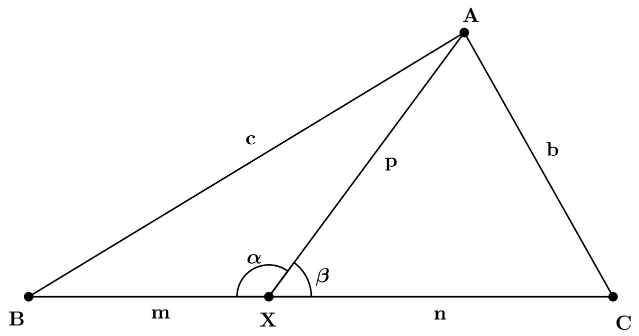
Preparación Olímpica III: Geometría

Glenier Lázaro Bello Burguet
24 de noviembre de 2017

Problema 1. (Teorema de Stewart) Sea AX una ceviana del triángulo ABC de longitud p. Sean m y n las longitudes de los segmentos BX y XC, respectivamente. Probar que

$$a(p^2 + mn) = b^2 m + c^2 n.$$

Solución.



Pongamos $\alpha := \angle AXB$ y $\beta := \angle CXA$. Como son ángulos suplementarios, tenemos que $\cos\alpha = -\cos\beta$. Usando el Teorema del coseno en el triángulo $\triangle AXB$ tenemos que

$$c^2 = m^2 + p^2 - 2mp\cos\alpha,$$

y usando el Teorema del coseno en el triángulo $\triangle AXC$ tenemos que

$$b^2 = n^2 + p^2 - 2np\cos\beta = n^2 + p^2 + 2np\cos\alpha.$$

Despejando $\cos\alpha$ de las dos ecuaciones anteriores obtenemos

$$\frac{m^2 + p^2 - c^2}{2mp} = \frac{b^2 - n^2 - p^2}{2np}.$$

Simplificando esta ecuación y usando que $m + n = a$ se deduce el enunciado.

Problema 2. Sea ABC un triángulo y AA' una mediana. Halla la longitud de AA' en términos de a, b, c.

Solución. Basta usar el Teorema de Stewart con $m = n = a/2$. Simplificando, al final obtenemos

$$AA' = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Problema 3. Sea ABC un triángulo y AL una bisectriz. Probar que

$$AL^2 = bc\left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right].$$

Solución. Por el teorema de la bisectriz tenemos

$$\frac{BL}{c} = \frac{LC}{b} = k,$$

donde k es una constante. Es decir, $BL = kc$ y $LC = kb$. Como

$$a = BL + LC = k(b + c)$$

deducimos que $k = a/(b + c)$. Por tanto,

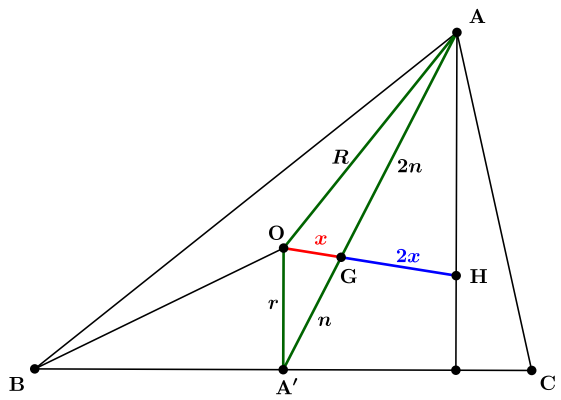
$$BL = \frac{ac}{b + c}, \quad LC = \frac{ab}{b + c}.$$

Usando ahora el Teorema de Stewart y simplificando se deduce el enunciado.

Problema 4. Sean O y H el circuncentro y el ortocentro de un triángulo ABC, respectivamente. Sea R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Probar que

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Solución.



