SOLUCIONES: Tomadas de la página http://www.unizar.es/ttm/olimpiada/index.html

Problema 1

Solución:
Sea f una función que cumple las condiciones del enunciado.
Sea $f(1) = a$. Reiterando obtenemos $f(a)=3, f(3)=a+2,\ldots, f(n)=n+a-1$ si n es impar.
Sea $f(2) = b$. De igual manera, $f(b)=4, f(n)=n+b-2$ si n es par.
De hecho, las condiciones $f(a)=3, f(b)=4, f(n)=n+a-1$ si n es impar, $f(n)=n+b-2$ si n es par, son necesarias y suficientes para que se cumpla la condición dada en el enunciado.
Para proseguir, debemos distinguir si a y b son pares o impares.
Si a es impar, $3=f(a)=2a-1$. Luego $a = 2$, hecho contradictorio.
Si b es par, $4=f(b)=2b-2$. Lugo $b = 3$, hecho contradictorio.
Así, a es par y b impar. Se tiene $3=f(a)=a+b-2,\quad 4=f(b)=a+b-1$. En ambos casos, obtenemos $a + b = 5$.
Nuevamente las cinco condiciones $f(n)=n+a-1$ si n es impar, $f(n)=n+b-2$ si n es par, a es par, b es impar, $a + b = 5$ son necesarias y suficientes para que f cumpla la condición dada.
Las únicas posibilidades son, o bien $a = 2$, $b = 3$; $a = 4$, $b = 1$. en un caso obtenemos

$$f(n)=n+1 \text{ para todo } n\in N$$

En el otro,

$$f(n)=\begin{cases} n+3 & \text{si } n \text{ es impar;} \\ n-1 & \text{si } n \text{ es par.}\end{cases}$$

Problema 2.

Solución.
Sean A, B, C los vértices del triángulo. Denotamos, respectivamente, x, y, z las distancias de los vértices al origen de coordenadas; y, también respectivamente, a, b, c las longitudes de los lados opuestos a los vértices.

Basta probar que uno de los ángulos es agudo. Probaremos que $\cos\hat{A}>0$. Por el teorema del coseno $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$. Luego debemos demostrar que $a^2<b^2+c^2$.
Gracias al teorema de Pitágoras, se tiene que $a^2=y^2+z^2, b^2=x^2+z^2, c^2=x^2+y^2$.
Por tanto

$$b^2+c^2=2x^2+y^2+z^2>y^2+z^2=a^2.$$

Problema 3.

Solución.
Hay que rellenar 3 apuestas:
En 14 partidos, hay un resultado (1, X o 2) que se repite al menos 5 veces (en caso contrario, el número de partidos sería menor o igual qie $4\cdot 3 = 12$, pero $14 > 12$). Hacemos las tres apuestas que siguen: todo 1, todo X, todo 2. En una de ellas tenemos al menos 5 aciertos.
Por otra parte, si hacemos 2 apuestas, es posible que no obtengamos ningún acierto. Para cada partido hacemos uno o dos pronósticos distintos y puede suceder el tercero.

Problema 4.
Solución.
Si x, y tienen signos opuestos, se tiene $|x-y|=|x|+|y|, |1-xy|=1-xy=1+|xy|$.
Así pues, la desigualdad es, realmente, una igualdad.
Si la desigualdad se cumple para un par de números (x, y), se cumple para el par opuesto ($-x$,$-y$). Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x, y \geq 0$.
Si la desigualdad se cumple para un par de números (x, y), se cumple para el par simétrico (y, x). Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $0 \leq y \leq x$.
En este caso, $x-y \geq 0, 1-xy > 0, x \geq 0, y \geq 0, xy \geq 0,$ y la desigualdad que debemos probar queda

$$(x-y)(1+xy) \leq (x+y)(1-xy).$$

Si expandimos los términos, esta desigualdad es la misma que

$$x-y+x^2y-xy^2 \leq x+y-x^2y-xy^2$$

Si simplificamos, obtenemos la desigualdad equivalente $2x^2y \leq 2y$
que, puesto que $x^2 \leq 1, y \geq 0$, es cierta.

Problema 5.
Solución.
Q es la derivada de P. Por tanto,

$$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c), Q(x)=(x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-b)(x-c)$$

Sea $d=\frac{a+b}{2}$, punto medio del segmento que une a con b. Se tiene que $a-d=d-b=\frac{a-b}{2}$.
El valor de Q en d es

$$Q(d)=\frac{b-a}{2}\frac{a-b}{2}+\frac{b-a}{2}(d-c)+\frac{a-b}{2}(d-c)=-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

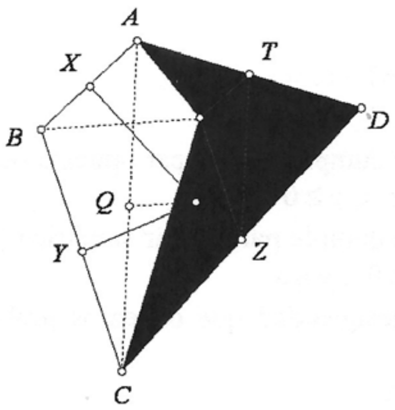
Sea $e=\frac{b+c}{2}$. Si cambiamos los papeles de a, b por los de b, c la igualdad anterior se transforma en

$$Q(e)=-\left(\frac{c-b}{2}\right)^2.$$

Por tanto d y e son raíces de Q si y sólo si $-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=-\left(\frac{c-b}{2}\right)^2=0$: o sea, si y sólo si $a=b=c$.
Ha de ser $P(x)=(x-a)^3, Q(x)=3(x-a)^2$ para un cierto parámetro a.

Problema 6.

Solución:
Bastará probar que el área de cada cuadrilátero es la cuarta parte del área total.
La quebrada APC divide al cuadrilátero en dos partes de igual área pues AP es la mediana de ABD y PC lo es de CBD.
La quebrada TPZ divide al cuadrilátero $APCD$ (sombreado) en dos partes de igual área pues PT es mediana de APD y PZ es mediana de CPD.



Tenemos ya probado que el área del cuadrilátero *TPZD* es la cuarta parte del área del cuadrilátero inicial.
Finalmente *TZ* es paralela a *OP* por serlo ambas a *AC*; luego los triángulos *TPZ* y *TOZ* tienen la misma área y lo mismo les ocurre a los cuadriláteros *TPZD* y *TOZD*.
Del mismo modo se probaría para los otros tres cuadriláteros.

Problema 7

Solución: δ_n divide a a_{n+1} y a a_n , y por tanto a su diferencia $b_n = a_{n+1} - a_n = 3n^2 + 3n + 1$.
También divide a $c_n = 3a_n - nb_n = 3 - n - 3n^2$ y a la suma $d_n = b_n + c_n = 4 + 2n$. Pero entonces δ_n también divide a $e_n = 2b_n - 3nd_n = 2 - 6n$. Finalmente, divide a $3d_n + e_n = 14$.
Pero $b_n = 3n^2 + 3n + 1 = 3n(n+1) + 1$ es un número impar, luego δ_n solamente puede ser 1 o 7.
El máximo es 7 ya que mcd $(5^3 + 1, 6^3 + 1) = 7$.

Problema 8.

Solución:
Usando la hipótesis $ab = cd$ se escribe

$$a(a+b+c+d) = (a+c)(a+d)$$

de donde se obtiene que si $a + b + c + d$ fuese primo debería dividir a $a + c$ o $a + d$ que son menores que él.