RALLYE MATHÉMATIQUE SANS FRONTIÈRES

SOLUCIONES

PRUEBA

2005

1- ¡A vueltas con las edades!

Llamamos x a mi edad y organizamos los datos en una tabla:

	Actual	Dentro de 5 años
Mi edad	x	x+5
La edad de mi hermana	x+3	x+8
Productos	x· (x+3)	(x+5)·(x+8)

Aplicando la condición tenemos:

$$(x+5)\cdot(x+8) = x\cdot(x+3)+270$$

$$x^2+13x+40 = x^2+3x+270$$

$$10x = 230$$

$$x = 23$$

Las edades son 23 y 26 años

2 – Un profesor con gancho

<u>1ª Forma de resolución</u>

Buscamos un número x tal que 2800<x<2900

Aplicando la condición de que al dividir por 2, 3, 4, 5 y 6 da de resto uno se tiene que:

x-1 será múltiplo de 2, 3, 4, 5 y 6.

Buscamos el m.c.m (2,3,4,5,6) = 60

Por lo que x-1 será múltiplo de 60:   x-1=60· k con k natural

2799< 60 k < 2899 con k natural

Por tanto:

$$\frac{2799}{60} = 46{,}65 < k < \frac{2899}{60} \approx 48{,}32$$

Como k es natural la única opción es k=47

Por tanto, x-1=60·47= 2820

El número de alumnos será **2821** que podemos comprobar que es divisible por 7 que era la última condición.

2ª forma de resolución

Buscamos un número no divisible por 2 (luego impar), que sea múltiplo de 7 (al ser divisible por 7) y comprendido entre 2800 y 2900 (además de otras condiciones): 2807, 2821, 2835, 2849, 2863, 2877 y 2891.

Descartamos 2835 y 2877 por ser múltiplos de 3 (suma de cifras múltiplo de 3)

Quedan como posibles números: 2807, 2821, 2849, 2863 y 2891.

Comprobamos que los números 2807, 2849 y 2891 al dividirlos por 3 da de resto 2 y no 1.

Nos quedan como posibles números 2821 y 2863. Descartamos 2863 pues al dividirlo por 4 da de resto 3 y no 1.

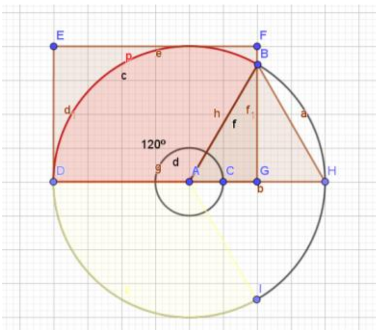
Comprobamos que el número que nos queda, 2821, cumple todas las condiciones (al dividirlo por 2, 3, 4, 5 y 6 dan de resto 1 y es múltiplo de 7)

Hay 2821 alumnos.

3 – El parabrisas

1ª Forma de resolución

Observamos que el triángulo rectángulo que se forma a la derecha tiene 40 cm de hipotenusa y 20 cm de cateto. Si trazamos su simétrico respecto a la vertical de su otro cateto, obtenemos un triángulo equilátero ya que todos los lados medirán 40 cm. Por tanto, el ángulo será de 60º y el ángulo que corresponde a la zona buscada será de 120º.



Esto indica que él área del parabrisas en un tercio del área total de la circunferencia (120=360/3).

Así, el área barrida por el parabrisas será:

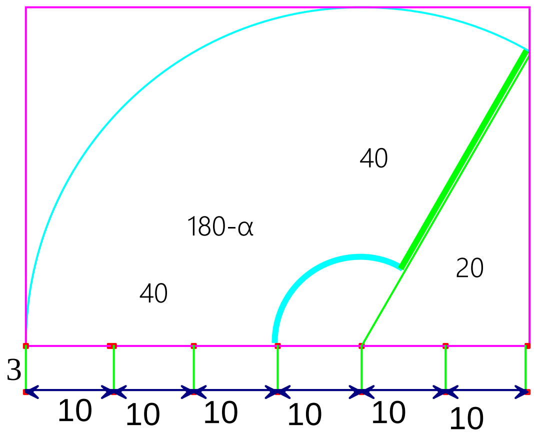
$$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 40^2 - \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 10^2 = \frac{\pi}{3}\cdot 1\,500 = 500\cdot\pi \approx 1570{,}71\ cm^2$$

