaskara (1114 – 1185).



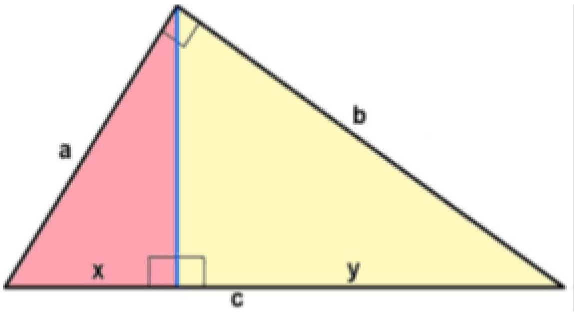
A continuación una variante con un poco de álgebra, utilizando que $c^2 = (b-a)^2 + 4\frac{ab}{2} = a^2 + b^2$



También aparece en el Chou Pei Suan Ching, una forma muy sencilla y elegante utilizando sólo el movimiento de triángulos dentro de un cuadrado

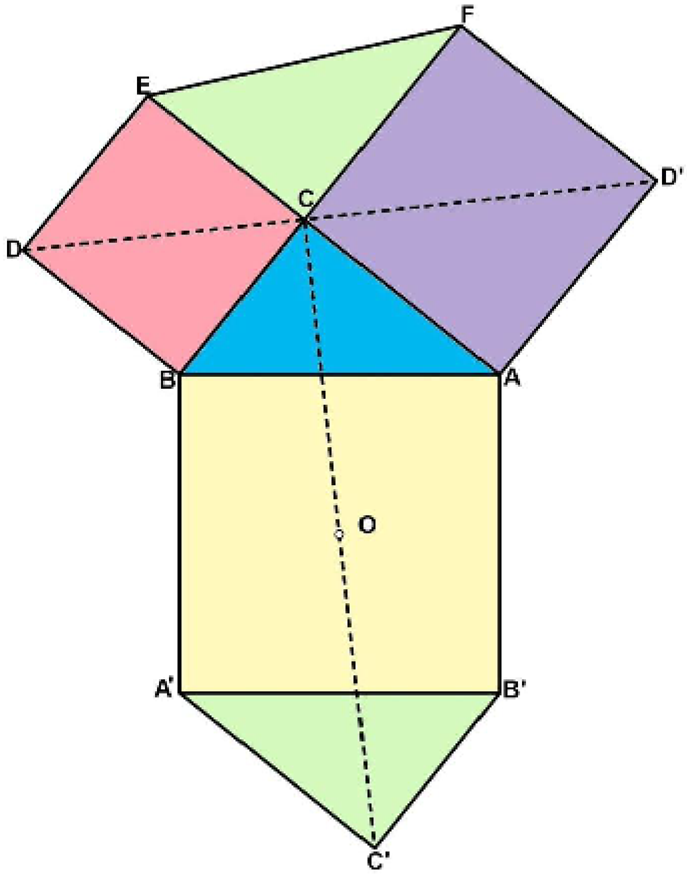


Otra, se cree la de Euclides, empleando semejanza de triángulos



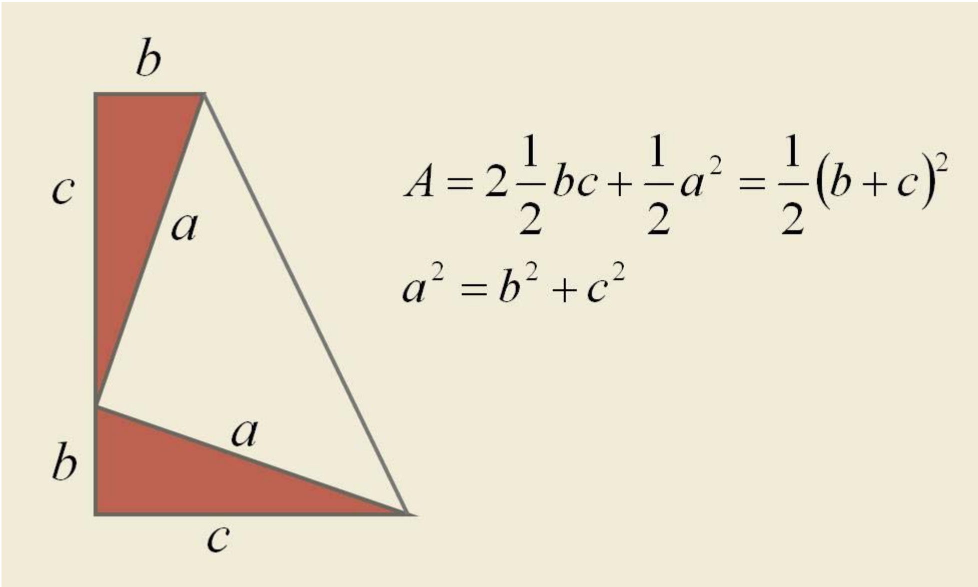
$$\frac{x}{a}=\frac{a}{c} \qquad \frac{y}{b}=\frac{b}{c},$$
$$x=a\bullet\frac{a}{c},\quad y=b\bullet\frac{b}{c},$$
$$c=x+y=\frac{a^2+b^2}{c}$$

A continuación una atribuida a Leonardo da Vinci



Que necesita alguna explicación: A la imagen "estándar" de un triángulo rectángulo ABC con cuadrados BCDE; ACFD’ y ABA’B’ en los catetos y la hipotenusa, Leonardo estratégicamente agregó dos copias de triángulo rectángulo CEF y A’B’C’, y las dos líneas discontinuas CC’ y DD’. Por reflexión, DEFD’ es congruente con DBAD’, y por rotación de centro O y ángulo 180º, CBA’C’ es congruente con CAB’C’. Observe que una rotación de 90º a la derecha de DBAD’ con respecto al punto B muestra que DBAD’ y CBA’C’ también son congruentes. De ahí que los hexágonos DEFD’AB y CAB’C’A’B tienen partes congruentes y por lo tanto la misma área, de la que sigue el teorema de Pitágoras

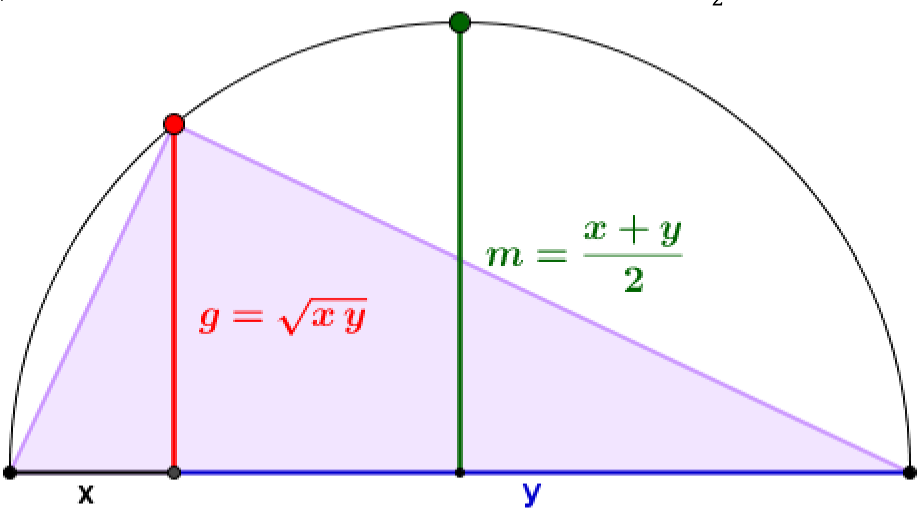
Y para terminar una que se debe a uno de los presidentes de EEUU. **James Abram Garfield** (1831−1881), fue el presidente número 20 de los Estados Unidos de América, y el segundo en morir asesinado. Tuvo una carrera distinguida como congresista y como militar durante la Guerra Civil, posteriormente sería General en Jefe de las Fuerzas Armadas del EEUU. Antes de la Guerra Civil trabajó como profesor de lenguas clásicas. Su nombre está asociado a las matemáticas ya que en 1876 descubrió una nueva demostración del Teorema de Pitágoras haciendo uso del área de un trapecio.