Usando el Teorema de Pitágoras en el triángulo OBA' tenemos que

$$r^2 = OA'^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Ponemos $n := GA'$. Entonces $AG = 2n$ y $AA' = 3n$. En el problema 2 ya vimos que

$$3n = AA' = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Aplicando el Teorema de Stewart a $\triangle OAA'$ obtenemos

$$\begin{aligned} 3n(OG^2 + 2n^2) &= OA'^2 \cdot 2n + OA^2 \cdot n = n(2r^2 + R^2) \\ &= n\left(2R^2 - \frac{a^2}{2} + R^2\right) = n\left(3R^2 - \frac{a^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Luego

$$3OG^2 = 3R^2 - \frac{a^2}{2} - 6n^2$$

y por tanto

$$OH^2 = (3OG)^2 = 9R^2 - \frac{3a}{2} - 18n^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2,$$

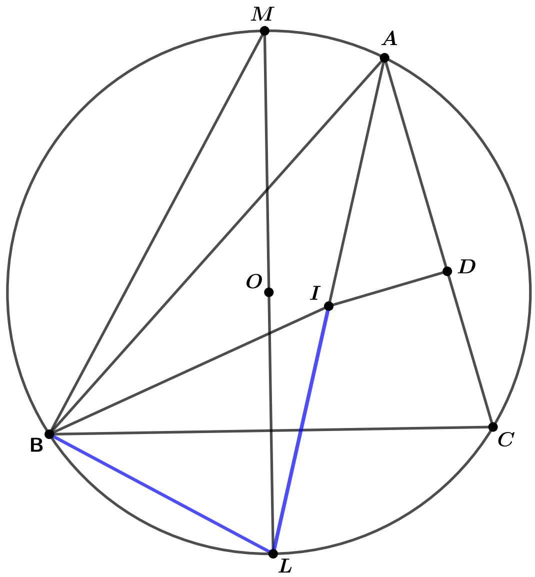
como queríamos demostrar.

Problema 5. (Fórmula de Euler) Sean O e I el circuncentro y el incentro de un triángulo ABC, respectivamente. Sean R y r los radios de la circunferencia circunscrita y la circunferencia inscrita al triángulo ABS, respectivamente. Probar que

$$OI^2 = R(R - 2r).$$

(Notar que, en particular, $R \geq 2r$.)

Solución.



Sea L el punto medio del arco $\widehat{BC}$ que no contiene a A y sea M el punto diametralmente opuesto a L. Sea D el pie de la perpendicular a AC por I. Es fácil comprobar que los triángulos $\triangle ADI$ y $\triangle MBL$ son semejantes. Por tanto,

$$\frac{ID}{BL} = \frac{AI}{ML}.$$

Luego $ID \cdot ML = AI \cdot BL$. Notar que $ID = r$ y $ML = 2r$. Entonces tenemos que $2Rr = AI \cdot BL$.

Por otro lado, es fácil comprobar que $\angle BIL = \angle IBL$, luego $BL = IL$. Por tanto, usando la potencia del punto I respecto a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC tenemos que

$$2Rr = AI \cdot BL = AI \cdot IL = R^2 - OI^2.$$

De esta ecuación deducimos inmediatamente el enunciado.

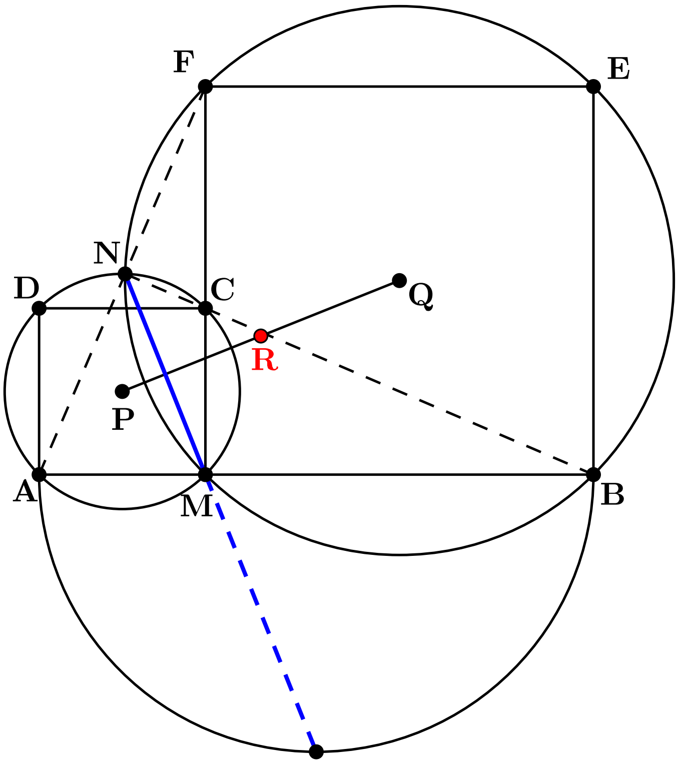
Problema 6. Sea AB un segmento fijo y sea M un punto en él. Al mismo lado de AB construimos los cuadrados $AMCD$ y $BMFE$. Las circunferencias circunscritas a los dos cuadrados, cuyos centros son P y Q, se intersecan en M y en otro punto N.

