Preparación olímpica I

Rubén Blasco García

20 Octubre 2017

Problema 1. *Se tienen dos progresiones de números reales, una aritmética* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y otra geométrica* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no constante. Se cumple que* $a_1 = g_1 \neq 0$, $a_2 = g_2$ *y* $a_{10} = g_3$. *Decidir, razonadamente, si para cada entero positivo* p, *existe un entero positivo* m, *tal que* $g_p = a_m$. *(OME Fase Nacional 2016)*

Solución. Sean d y $r \neq 1$ la diferencia y la razón, respectivamente, de las progresiones aritmética $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y geométrica $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($r \neq 1$ ya que la progresión geométrica no puede ser constante por el enunciado).

En primer lugar, tenemos $g_1 r = g_2 = a_2 = a_1 + d = g_1 + d$, de donde obtenemos que $d = g_1(r-1)$.

En segundo lugar, $g_1 r^2 = g_3 = a_1 0 = g_1 + 9d = g_1 + 9g_1(r-1)$, luego $g_1(r^2 - 9r + 8) = 0$. Como la progresión geométrica no puede ser constante, $g_1 \neq 0$ y por tanto tenemos que $r^2 - 9r + 8 = 0$. Las soluciones son $r = 1$ y $r = 8$, como la progresión geométrica no puede ser constante podemos descartar la solución $r = 1$, y por tanto nos queda que $r = 8$. Entonces, sustituyendo en d, obtenemos $d = g_1(r-1) = 7g_1$.

Sea p un entero positivo cualquiera, queremos encontrar un entero positivo m tal que $g_p = a_m$. Es decir, $g_p = g_1 8^{p-1} = a_m = a_1 + (m-1)d = g_1 + 7g_1(m-1)$, luego $g_1(8^{p-1} - 7m + 6) = 0$ y como $g_1 \neq 0$, tenemos $8^{p-1} + 6 = 7m$. Como $8 \equiv 1 \mod 7$, tenemos que $8^q \equiv 1 \mod 7$ para todo q entero positivo, y por tanto $8^{p-1} + 6 \equiv 0 \mod 7$ para todo p entero positivo. Luego siempre podemos encontrar $m = \dfrac{8^{p-1} + 6}{7}$ entero positivo.

Problema 2. *Se dispone de una fila de* 102 *casillas, numeradas consecutivamente del* 0 *al* 101. *Inicialmente hay una ficha colocada en la casilla* 0. *Dos jugadores* A *y* B *juegan alternativamente, empezando* A, *de la siguiente manera: en su turno cada jugador puede o bien hacer avanzar la ficha* 7 *casillas o bien hacer retroceder la ficha* 1 *casilla, sin que en ningún caso se sobrepasen las casillas* 0 *ni* 101. *Gana el juego aquel que coloque la ficha en la casilla* 101. *¿Quién de ellos dispone de una estrategia ganadora y cómo debería jugar para asegurarse ganar? (Adaptado de un problema de la Fase Nacional OME 2017)*

Solución. Vamos a probar que el jugador A tiene estrategia ganadora. Comienza la partida de la única forma posible, llevando la ficha hasta la casilla 7, a partir de ahí durante 15 turnos dobles BA, el jugador A hará lo contrario de B. De este modo, la ficha queda en la casilla $7 + 15 * 6 = 97$. Los siguientes movimientos son forzados, 3 turnos, BAB, en los que hay que retroceder 1 casilla. De este modo, la ficha acaba en la casilla 94 y le toca jugar a A, que hace avanzar 7 la ficha, alcanzando la casilla 101.

Problema 3. *Probar que hay infinitos primos cuyo resto al dividirlos por 3 es 2. (OME Fase Local 2017)*

Solución. Evidentemente, hay al menos un primo porque 2 es un ejemplo. Supongamos que solo hubiera un número finito de ellos $p_1, ..., p_k$, y sea n el producto de todos ellos. El producto de dos de ellos deja resto 1 al dividirlos por 3 ($a \equiv 2 \mod 3, b \equiv 2 \mod 3$ entonces $ab \equiv 2 * 2 = 4 \equiv 1 \mod 3$), luego dependiendo de si k es par o impar, el resto de dividir n entre 3 será 1 ó 2 respectivamente.

Si n deja resto 1 al dividirlo por 3, entonces $n+1$ deja resto 2 y no es divisible por ninguno de los primos $p_1, ..., p_k$. Pero si $n+1$ no es divisible por ningún primo que deje resto 2 y como $n+1$ no es múltiplo de 3, tiene que ser producto de primos que dejas resto 1, pero entonces el resto de $n+1$ al dividirlo entre 3 debería ser 1, llegando a contradicción.

Supongamos ahora que $n \equiv 2 \mod 3$, realizamos la misma argumentación pero con $n+3$ en lugar de con $n+1$ y llegamos a contradicción.

Por lo tanto, hay infinitos primos cuyo resto al dividirlos por 3 es 2.