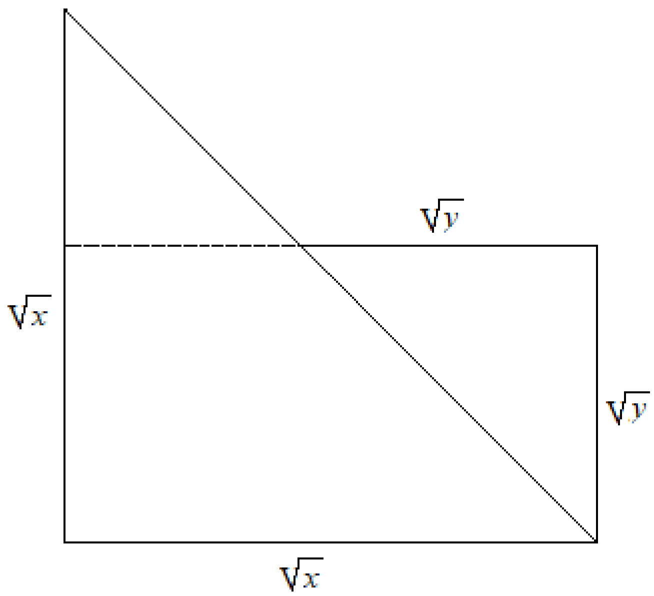


En varias de las demostraciones anteriores se ha utilizado un método que se utiliza frecuentemente en las demostraciones que es el METODO DE DOBLE CONTEO (contar la misma cantidad, en nuestro caso el área de una figura de dos maneras diferentes)

Hay que prestar atención al papel que desempeña el dibujo en una demostración de una propiedad. Hay que tener en cuenta que el dibujo es solamente un medio auxiliar para la demostración, que es únicamente un ejemplo, un caso particular de toda una clase de figuras, con respecto a la cual se demuestra la propiedad. Por eso tiene mucha importancia separar en el dibujo dado, las propiedades generales y constantes de la figura, de las particulares y casuales.

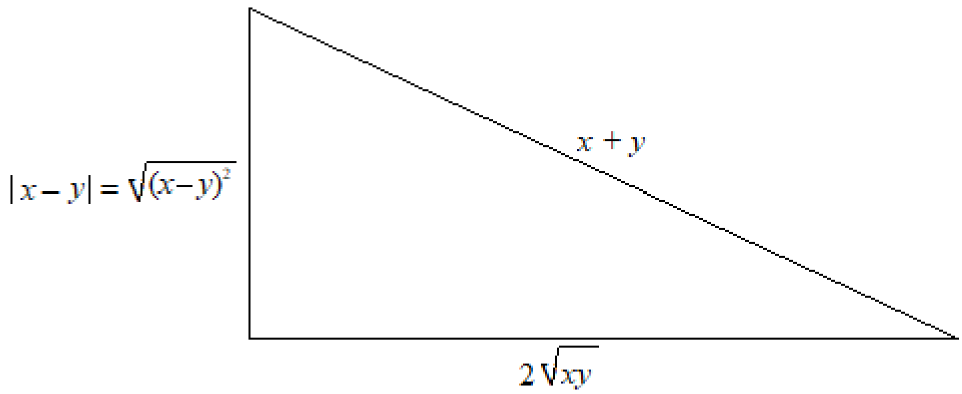
Pasamos ahora a dar varias demostraciones visuales sobre comparaciones de distintos tipos de medias. Las primeras nos dicen que dadas dos cantidades x, y la media geométrica $\sqrt{xy}$ es siempre menor o igual que la media aritmética $\frac{x+y}{2}$



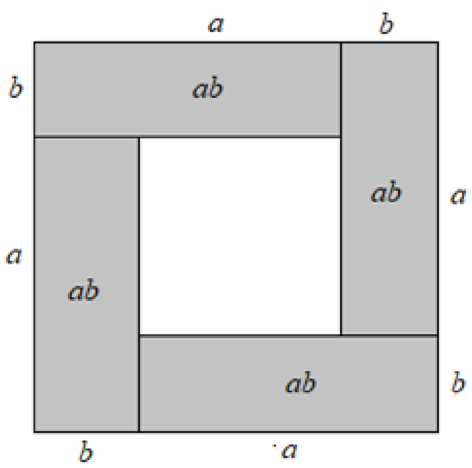


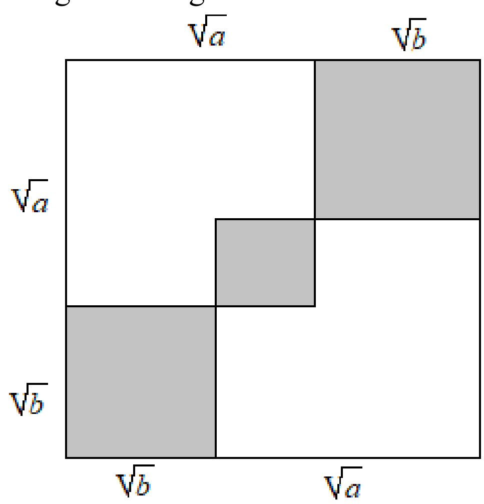
$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{y}\right)^2 \geq \sqrt{x}.\sqrt{y}$ y por tanto $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

Otra demostración utilizando la comparación Pitagórica



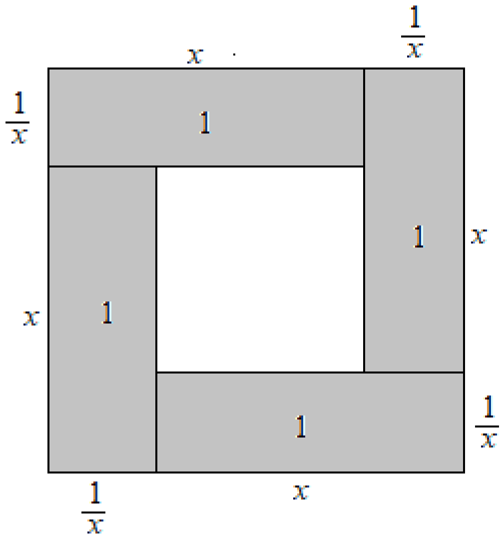
También se puede ver la desigualdad con las siguientes figuras





Pues en la primera figura $(a+b)^2 \geq 4ab$ o lo que es lo mismo $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$ y en la segunda $2(\sqrt{a})^2 + 2(\sqrt{b})^2 \geq (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ y por tanto $2a + 2b \geq a + b + 2\sqrt{ab} \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$

Una aplicación de los últimos dibujos nos pueden servir para demostrar que $x + \frac{1}{x} \geq 2$. En efecto si lo aplicamos al caso particular de $a = x$; $b = 1/x$ tenemos



$x + \frac{1}{x} \geq 2$, pues$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \geq 4$

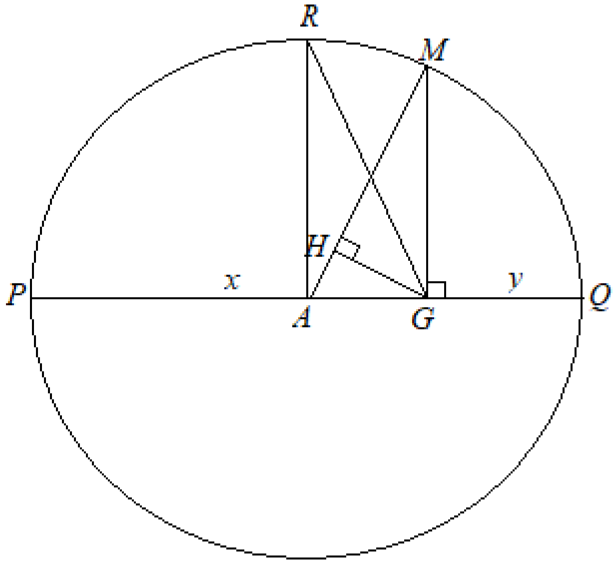
Y una última forma sencilla de demostrarlo y así comparamos todas, consistiría en partir de dicha desigualdad y realizarle transformaciones correctas a la misma con el objetivo de llegar a una expresión que sepamos con seguridad que es cierta. Después, por tanto, podemos recorrer el desarrollo obtenido en sentido inverso y tendríamos demostrada la desigualdad.

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \Rightarrow xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Rightarrow xy \leq \frac{x^2+2xy+y^2}{4} \Rightarrow 4xy \leq x^2 + 2xy + y^2 \Rightarrow 0 \leq x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$$

También se pueden comparar ambas medias con la media armónica y la media cuadrática.