(a) Probar que las rectas FA y BC se cortan en N.

(b) Probar que todas las rectas MN pasan por un mismo punto S, independientemente de la elección de M.

(c) Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de todos los segmentos PQ, cuando M recorre el segmento AB.

Solución.



(a) Basta comprobar que $AF \perp BC$, ya que entonces para el punto de intersección X tenemos $\angle AXC = \angle BXF = 90°$, lo cual implica que X pertenece a las circunferencias circunscritas a ambos cuadrados y entonces $X = N$. La relación $AF \perp BC$ se cumple ya que $MA = MC$, $MF = MB$ y $\angle AMC = \angle FMB$, luego $\triangle AMF$ se obtiene rotando $\triangle BMC$ 90° alrededor de M.

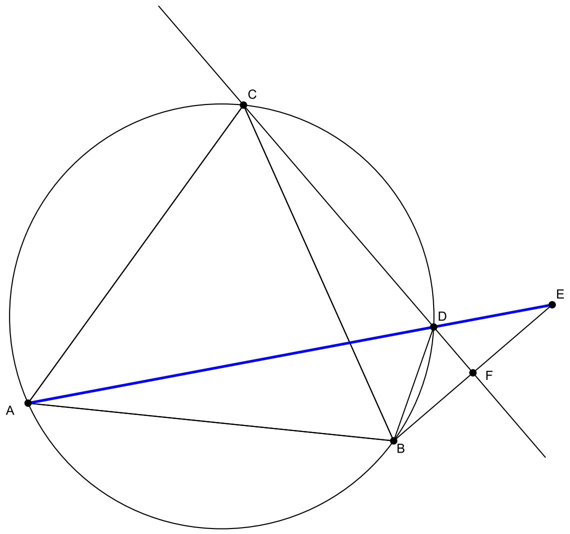
(b) Como N está en la circunferencia circunscrita de $BMFE$, deducimos que $\angle ANM = \angle MNB = 45°$. Por tanto MN es la bisectriz del ángulo $\angle ANB$. Luego MN pasa por el punto medio del arco $\widehat{AB}$ de la circunferencia de diámetro AB (i.e., la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABN$) que no contiene a N.

(c) Introducimos un sistema de coordenadas tales que $A = (0,0), B = (b,0)$ y $M = (m,0)$. En general ponemos $W = (x_W, y_W)$ para un punto arbitrario W y denotamos por R el punto medio de PQ. Tenemos que $y_R = (y_P + y_Q)/2 = (m+b-m)/4 = b/4$ y $x_R = (x_P + x_Q)/2 = (m+m+b)/4 = (2m+b)/4$, donde el parámetro m varía de 0 a b. Luego el lugar geométrico de los puntos R es el segmento cerrado R_1R_2 donde $R_1 = (b/4, b/4)$ y $R_2 = (3b/4, b/4)$.

EXTRA

Problema 7. Un triángulo equilátero ABC está inscrito en una circunferencia Γ. El punto D está en el arco BC que no contiene a A. El punto E es el simétrico a B con respecto a CD. Probar que A, D, E son colineales.

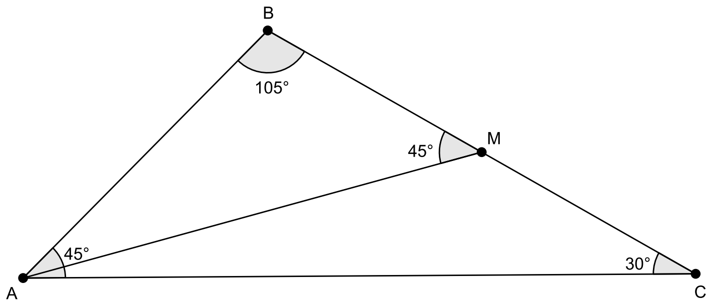
Solución.