Problema 4. *Sea $n > 2$ un entero positivo. Tenemos $2n$ bolas, en cada una de las cuales hay escrito un entero. Se cumple que siempre que formamos n parejas con dos bolas, dos de estas parejas tienen la misma suma.*

1. *Demuestra que hay 4 bolas con el mismo número.*

2. *Demuestra que el número de valores distintos que hay en las bolas es como mucho $n-1$.*

(OME Fase Local 2015)

Solución.

1. Sean los valores de las bolas en orden creciente $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{2n}$. Formemos la pareja k-ésima emparejando la bola a_{2k-1} y la a_{2k} para $k = 1, ..., n$, con lo que sus sumas son:

$$s_1 = a_1 + a_2 \geq s_2 = a_3 + a_4 \geq ... \geq s_n = a_{2n-1} + a_{2n}.$$

   Al estar las sumas en orden no creciente, si dos de ellas son iguales tiene que ser dos consecutivas, es decir ha de ser: $a_{2k-1} + a_{2k} = a_{2k+1} + a_{2k+2}$, con $a_{2k-1} \geq a_{2k} \geq a_{2k+1} \geq a_{2k+2}$, luego obviamente estos cuatro enteros han de ser iguales.

2. Supongamos que hay al menos n valores distintos, que podemos ordenar en orden decreciente $b_1 > b_2 > ... > b_n$. Ordenamos los valores de las restantes n bolas en orden no creciente $c_1 \geq c_2 \geq ... \geq c_n$. Haciendo las parejas (b_i, c_i) para $i = 1, ..., n$, es claro que las parejas i-ésima e $i+1$-ésima tienen suma $b_i + c_i > b_{i+1} + c_{i+1}$, con lo que las parejas están ordenadas con valores de suma estrictamente decrecientes, y no puede haber dos con la misma suma, por lo que llegamos a contradicción. Luego hay a lo sumo $n-1$ valores distintos.

Problema 5. *Determina el número de valores distintos de la expresión*

$$\frac{n^2-2}{n^2-n-2}$$

donde $n \in \{1, 2, ..., 100\}$. *(OME Fase Nacional 2017)*

Solución. Sumando y restando $2-n$ al numerador se obtiene:

$$a_n = \frac{n^2-2}{n^2-n+2} = \frac{n^2-n+2+n-4}{n^2-n+2} = 1 + \frac{n-4}{n^2-n+2}.$$

Ahora vamos a ver si hay dos términos iguales, es decir, cuando $a_p = a_q$ para $p \neq q$. Esto es equivalente que encontrar los enteros $p \neq q$ tal que:

$$\frac{p-4}{p^2-p+2} = \frac{q-4}{q^2-q+2} \iff (p-q)(pq-4p-4q+2) = 0$$

Por tanto $(pq-4p-4q+2) = 0$, o lo que es lo mismo $pq-4p-4q+2+14 = 14$, luego $(p-4)(q-4) = 14$. Por tanto, $(p-4) \mid 14$ y de ahí deducimos que $p-4 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$. Los valores negativos no son posibles porque $p, q > 0$. Por tanto, $p-4 \in \{1, 2, 7, 14\}$. Como $(p-4)(q-4) = 14$, entonces $q-4 \in \{14, 7, 2, 1\}$, de donde obtenemos los pares $(p, q) = (5, 18)$, $(p, q) = (6, 11)$ para los que $a_5 = \frac{22}{23} = a_{18}$, $a_6 = \frac{17}{16} = a_{11}$. Finalmente, dado que todos los a_n son números racionales, entonces entre los 100 primeros términos de la sucesión hay 98 distintos.

Problema 6. *Sean* $m \geq 1$ *un entero positivo,* a, b *enteros positivos distintos mayores estrictamente que* m^2 *y menores estrictamente que* m^2+m. *Hallar todos los enteros* d *que dividen al producto* ab *y cumplen* $m^2 < d < m^2+m$. *(OME Fase Nacional 2016)*

Solución. Sea d un entero positivo que divida a ab y tal que $d \in (m^2, m^2+m)$. Entonces d divide a $(a-d)(b-d) = ab - ad - bd + d^2$. Como $|a-d| < m$ y $|b-d| < m$, deducimos que $|(a-d)(b-d)| < m^2 < d$, pero es divisible por d, luego $(a-d)(b-d) = 0$. Por tanto, los únicos enteros d que satisfacen el enunciado son $d = a$ y $d = b$.

Problema 7. *Encontrar todas las soluciones enteras positivas de*

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b+c-2} = 1$$

(OME Fase Local 2017)

Solución. Si $a, b, c \geq 2$ entonces la expresión es obviamente ≤ 1 y la igualdad solo se obtiene si $a = b = c = 2$. Así que suponemos ahora que uno de ellos es igual a 1, sin pérdida de generalidad podemos suponer $a = 1$. Si $b, c \geq 3$, se llega nuevamente a una expresión menor que 1, así que solo hay que analizar los casos $b = 1, b = 2$, que no dan más soluciones. (Si, $a = b = 1$, si $c \geq 6$, la expresión es ≤ 1, si $c \leq 5$, la expresión es ≥ 1. Si $a = 1, b = 2$, si $c \geq 5$ la expresión es ≤ 1 y si $c \leq 4$ es ≥ 1). Luego la única solución es $a = b = c = 2$.