La media armónica es el inverso de la media aritmética de los inversos $\frac{1}{\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}} = \frac{2xy}{x+y}$: (La velocidad media v_m de dos velocidades v_1, v_2 en dos recorridos de espacios iguales x , es la media armónica de las velocidades $v_1 = \frac{x}{t_1}, v_2 = \frac{x}{t_2}$ $\left(t_i = \frac{x}{v_i}\ i = 1, 2\right), v_m = \frac{2x}{t_1+t_2} = \frac{2x}{\frac{x}{v_1}+\frac{x}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$, así si conducimos 100 km a 80 km/h y otros 100 a 120 km/h, la velocidad promedio en estos 200 km no es de 100 km/h sino de 96 km/h que es la media armónica de 80 y 120 km/h

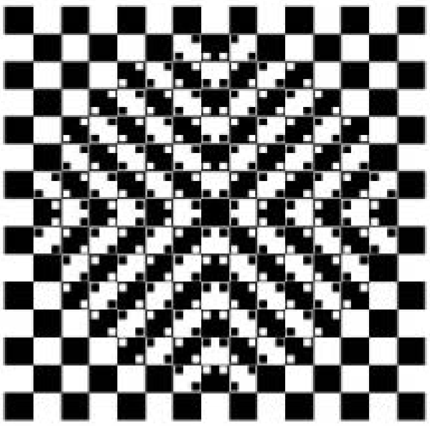
La media cuadrática de dos números es igual a la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de los valores: Esta media tiene aplicaciones tanto en ciencias biológicas como en medicina. A veces la variable toma valores positivos y negativos, como ocurre, por ejemplo, en los errores de medida. En tal caso se puede estar interesado en obtener un promedio que no recoja los efectos del signo. Este problema se resuelve, mediante la denominada media cuadrática. Consiste en elevar al cuadrado todas las observaciones (así los signos negativos desaparecen), en obtener después su media aritmética y en extraer, finalmente, la raíz cuadrada de dicha media para volver a la unidad de medida original.



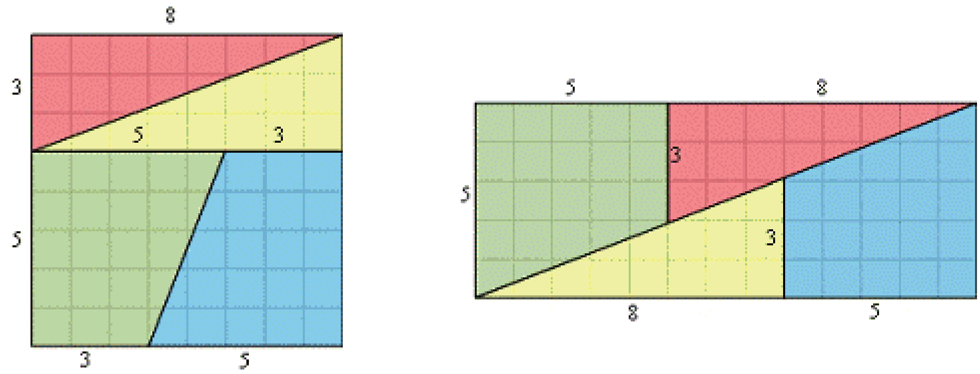
Siendo *PG = x; GQ = y*

En la figura podemos apreciar que $GR \geq AM = AR \geq GM \geq HM$, donde *GR* es la media cuadrática, *AM* es la media aritmética, *GM* es la media geométrica y *HM* es la media armónica (utilizando la definición de coseno del ángulo de vértice *M* en los dos triángulos rectángulos *AMG* y *GHM* de la figura $HM = \frac{2xy}{x+y}$; en el triángulo *AGR*, $AG = \frac{x-y}{2}$, $AR = \frac{x+y}{2}$)

La demostración por una figura es potencialmente peligrosa, pues, a veces, las apariencias engañan. Veamos unos ejemplos:
EJEMPLO 1:



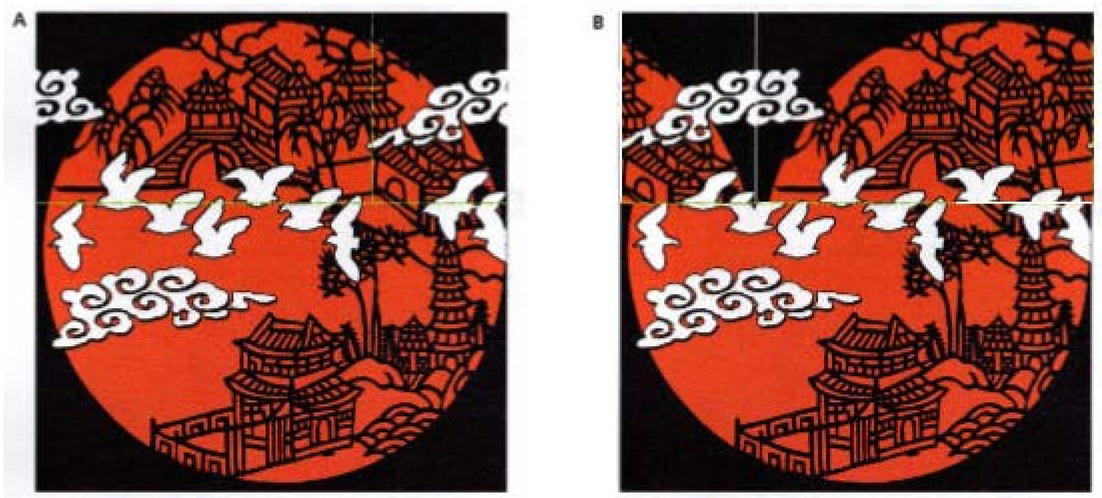
EJEMPLO 2: Tomamos un cuadrado de lado 8u. Lo recortamos por las marcas que se muestran en la figura. Con las piezas que quedan se construye un rectángulo cuyos lados miden 5u. y 13u.



Si calculamos el área del rectángulo y el área del cuadrado obtenemos:
Área cuadrado: 8·8 = 64 u^2
Área rectángulo: $13.5 = 65\ u^2$

PARADOJAS DE FIBONACCI.docx

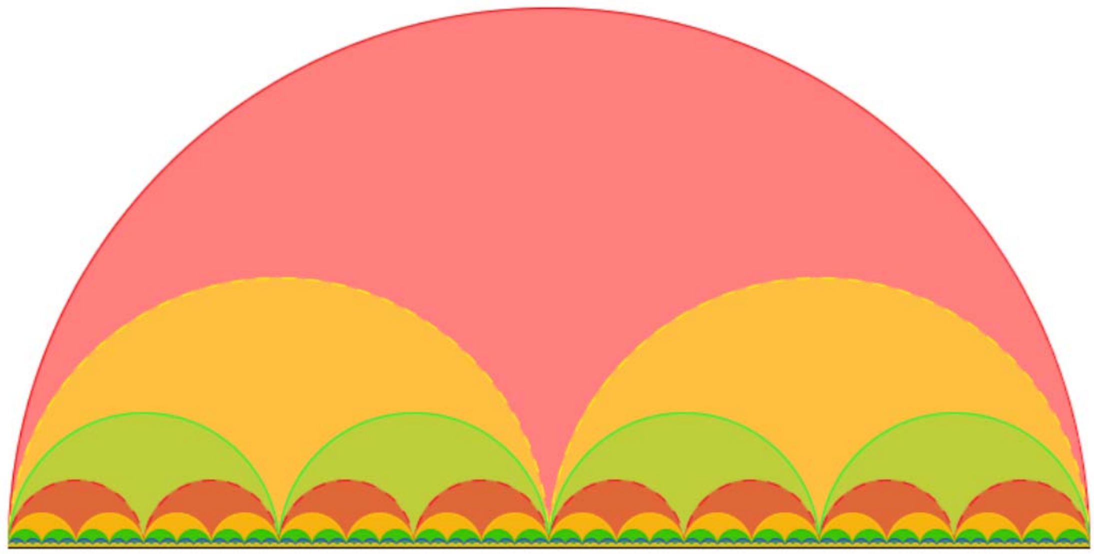
EJEMPLO 3:



Si contamos las palomas que se ven en los dos dibujos son (9 en el de la izquierda y 10 en el de la derecha) pero se ha obtenido uno del otro cortando y pegando trozos