Tenemos que $\angle ADC = \angle ABC = 60^o$ y $\angle ADB = \angle ACB = 60^o$. Luego $\angle BDF = 180^o - \angle BDC = 60^o$. Como E es el punto simétrico de B respecto a la recta CD, si llamamos F al punto de intersección de CD con BE, entonces $\angle EDF = \angle BDF = 60^o$. Luego $\angle EDF = \angle ADC$, lo que significa que los puntos A, D, E están alineados.

Problema 8. Se considera el triángulo ABC con $\angle BAC = 45^o$ y $\angle ACB = 30^o$. Si M es el punto medio del lado BC, se pide demostrar que $\angle AMB = 45^o$ y que $BC \cdot AC = 2 \cdot AM \cdot AB$.

Solución.



Para demostrar que $\angle AMB = 45^o$, bastará probar que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle MBA$ son semejantes. Como tienen un ángulo común, bastará probar la proporcionalidad de los lados correspondientes, es decir

$$\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{AB}.$$

Usando el Teorema del seno en el triángulo $\triangle ABC$ obtenemos

$$\frac{AB}{BM} = \frac{AB}{\frac{BC}{2}} = 2\frac{\operatorname{sen} 30}{\operatorname{sen} 45} = \sqrt{2}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\operatorname{sen} 45}{\operatorname{sen} 30} = \sqrt{2}.$$

Luego

$$\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{AB} = \sqrt{2}.$$

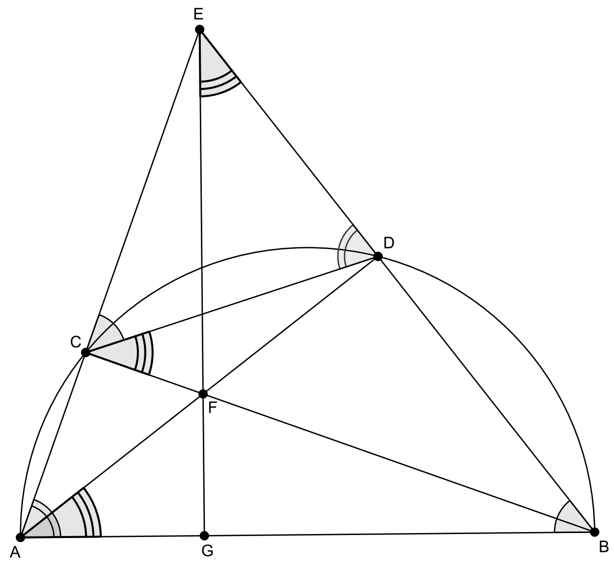
Veamos finalmente que $BC \cdot AC = 2 \cdot AM \cdot AB$, o bien

$$(*) \qquad \frac{BC}{AB}\frac{AC}{AM} = 2.$$

Ya hemos visto que $\frac{BC}{AB} = \sqrt{2}$. Además, como la razón de proporcionalidad de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle MBA$ es $\sqrt{2}$ deducimos que $\frac{AC}{AM} = \sqrt{2}$. Ahora $(*)$ es inmediato.

Problema 9. Dada una semicircunferencia de diámetro $AB = 2R$, se considera la cuerda CD de longitud fija c. Sea E la intersección de AC con BD y F la intersección de AD con BC. Probar que el segmento EF tiene longitud constante y dirección constante al variar la cuerda CD sobre la circunferencia.

Solución.



Como $\angle ECD = \angle ABE$ (ya que ambos comprenden el arco AD de la semicircunferencia) y $\angle EDC = \angle BAE$, deducimos que los triángulos ECD y EBA son semejantes. Además, $\angle BCD = \angle BAD$. Por tanto

$$\angle ECF = \angle ECD + \angle DCF = \angle ABD + \angle BAD = 90,$$

ya que $\angle ADB = 90$ (abarca el diámetro AB). Análogamente $\angle EDF = 90$ y por tanto, el cuadrilátero $ECFD$ es cíclico de diámetro EF.