2ª Forma de resolución:

$$\cos(\alpha) = \frac{20}{40}$$

$$\alpha = \arccos\frac{1}{2} = 60º$$

$$180 - \alpha = 120º$$



La porción de área que abarca el radio de 40 será de:

$$\frac{\pi \cdot 40^2}{2} \cdot \frac{120}{180}$$

Como el parabrisas no abarca la porción correspondiente al círculo pequeño hay que restar:

$$\frac{\pi \cdot 10^2}{2} \cdot \frac{120}{180}$$

La superficie barrida por el parabrisas será de:

$$\frac{\pi \cdot 40^2}{2} \cdot \frac{120}{180} - \frac{\pi \cdot 10^2}{2} \cdot \frac{120}{180} = \frac{\pi \cdot 120}{2 \cdot 180} (1600 - 100) = \frac{\pi \cdot 1500}{3} = 500 \cdot \pi \approx \mathbf{1\ 570,8} \quad \boldsymbol{cm^2}$$

4 – ¡A ver si dais en la diana!

Llamando x al área de la zona de 8 puntos, el área de 4 puntos será 2x y la de 2 puntos será 4x. El área del círculo mayor será:

$$4x + 2x + x = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Por tanto, $7x = \frac{\pi}{4}$ Luego $x = \frac{\pi}{28}$

Si llamamos r al radio del círculo pequeño (el de la zona de 8 puntos) se tiene que:

$$\frac{\pi}{28} = \pi \cdot r^2$$

Despejando: $r = \frac{1}{\sqrt{28}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}$

Por tanto, **el diámetro de la zona de 8 puntos será** $\boldsymbol{d} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{7}}} \approx \mathbf{0,378}\ \boldsymbol{m}$

Llamando R al radio del círculo intermedio, él área de la corona circular es:

$$2x = \frac{2 \cdot \pi}{28} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot R^2 - \frac{\pi}{28}$$

Despejando R: $R = \sqrt{\frac{3}{28}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ Luego **el diámetro del círculo que delimita la zona de 4 puntos será:** $\boldsymbol{D} = \sqrt{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}} \approx \mathbf{0,655}\ \boldsymbol{m}$

5 – Un año que cuenta: 2005

Nuestro número es:

$100\ldots\ldots\ldots\ {}^{(2005}\ 0 - 2005$

Restamos:

$$\begin{array}{r} 1000\ldots.00000 \\ -\quad 2005 \\ \hline 0999\ldots.97995 \end{array}$$

Obtenemos un número con 2003 nueves un 7 y un 5. Por tanto, **la suma de sus cifras** será: 7+5+2003·9=12+18027=**18 039**

6 – Extraña familia

La descomposición de 105 es: $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$

Siendo a y b las dimensiones de uno de esos rectángulos, debe cumplirse que $a \cdot b = 105$

Las posibles combinaciones, teniendo en cuenta la descomposición de 105 son:

$$1 \cdot 105,\ \ 3 \cdot 35,\ \ 5 \cdot 21,\ \ 7 \cdot 15$$

Por tanto, la familia de rectángulos **está formado por 4 miembros** cuyas dimensiones son:

$$\{1x105, 3x35, 5x21, 7x15\}$$

Sus perímetros respectivos son:212, 76, 52 y 44.

Por tanto, el rectángulo con **perímetro mayor** es el de dimensiones **1x105** y el rectángulo con el **perímetro más pequeño** es el de dimensiones **7x15**

7 – Robin des bois /Robin Hood

Llamamos x al número de familias.

Si distribuimos 10 412 entre x familias y nos quedan 17 monedas, podemos concluir que 10 412 -17 =10 395 es múltiplo de x

Por otro lado, si al distribuir 12 035 entre x familias nos quedan 23 monedas podemos deducir que 12 035 - 23 = 12012 es también múltiplo de x.

Por tanto, 10 395 y 12 012 son múltiplos de x luego x será un divisor común de ambos.

Descomponemos ambos números en producto de factores primos:

$$10\ 395 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$

$$12\ 012 = \ 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$$

$$div(10\ 395\ y\ 12\ 012) = \{3, 7, 11, 21, 33, 77, 231\}$$

Como sabemos que x>100 debe ser x=231

Hay 231 familias.

.