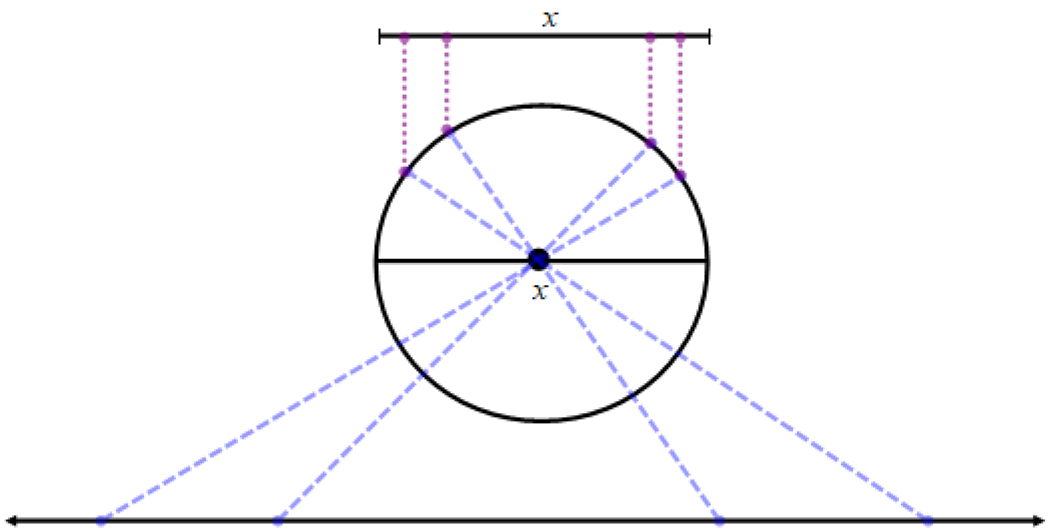
PARADOJA DE DELAND.docx

EJEMPLO 4:



Veamos a continuación un ejemplo

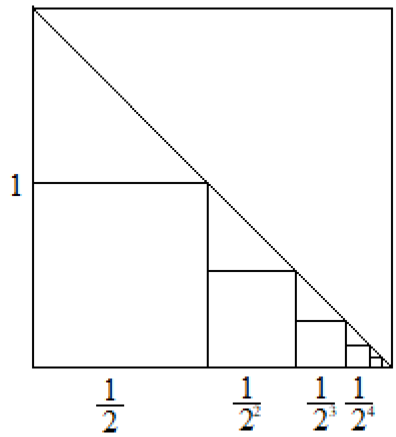
EJEMPLO: Un segmento tiene tantos puntos como toda la recta real



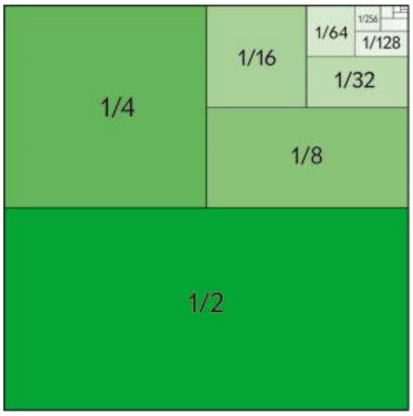
Vemos a continuación una serie de dibujos sobre sumas:

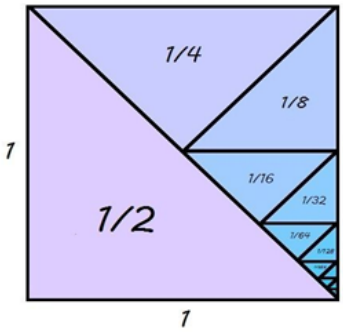
Primero infinitas (series)

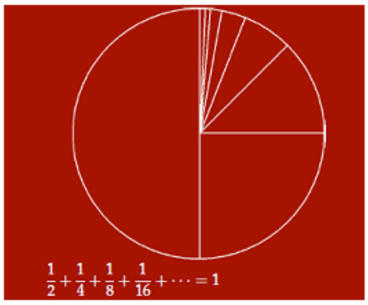
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1$$



Las longitudes de los sucesivos cuadrados llegan a sumar la longitud de la base del cuadrado mayor

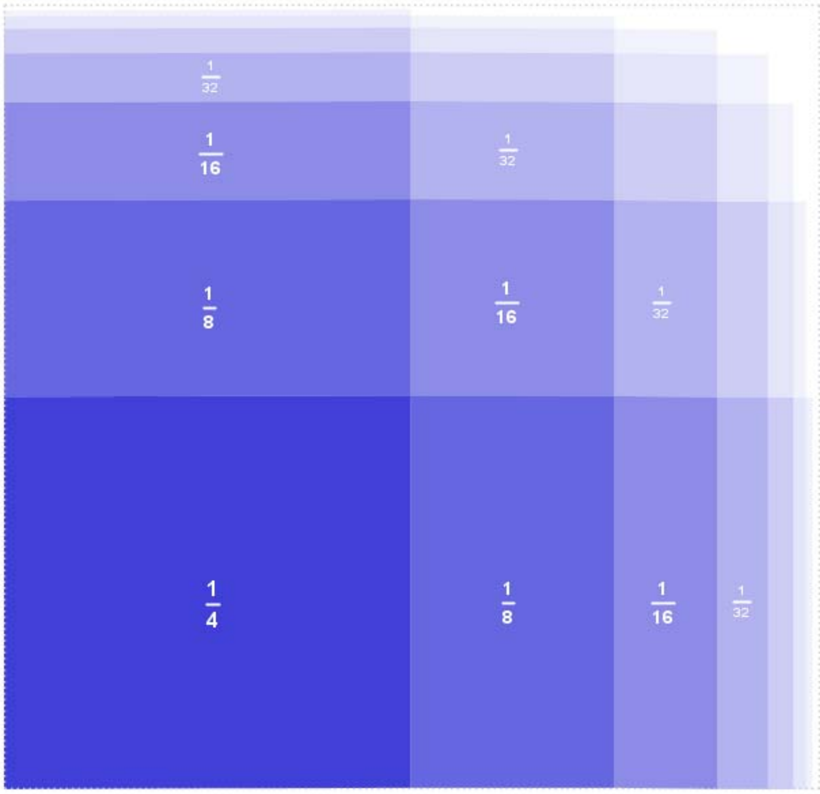






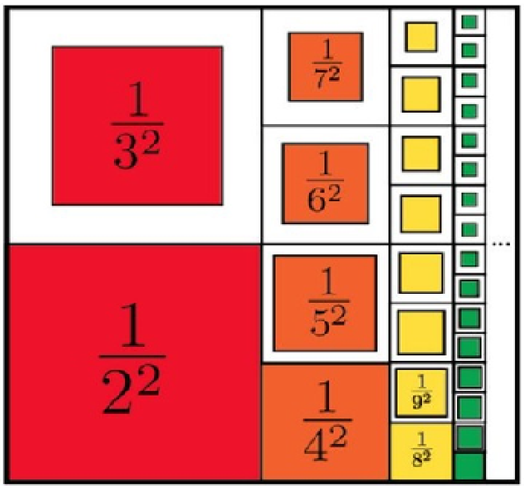
Las sucesivas particiones del cuadrado (círculo) llegan a cubrirlo en su totalidad

Análogamente



$$\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2^{i+1}}=1$$

A continuación una partición que no llega a cubrir toda la figura original y por tanto nos da una desigualdad