Por el Teorema del seno tenemos que

$$EF = \frac{CD}{\operatorname{sen} \angle CFD} = \frac{CD}{\operatorname{sen}(90 + \angle FBD)} = \frac{CD}{\cos \angle FBD}.$$

Como CD es constante y $\angle FBD$ también (por ser constante el arco que lo comprende) deducimos que EF es constante.

Además, si llamamos G a la intersección de EF con AB, tenemos que

$$\angle EGB = 180 - (\angle GBE + \angle GEB) = 180 - (\angle ECD + \angle DCF) = 180 - \angle ECF = 90.$$

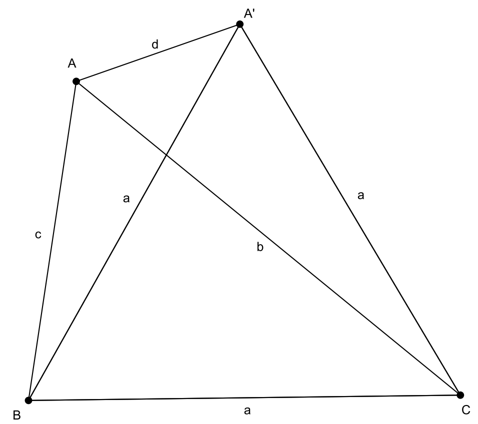
Así, la dirección de EF es siempre perpendicular a AB.

Problema 10. Sean a, b y c los lados de un triángulo de área (ABC). Probar que

$$4\sqrt{3}(ABC) \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Solución.



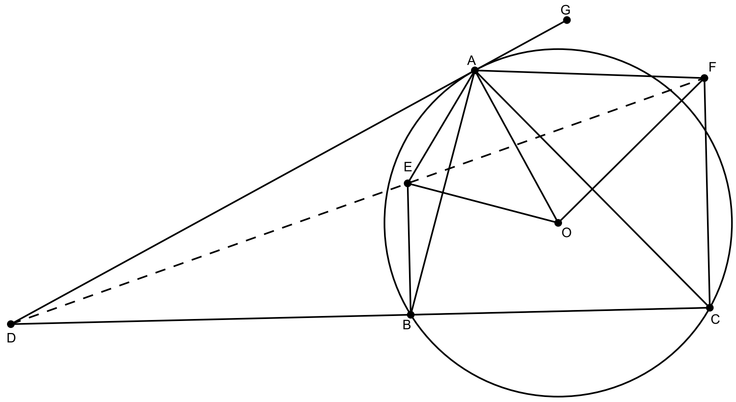
Consideramos el punto A' como en la figura; es decir, de manera que el triángulo $A'BC$ es equilátero. Llamemos a, b, c a los lados del triángulo ABC y sean $d = AA'$ y $\alpha = \angle ABA'$. Entonces

$$\begin{aligned} d^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\angle ABC - 60) \\ &= a^2 + c^2 - 2ac\left[\cos\angle ABC \cos 60 + \operatorname{sen}\angle ABC \operatorname{sen} 60\right] \\ &= a^2 + c^2 - ac\cos\angle ABC - \sqrt{3}ac \operatorname{sen}\angle ABC \\ &= a^2 + c^2 + \frac{1}{2}\left[b^2 - a^2 - c^2\right] - 2\sqrt{3}(ABC) \\ &= \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - 2\sqrt{3}(ABC) \end{aligned}$$

Como $d^2 \geq 0$, se cumple el enunciado. La igualdad se da si y sólo si $d = 0$; es decir, si y sólo si el triángulo ABC es equilátero.

Problema 11. En el triángulo $\triangle ABC$, $AB < AC$ y sea O su circuncentro. La recta tangente a la circunferencia circunscrita al triángulo que pasa A corta a la recta BC en D. Las rectas perpendiculares a BC en B y en C cortan a las mediatrices de los lados AB y AC en E y en F, respectivamente. Probar que D, E y F están alineados.

Solución.