8- Y las bombas bombeaban

La cisterna, x, se llena con la primera bomba en una hora por lo que en un minuto se llenará $\frac{x}{60}$

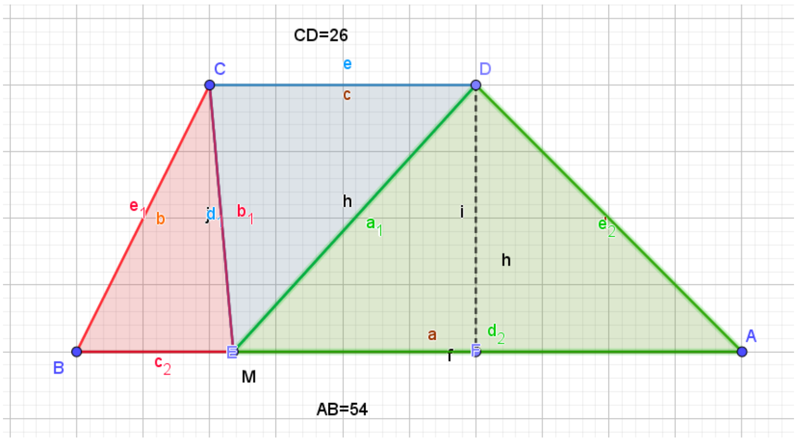
Con la segunda bomba, x se llena en 30 minutos, luego en un minuto se llenará:

$$\frac{x}{30}$$

Con las dos bombas, en un minuto, se llenará: $\frac{x}{60} + \frac{x}{30} = \frac{3x}{60} = \frac{x}{20}$

Podemos concluir que con las dos bombas **se necesitarán 20 minutos para llenar la cisterna** (x)

9– El reparto del pastel



La condición del problema indica que el área del trapecio MBCD debe ser la misma que la del triángulo AMD. A su vez el área del trapecio MBCD podemos obtenerla sumando las áreas de los triángulos MCD y MBC:

$$\frac{DC \cdot h}{2} + \frac{MB \cdot h}{2} = \frac{AM \cdot h}{2}$$

De donde: DC+MB =AM; 26+MB=AM (1ª ecuación)

Además, AM+MB=AB; AM+MB=54 (2ª ecuación)

Despejamos en la primera MB=AM-26 y lo sustituimos en la 2ª ecuación.

AM+AM-26=54

por lo que 2 AM=80 luego AM=40

La distancia de M a A es de 40 cm.

10. – Una fecha famosa

Llamamos x a la edad del animador del rally. Podemos admitir que su edad esté comprendida entre 10 y 100 años.

Así:

$$2005 - 100 < x^2 < 2005 - 10$$

$$1905 < x^2 < 1995$$

$$\sqrt{1905} \approx 43,65 < x^2 < \sqrt{1995} \approx 44,67$$

Como x debe ser un número natural, x=44

El año de nacimiento del animador del rally es $x^2 = \mathbf{1936}$

Tiene por tanto 69 años.

Especial Cuarto de ESO

9. – ¡Bravo por las chicas!

Llamamos:

x= número de chicas y= número de chicos

La suma de las notas de las chicas será $11{,}8 \cdot x$ (al ser la media $11{,}8 = \frac{suma\ de\ notas}{x}$)

La suma de las notas de los chicos será $10{,}4 \cdot y$

La media de todos será $\frac{11{,}8 \cdot x + 10{,}4 \cdot y}{28} = 11{,}25$

Además $x + y = 28$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{11{,}8 \cdot x + 10{,}4 \cdot y}{28} = 11{,}25 \\ x + y = 28 \end{cases}$$

Por sustitución: $315 = 11{,}8 \cdot x + 10{,}4 \cdot (28 - x)$

$$315 = 11{,}8x - 10{,}4x + 291{,}2$$

De donde x=17 luego **el número de chicas es 17**

10 – ¡Nadie es perfecto!

Calculamos los primeros cuadrados perfectos:

$0^2=0$	$1^2=1$	$2^2=4$	$3^2=9$	$4^2=16$	$5^2=25$	$6^2=36$	$7^2=49$
$8^2=64$	$9^2=81$	$10^2=100$	$11^2=121$	$12^2=144$	$13^2=169$	$14^2=196$	$15^2=225$
$16^2=256$	$17^2=289$	$18^2=324$	$19^2=361$	$20^2=400$	$21^2=441$	$22^2=484$	$23^2=529$ >500

En los primeros 500 números (desde 0 hasta 499) hay 23 números que son cuadrados perfectos. Por tanto, hasta 499 hay 500-23=477 números que no son cuadrados perfectos. Nos faltan 23 que los conseguimos desde 500 hasta 522 ya que sabemos que ninguno de ellos son cuadrados perfectos (el siguiente a 484 es 529)

El primer número de la serie que no es cuadrado perfecto es el 2 y el último de la serie es 522.