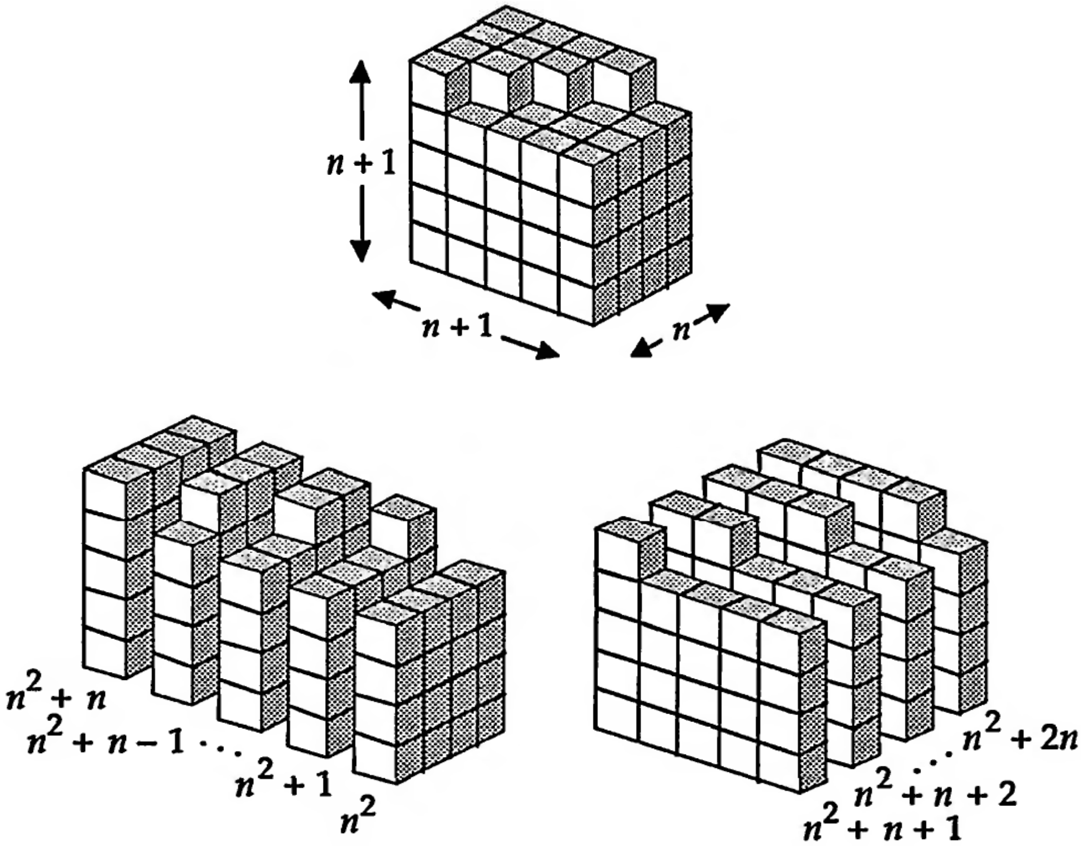


$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots<1$$

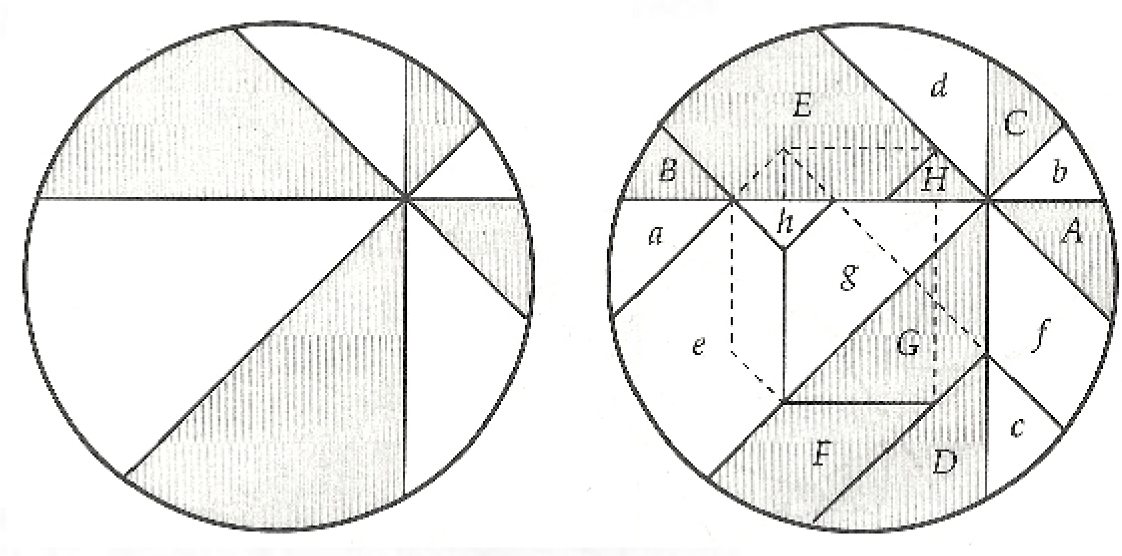
Y ahora una con sumas finitas

$$1^2 + 2 = 3$$
$$2^2 + 5 + 6 = 7 + 8$$
$$3^2 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$
$$4^2 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24$$
$$\dots$$
$$n^2 + (n^2 + 1) + (n^2 + 2) + \cdots + (n^2 + n) = (n^2 + n + 1) + \cdots + (n^2 + 2n)$$

Que se demuestra utilizando el método por doble conteo



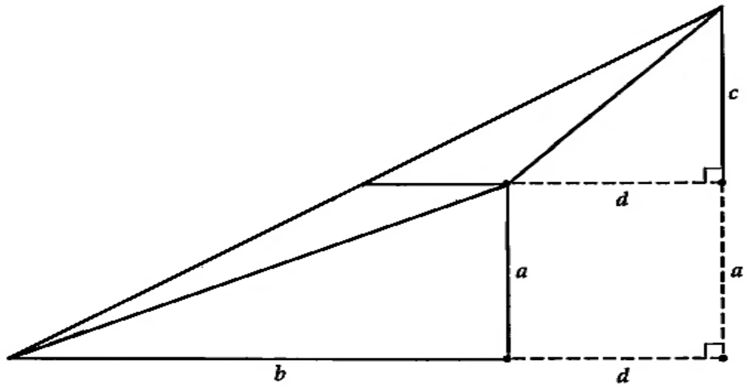
Teorema de la pizza: Si una pizza es dividida en ocho trozos, obtenidos mediante cuatro cortes que pasan por un punto común y forman un ángulo de 45º entre ellos, entonces la suma de las áreas de los trozos alternos son iguales (grises y blancos en la imagen.



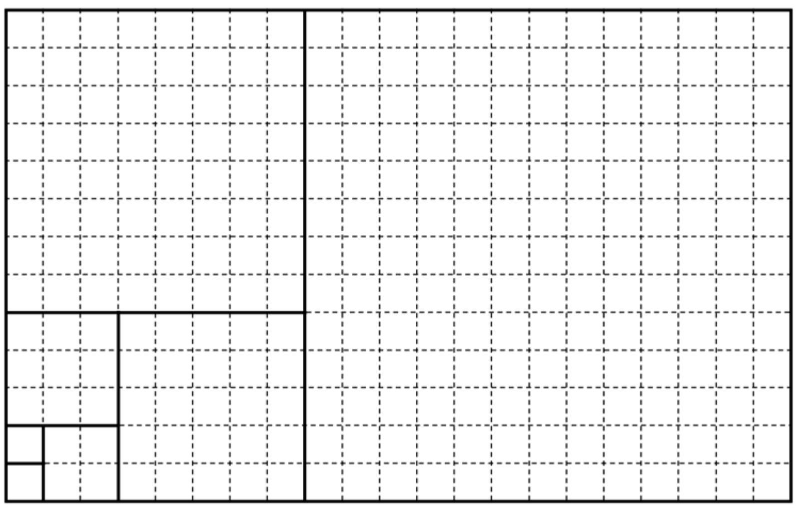
EL TEOREMA DE LA PIZZA.docx

HUMOR MATEMÁTICO: Calcular el volumen de un cilindro de radio de la base *z* y altura *a*.

Y por último interpretando las fracciones como pendientes angulares vemos la siguiente desigualdad: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

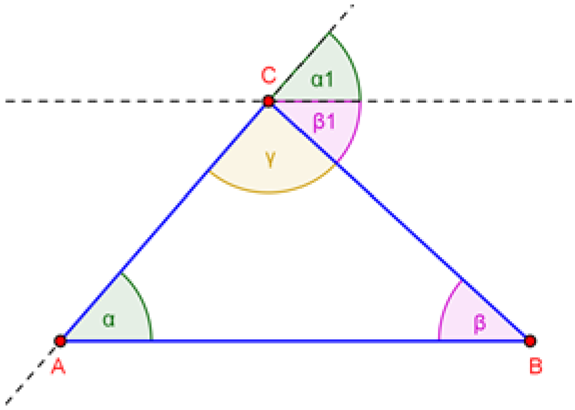


Y para acabar, las sucesiones de Fibonacci ($F_1 = 1, F_2 = 1;\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$) demostramos la fórmula siguiente: $F_1^{\ 2} + F_2^{\ 2} + F_3^{\ 2} + \ldots + F_n^{\ 2} = F_n \cdot F_{n+1}$, para $n \geq 3$

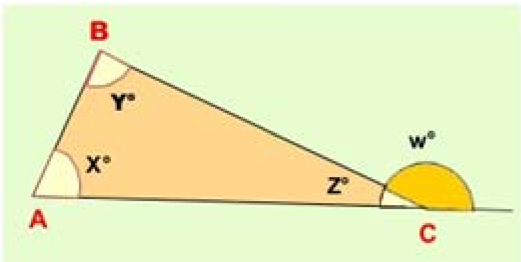


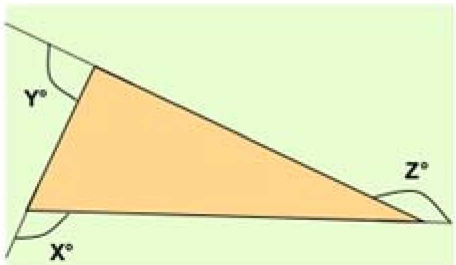
EJERCICIOS: En los siguientes se trata de averiguar a qué es igual lo que propone demostrar la gráfica correspondiente y **EXPRESARLO MATEMÁTICAMENTE**

1.