Since OE and OF are the perpendicular bisectors of AB and AC, respectively, we deduce that $\angle AOE = \angle ACB$ and $\angle AOF = \angle ABC$. Also, $\angle OFA = 90 - \angle FAC = 90 - \angle FCA = \angle ACB$ and analogously $\angle OEA = \angle ABC$. Therefore both $\triangle AEO$ and $\triangle AOF$ are similar to $\triangle ABC$. Then we obtain, respectively, $AE = \frac{AO \cdot AB}{AC}$ and $AF = \frac{AO \cdot AC}{AB}$. Hence $\frac{BE}{CF} = \frac{AE}{AF} = \frac{AB^2}{AC^2}$. The given claim is equivalent to show that $\triangle BED \sim \triangle CFD$ or $\frac{BE}{CF} = \frac{BD}{CD}$. Using that $DB \cdot DC = DA^2$ we have

$$\frac{BE}{CF} = \frac{BD}{CD} \iff \frac{AE}{AF} = \frac{BD}{CD} \iff \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD}{CD} \iff \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD^2}{DA^2} \iff \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DA},$$

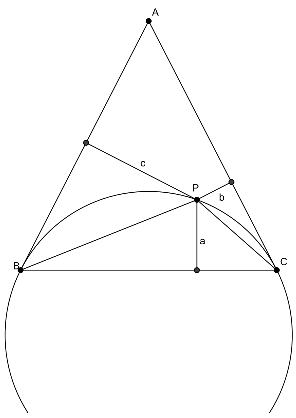
but the last equality is easily proved using the sine theorem

$$\frac{BD}{DA} = \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle ABD} = \frac{\sin \angle BCA}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{AC}.$$

This completes the proof.

Problema 12. ABC es un triángulo isósceles con AB=AC. Sea P un punto cualquiera de la circunferencia tangente a los lados AB en B y AC en C. Denotemos por a, b y c a las distancias de P a los lados BC, AC y AB respectivamente. Probar que $a^2 = bc$.

Solución.



Como AB es tangente a la circunferencia en B, tenemos que $\angle ABP = \angle PCB$. Análogamente, $\angle ACP = \angle PBC$.

Aplicando la definición de seno tenemos que

$$\frac{a}{PC} = \text{sen}\,\angle PCB = \text{sen}\,\angle ABP = \frac{c}{PB}$$

$$\frac{a}{PB} = \operatorname{sen} \angle PBC = \operatorname{sen} \angle ACP = \frac{b}{PC}.$$

Entonces

$$c = \frac{a \cdot PB}{PC}$$

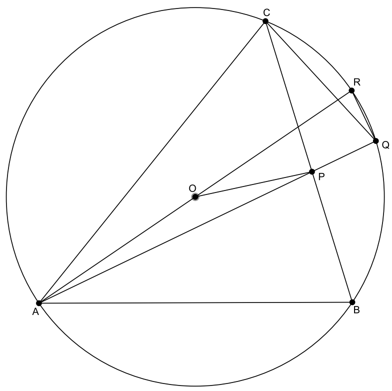
$$b = \frac{a \cdot PC}{PB}.$$

Multiplicando ambas igualdades obtenemos $a^2 = bc$.

Problema 13. Sea O el circuncentro del triángulo ABC. La bisectriz que parte de A corta al lado opuesto en P. Probar que se cumple

$$AP^2 + OA^2 - OP^2 = bc.$$

Solución.



Prolongamos AP y AO hasta cortar a la circunferencia circunscrita la triángulo ABC en Q y R, respectivamente.

Como los triángulos APB y ACQ son semejantes (ya que $\angle BAP = \angle QAC$ y $\angle ABP = \angle AQC$), obtenemos que

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AC}{AQ}.$$

Por otra parte, usando el Teorema del coseno, tenemos que $OP^2 = AO^2 + AP^2 - 2AO \cdot AP \cdot \cos \angle OAP$.

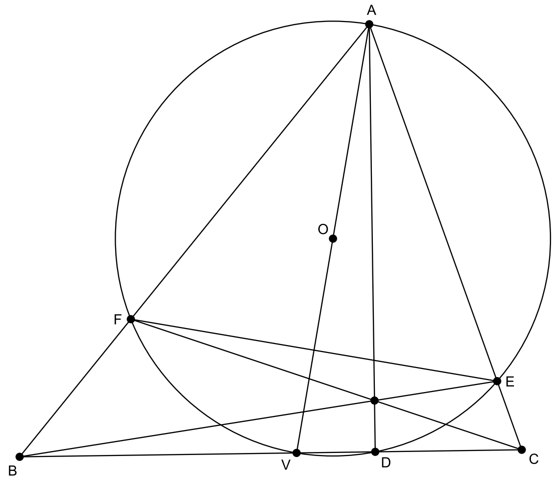
Como AR es un diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, deducimos que $\cos \angle OAP = \frac{AQ}{AR}$. Despejando y denotando por r el radio de la circunferencia circunscrita, tenemos que

$$AO^2 + AP^2 - OP^2 = 2AO \cdot AP \cdot \frac{AQ}{AR} = 2r \cdot AP \cdot \frac{AQ}{2r} = AP \cdot AQ.$$