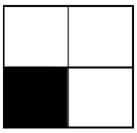
2.



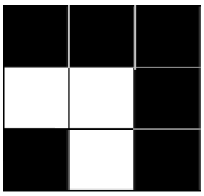


3.

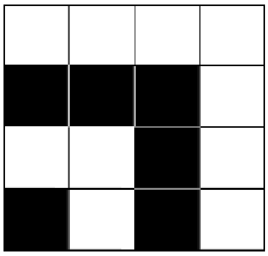
1



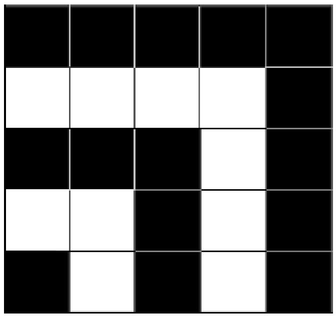
1 + 3



1+ 3 + 5

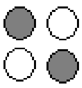


1 + 3 + 5 + 7

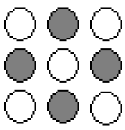


1 + 3 + 5 + 7 + 9

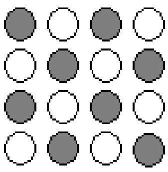
4.



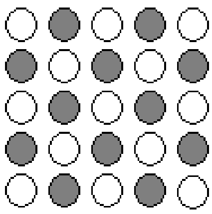
1+2+1



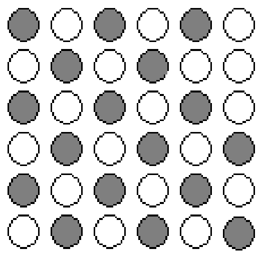
1+2+3+2+1



1+2+3+4+3+2+1

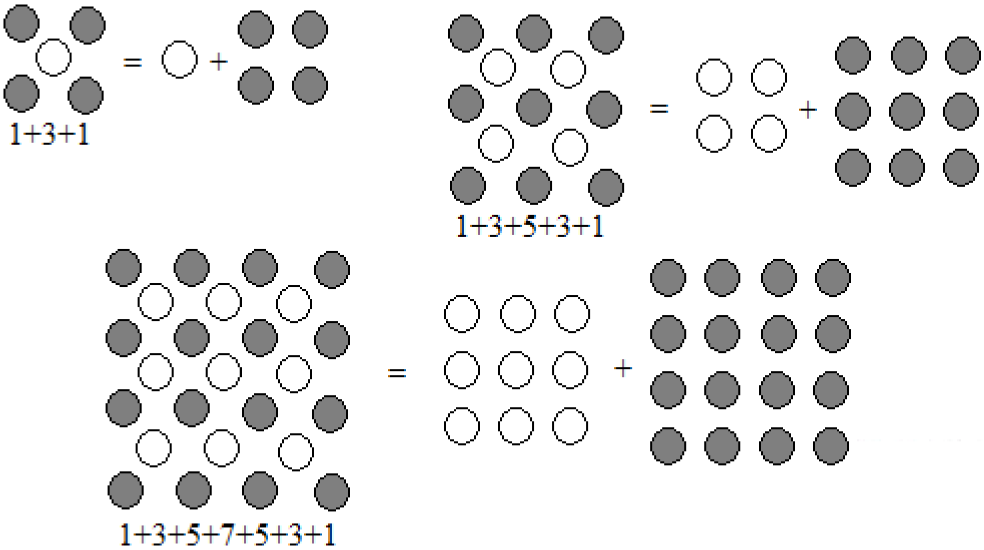


1+2+3+4+5+4+3+2+1

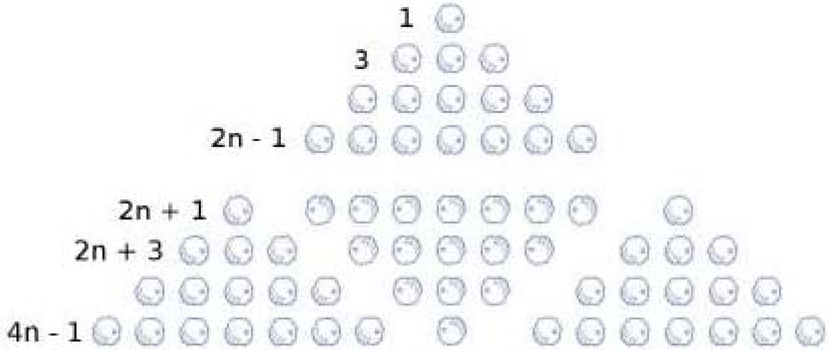


1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1

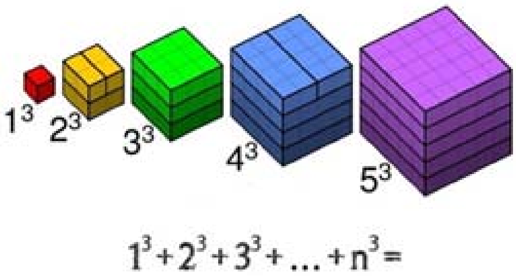
5.

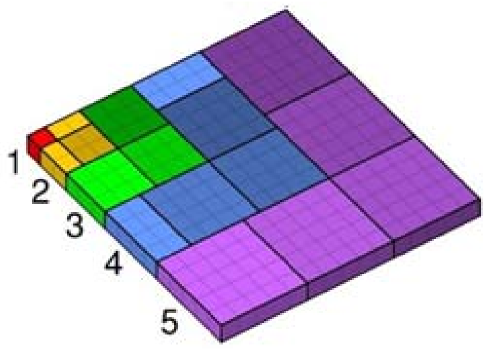


6.

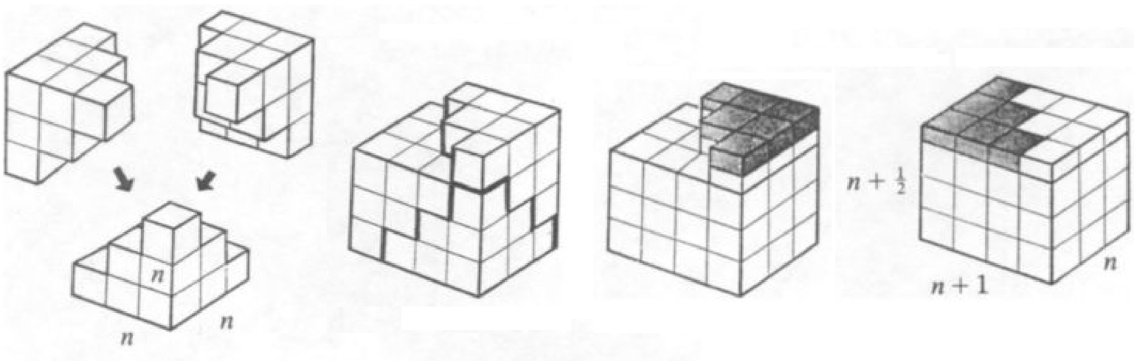


7. Teorema de Nicómaco

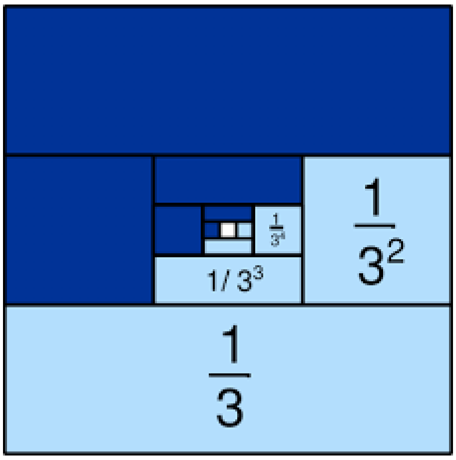




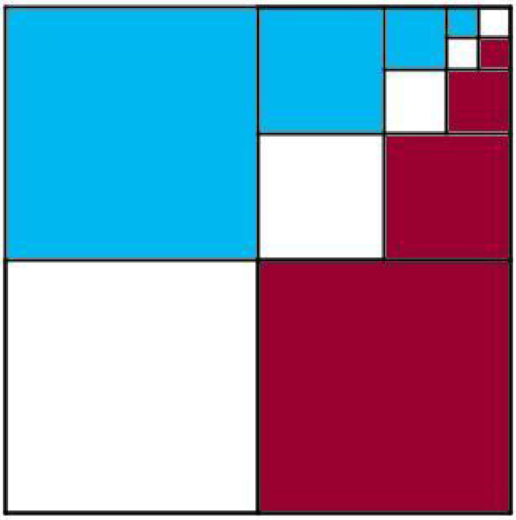
8.

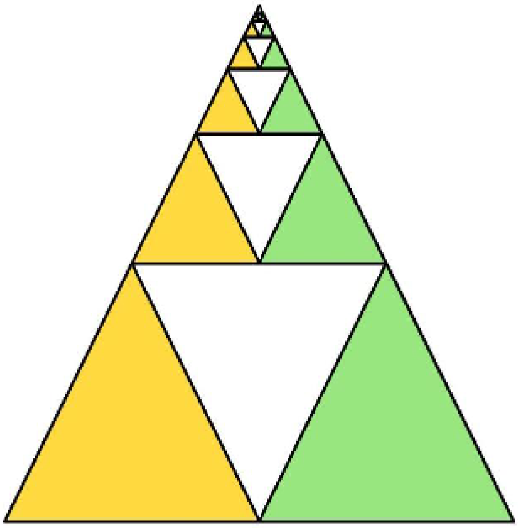


9.

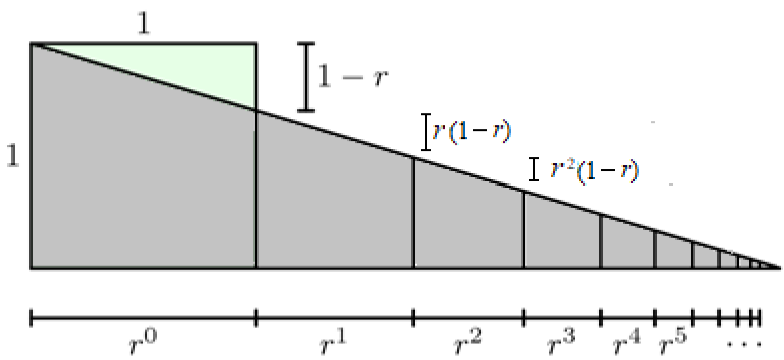


10.



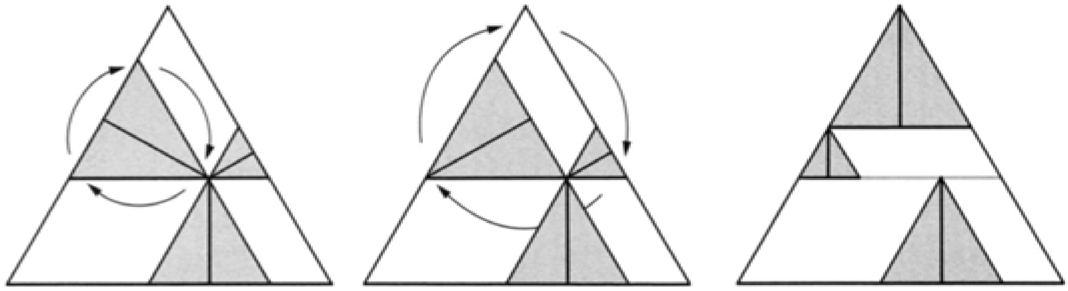


11.



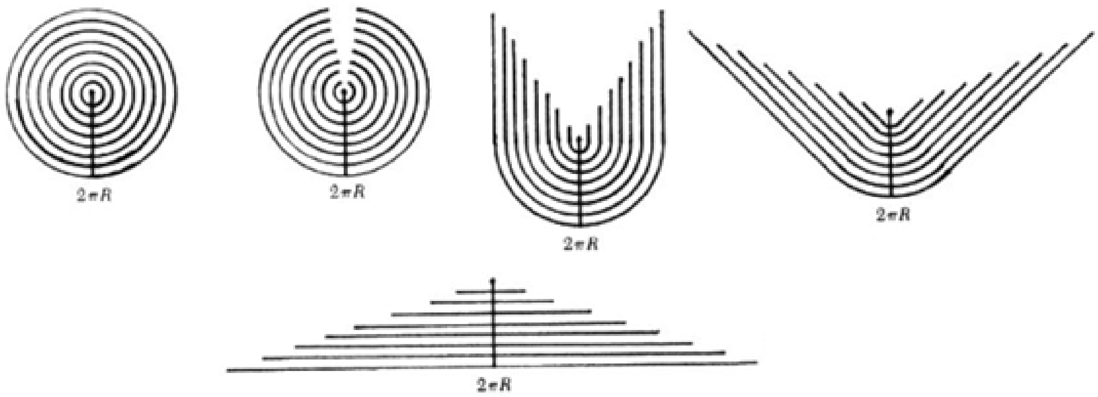
La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente es igual a:

12. Teorema de Viviani:



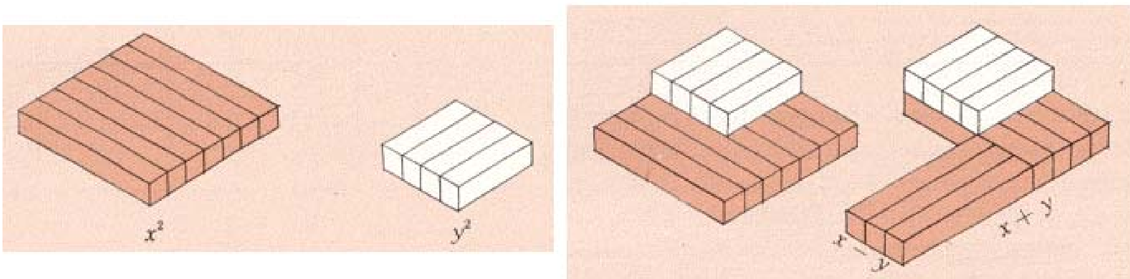
La suma de las distancias de un punto interior cualquiera de un triángulo equilátero a los tres lados de un triángulo equilátero es =
También se puede demostrar fácilmente por el método de doble conteo

13.

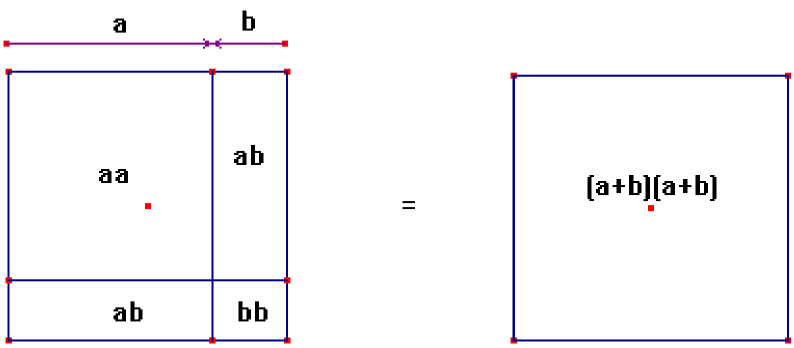


Área del círculo

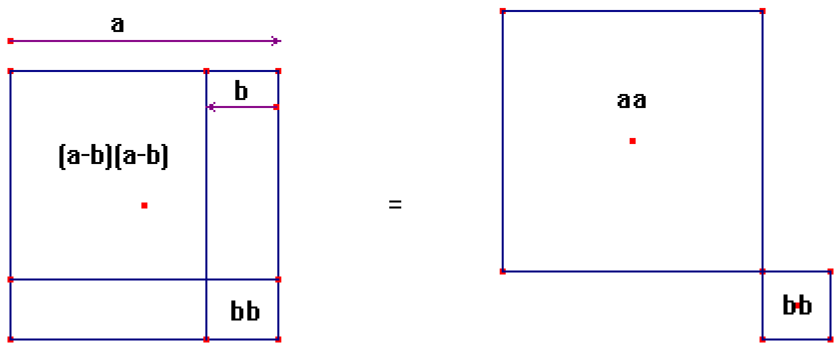
14.