Pero, como vimos antes, $AP \cdot AQ = AB \cdot AC = bc$. Queda así probado el enunciado.

Problema 14. En un triángulo acutángulo ABC, con $AB \neq AC$, sea V la intersección de la bisectriz de A con BC y sea D el pie de la altura desde A a BC. Si E y F son las intersecciones de la circunferencia circunscrita a AVD con CA y AB, respectivamente, mostrar que las rectas AD, BE y CF son concurrentes.

Solución.



Sea O el centro de la circunferencia. Entonces O es el punto medio de AV ya que $\angle ADV = 90$.

Como $\angle OAF = \angle OAE = 90 - \angle AFE$, deducimos que $AO \perp EF$ (son perpendiculares) y entonces $AF = AE$.

Usando Ceva, para demostrar el enunciado bastará probar que

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{AE} = 1.$$

O bien, como $AF = AE$, probar que $\frac{BF}{BD} = \frac{CE}{DC}$.

Por otra parte, usando potencias tenemos que $BF \cdot BA = BV \cdot BD$, es decir, $\frac{BF}{BD} = \frac{BV}{BA}$. De igual forma $CE \cdot CA = CD \cdot CV$, o bien $\frac{CE}{CD} = \frac{CV}{CA}$.

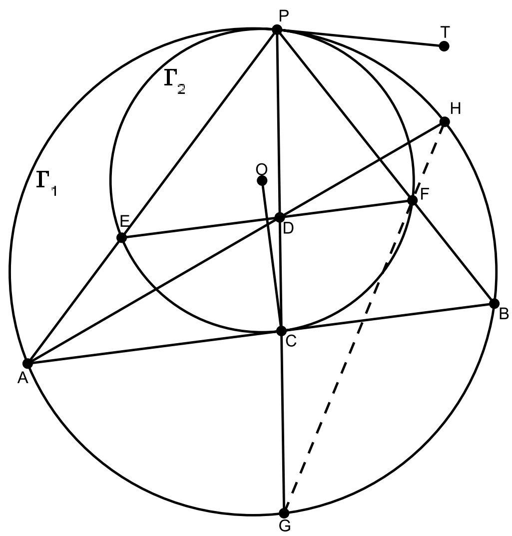
Luego

$$\frac{BF}{BD} = \frac{CE}{DC} \Leftrightarrow \frac{BV}{BA} = \frac{CV}{CA},$$

y esto último es el Teorema de la bisectriz.

Problema 15. Una circunferencia Γ_2 es tangente interiormente a la circunferencia Γ_1 circunscrita al triángulo PAB en P y al lado AB en C. Sean E y F la intersección de Γ_2 con los lados PA y PB, respectivamente. Sea D el punto de intersección de EF con PC. Las rectas PD y AD intersecan de nuevo a Γ_1 en G y H, respectivamente. Probar que F, G, H están alineados.

Solución.



Sea PT la tangente exterior a las circunferencias en P. Entonces

$$\angle PAB = \angle BPT = \angle PEF,$$

luego $EF \parallel AB$. Sea O el centro de Γ_2. Como $OC \perp AB$ (porque AB es tangente a Γ_2 en C), deducimos que $OC \perp EF$ y por tanto OC es la mediatriz del segmentoEF, es decir, C es el punto medio del arco EF. Entonces PC es la bisectriz de $\angle EPF$. Por otra parte

$$\angle HDF = \angle HAB = \angle BPH,$$

luego el cuadrilátero $PDFH$ es cíclico y por tanto

$$\angle DHF = \angle DPF = \angle EPD = \angle APG = \angle AHG = \angle DHG.$$

Esto prueba que G, H, F están en la misma recta.