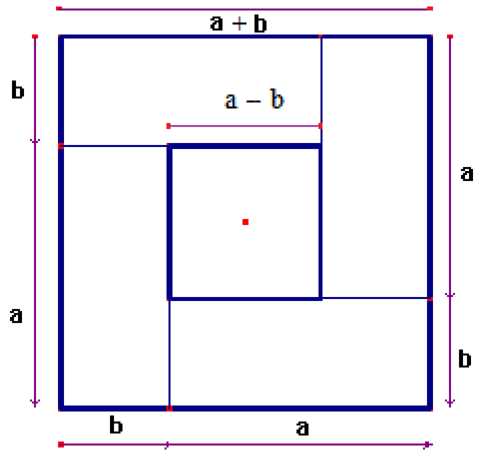
15.



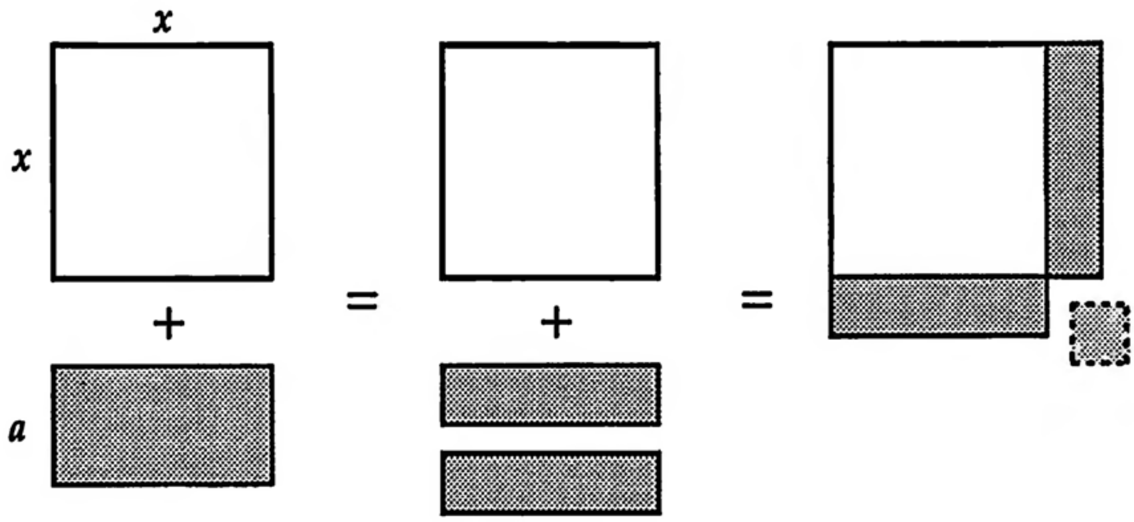
16.



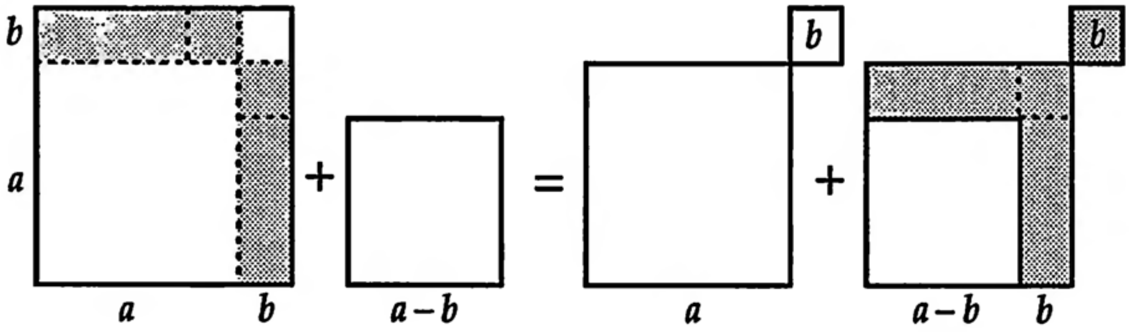
17.



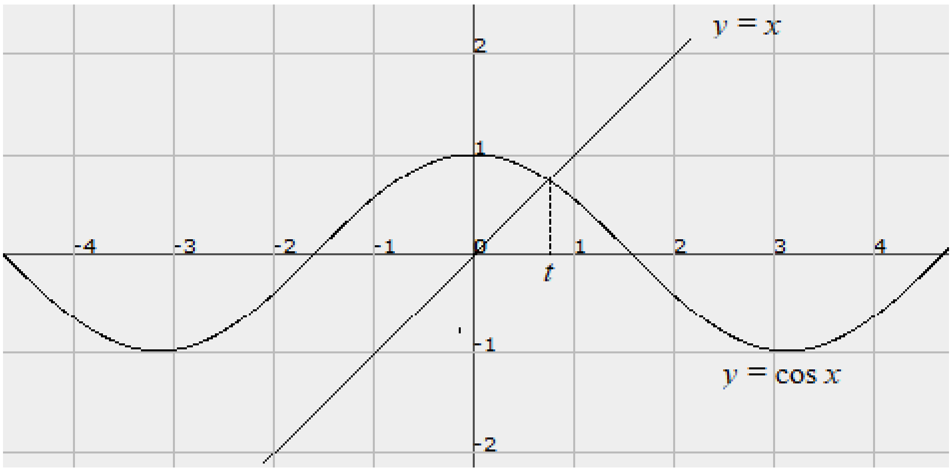
18.



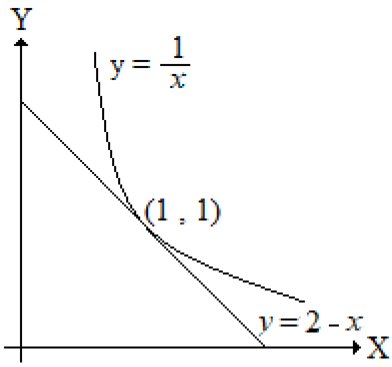
19.



20. Teorema de existencia



21.



SOLUCIONES:

1.

α + β + γ = 180º

2.

Wº = 180º - Zº = Xº + Yº;   Xº + Yº + Zº = 360º

3.

$1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$

4.

$1+2+3+\cdots+n+\cdots+3+2+1=n^2$

5.

$1+3+5+\cdots+(2n+1)+\cdots+5+3+1=n^2+(n+1)^2$

6.

$$1+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1)\ldots+(4n-1)=\frac{1}{4}[1+3+\cdots+(2n-1)]$$

7.

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+..+n)^2$

8.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}.n.\left(n+\frac{1}{2}\right).(n+1)$$

9.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}$$

10.

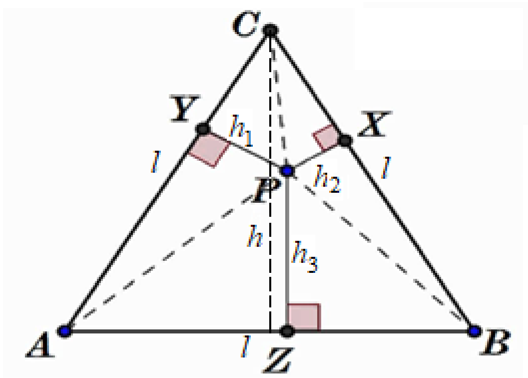
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{3}$$

11.

$$\sum_{n=0}^{\infty}r^n=\frac{1}{1-r}$$

12.

Altura del triángulo



El área del triángulo *ABC* es $\frac{l.h}{2}$ y es igual a la suma de las áreas de los tres triángulos *PCA*, *PCB* y *PAB* que son respectivamente $\frac{l.h_1}{2}$, $\frac{l.h_2}{2}$ y $\frac{l.h_3}{2}$ igualando y sacando factor común, se obtiene $h=h_1+h_2+h_3$

13.

Área circulo = Área triángulo = $\frac{base.altura}{2}$ = 2π*R*.$\frac{R}{2}$ =πR^2

14.
$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
15.
$(a-b)^2 + 2ab - b^2 = a^2$
16.
$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$
17.
$x^2 + ax = x^2 + 2\frac{a}{2}x = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$
18.
$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2$
19.
$x^2 - y^2 = (x+y).(x-y)$
20.
$\exists\ t \in (0\ ,\ 1)$ t.q. $\cos t = t$
21.
$\frac{1}{x} + x \geq 2$